

بسم الله الرحمن الرحيم

احتمالات

احتمالات علمی است که چانس وقوع یک واقعه را در آینده و در حال حاضر توسط اعداد نشان میدهد. احتمال وقوع یک واقعه را به فیصدی نشان میدهند و یا از کلمات مانند ممکن (شاید)، ناممکن و حتمی استفاده میکنند.

احتمال وقوع یک واقعه را میتوان به سه درجه تقسیم کرد:

- 1- حتمی (صد فیصد و یا 1)
- 2- ممکن یا شاید (بین صفر و صد فیصد و یا بین صفر و 1)
- 3- ناممکن (صفر فیصد و یا صفر)

مثال: احتمال آمدن زمستان بعد از خزان:

- 1- شاید
- 2- حتمی
- 3- ناممکن
- 4- هیچکدام

مثال: چانس شیر ویا خط زمانیکه سکه به هوا پرتاب میشود، چند فیصد است؟

1- شاید

2- حتمی

3- ناممکن

4- هیچکدام

مثال: مرغ همسایه یک لنگ دارد:

- 1- شاید
- 2- حتمی
- 3- ناممکن
- 4- هیچکدام

مثال: اطفال شیرینی را دوست ندارند:

- 1- شاید
- 2- حتمی
- 3- ناممکن
- 4- هیچکدام

یادداشت: برای دریافت احتمال وقوع یک واقعه از نسبت ذیل استفاده میکنیم.

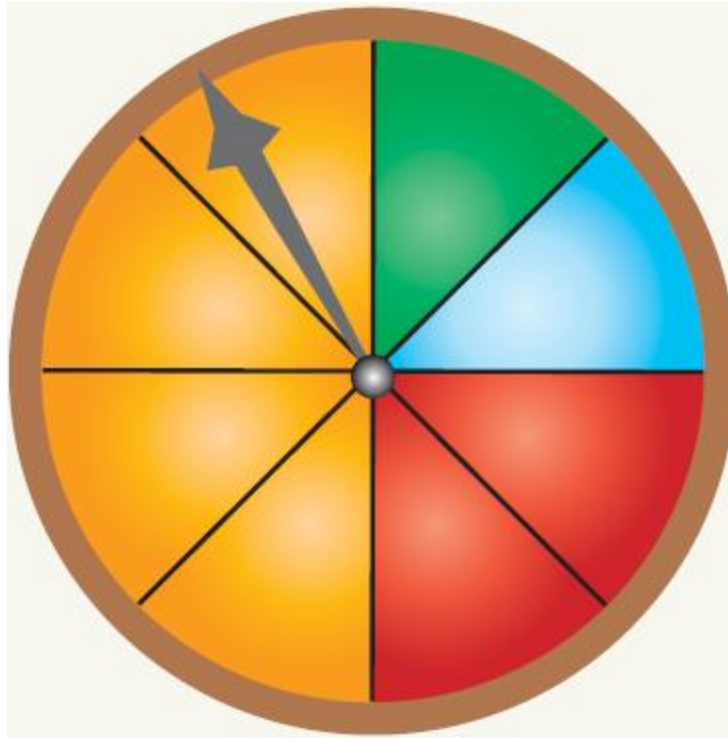
تعداد احتمال وقوع واقعه

مجموع احتمالات

برای دریافت فیصدی احتمال وقوع یک واقعه از نسبت ذیل استفاده میکنیم.

$$\frac{\text{تعداد احتمال وقوع واقعه}}{\text{مجموع احتمالات}} \times 100$$

مثال: قرار شکل

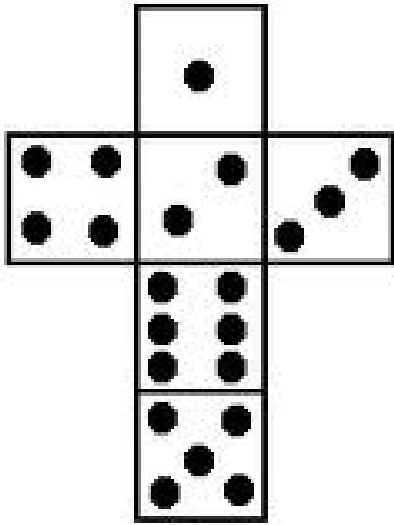


احتمال قرار گرفتن عقربه بعد از چرخ زدن را
بالای رنگهای نارنجی، سرخ و سیاه دریابید؟

مثال: نتایج پنج سال گذشته نشان میدهد که تیم تکواندوی دختران کشور در مسابقات 5 سال گذشته در هیچکدام برنده نبودند. احتمال اینکه امسال برنده شوند، چند فیصد است؟

مثال: نتایج پنج مسابقه گذشته نشان میدهد که تیم فوتبال پسران کشور در 5 مسابقه گذشته در 3 مسابقه برنده بودند. احتمال اینکه در مسابقه بعدی برنده شوند، چند فیصد است؟

مثال: یک دانه رمل انداخته میشود. احتمال اینکه شماره یک بیاید، چند است؟



مثال: یک دانه رمل انداخته شده است. احتمال اینکه عدد حاصل شده قاسم عدد 6 باشد، چند است؟

مثال: هر حرف کلمه افغانستان جدا جدا در توته
های کاغذ نوشته شده و یکی آن بدون اینکه
دیده شوند، برداشته میشود. احتمال اینکه حرف
انتخاب شده الف باشد، چند است؟

مثال: در یک جعبه چهار گلوله سبز و یک گلوله سرخ وجود دارد. احتمال اینکه گلوله سبز انتخاب شود، چند است؟

مثال: در یک جعبه 3 گلوله سرخ، 2 آبی و 3 زرد وجود دارد. احتمال اینکه گلوله انتخاب شده سرخ نباشد، چند است؟

مثال: در بین گلوله های مساوی که در يك
خریطة قرار دارد و روی آن ها از 1 تا 100
شماره زده شده است قرعه کشی میشود دریافت
کنید احتمال این که:

1- عدد قرعه قابل تقسیم به 5 باشد.

2- عدد قرعه جفت باشد.

3- عدد سه رقمی باشد.

4- عدد چهار رقمی باشد.

مثال: یک دانه رمل انداخته میشود، احتمال اینکه یکعدد بزرگتر از یک حاصل شود، را دریابید:

مثال: یک دانه رمل انداخته میشود، احتمال اینکه یکعدد بزرگتر از یک و یا یک حاصل شود، را دریابید:

مثال: یک دانه رمل هشت بار انداخته میشود و سه بار عدد یک حاصل میشود. احتمال اینکه در بار نهم عدد یک حاصل شود، را دریابید؟

تجربه تصادفی: یک حادثه که هنوز نتایج آن به صورت قطعی معلوم نباشد به نام تجربه تصادفی یاد می شود. برای حوادثی که تصادفی و یا اتفاقی نیستند، پیش بینی معنی ندارد.

و یا اگر نتیجه یک تجربه 100% از قبل معلوم باشد، بنام تجربه غیر تصادفی یاد میشود اما اگر نتیجه یک تجربه از قبل 100% معلوم نباشد بنام تجربه تصادفی یاد میشود.

مثال: انداختن یک سکه که هر دو طرف آن خط است یک تجربه:

- 1- تصادفی است
- 2- غیر تصادفی است
- 3- کیفی است
- 4- پیوسته است

مثال: گرفتن یک گلوله از یک جعبه که سه گلوله رنگ سبز و دو گلوله رنگ سرخ دارند، یک تجربه:

- 1- تصادفی است
- 2- غیرتصادفی است
- 3- کیفی است
- 4- پیوسته است

مثال: انتخاب رئیس جمهور توسط آرای مردم،
یک تجربه:

- 1- تصادفی است
- 2- غیر تصادفی است
- 3- کیفی است
- 4- پیوسته است

فضای نمونه : تمام نتایج ممکن یک تجربه تصادفی به نام فضای نمونه یاد میشود و معمولاً ست آن توسط حرف S نشان داده میشود. هر عضو فضای نمونه بنام نتیجه نمونه و یا حادثه اولیه یاد میشود و یا تعداد عناصر ست فضای نمونه بنام نتایج نمونه یاد میشوند. در نوشتن ست فضای نمونه عناصر تکراری حذف میشوند.

مثال: یک سکه پرتاب میشود، ست فضای نمونه
آنرا بنویسید؟

مثال: دو سکه همزمان پرتاب میشوند، ست فضای نمونه آنرا بنویسید؟

مثال: دو سکه همزمان پرتاب میشوند اگر خط را به T و شیر را به H نشان دهیم، احتمال اینکه هر دو سکه خط باشند را دریابید؟

مثال: دو سکه همزمان پرتاب میشوند اگر خط را به T و شیر را به H نشان دهیم، احتمال اینکه هر دو سکه یکسان باشند را دریابید؟

چانس برابر بودن احتمال واقعات: در صورتیکه حوادث بر یگدیگر از نظر تعداد هیچ برتری نداشته باشند، بنام حوادث دارای چانس برابر یاد میشوند. بطورمثال: در یک دانه رمل احتمال اعداد 1، 2، 3، 4، 5 و 6 باهم برابر اند و آنرا طور ذیل مینویسیم:

$$P(\{6\}) = P(\{5\}) = P(\{4\}) = P(\{3\}) = P(\{2\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

مجموع احتمالات حوادث اتفاقی هم چانس
مساوی به یک است.

چانس متفاوت برای احتمال واقعات:
در صورتیکه حوادث بر یگدیگر از نظر تعداد برتری داشته باشند، دارای چانس وقوع متفاوت میباشند. بطور مثال: اگر در یک خریطه دو گلوله سرخ (r) و پنج گلوله سبز (g) وجود داشته باشد، احتمال برآمدن آنها قرار ذیل است:

$$P(\{r\}) = \frac{2}{7}$$

$$P(\{g\}) = \frac{5}{7}$$

حادثه اتفاقی: هر ست فرعی ست فضای نمونه
بنام حادثه اتفاقی میباشد. بطور مثال: ست نمونه
یک سکه $S = \{ H, T \}$ و ست های فرعی
آن $\{ \}$ ، $\{ H \}$ ، $\{ T \}$ و
 $\{ H, T \}$ میباشد که هر کدام آنها
بنام حادثه اتفاقی ست فضای یاد میشوند.

ست خالی بنام حادثهٔ اتفاقی ناممکن و ست
فضای نمونه بنام حادثهٔ اتفاقی مطمئن یاد
میشود.

هرگاه تعداد عناصر فضای نمونه مساوی به n باشد، تعداد حادثات اتفاقی آن 2^n میباشد.

مثال: تعداد حوادث اتفاقی فضای نمونه

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ را دریابید؟}$$

مثال: در پرتاب یک سکه تعداد حوادث اتفاقی
چند است؟

مثال: یک فضای نمونه 4 حادثه اولیه اتفاقی دارد، چند حادثه اتفاقی دارد؟

مثال: چهار حزب A، B، C و D در انتخابات شرکت میکنند. تعداد تمام احتمالات ممکن شرکت در انتخابات را محاسبه کنید؟

فضای نمونه گسسته: عبارت از فضای نمونه است که عناصر آن قابل شمارش و قابل تشخیص باشند. مانند فضای نمونه پرتاب سکه و فضای نمونه پرتاب دانه رمل.

فضای نمونه پیوسته ویا متمادی: عبارت از فضای نمونه است که عناصر آن قابل شمارش نباشد. این نوع فضای نمونه روی محور اعداد حقیقی ویا توسط اشکال هندسی نشان داده میشود.

دیاگرام درختی: هر تجربه تصادفی را میتوانیم
توسط یک دیاگرام درختی نشان دهیم، طوری که
مبدأ دیاگرام شروع تجربه و شاخچه های آن
تعداد احتمالات ممکنه را نشان میدهد.

مثال: در یک خریطه 3 گلوله سرخ، 2 گلوله سبز و 2 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. دو گلوله پی در پی برداشته میشوند، تمام احتمالات ممکنه را توسط دیاگرام درختی نشان دهید در صورتیکه گلوله بعد از گرفتن دوباره در خریطه انداخته شود؟

مثال: در یک خریطه 3 گلوله سرخ، 2 گلوله سبز و 2 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. دو گلوله پی در پی برداشته میشوند، تمام احتمالات ممکنه را توسط دیاگرام درختی نشان دهید در صورتیکه گلوله بعد از گرفتن دوباره در خریطه انداخته نشود؟

مثال: در یک خریطه 2 گلوله سرخ، 3 گلوله سبز و 1 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. دو گلوله پی در پی برداشته میشوند، تمام احتمالات ممکنه را توسط دیاگرام درختی نشان دهید در صورتیکه گلوله بعد از گرفتن دوباره در خریطه انداخته شود؟

مثال: در یک خریطه 2 گلوله سرخ، 3 گلوله سبز و 1 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. دو گلوله پی در پی برداشته میشوند، تمام احتمالات ممکنه را توسط دیاگرام درختی نشان دهید در صورتیکه گلوله بعد از گرفتن دوباره در خریطه انداخته نشود؟

یادداشت: برای آسانی محاسبه تنها مسیری که سوال آن مطرح شده است، رسم میکنیم و از سایر مسیرها صرفنظر میکنیم.

مثال: در یک خریطه 2 گلوله سرخ، 3 گلوله سبز و 1 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. دو گلوله پی در پی برداشته میشوند، احتمال اینکه هر دو گلوله سرخ باشند، را دریابید در صورتیکه گلوله بعد از گرفتن دوباره در خریطه گذاشته شود؟

مثال: در یک خریطه 2 گلوله سرخ، 3 گلوله سبز و 1 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. دو گلوله پی در پی برداشته میشوند، احتمال اینکه هر دو گلوله سرخ باشند، را دریابید در صورتیکه گلوله بعد از گرفتن دوباره در خریطه گذاشته نشود؟

مثال: در یک خریطه 2 گلوله سرخ، 3 گلوله سبز و 1 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. دو گلوله پی در پی برداشته میشوند، احتمال اینکه گلوله اول سیاه و دوم سبز باشد، را دریابید در صورتیکه گلوله بعد از گرفتن دوباره در خریطه گذاشته شود؟

مثال: در یک خریطه 2 گلوله سرخ، 3 گلوله سبز و 1 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. دو گلوله پی در پی برداشته میشوند، احتمال اینکه گلوله اول سیاه و دوم سبز باشد، را دریابید در صورتیکه گلوله بعد از گرفتن دوباره در خریطه گذاشته نشود؟

مثال: در یک خریطه 2 گلوله سرخ، 3 گلوله سبز و 1 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. اگر تجربه را 4 بار تکرار کنیم احتمال حادثه `grrb` را دریابید اگر گلوله بعد از گرفتن دوباره گذاشته شود؟

مثال: در یک خریطه 2 گلوله سرخ، 3 گلوله سبز و 1 گلوله سیاه رنگ وجود دارند. اگر تجربه را 4 بار تکرار کنیم احتمال حادثه `grrb` را دریابید اگر گلوله بعد از گرفتن دوباره گذاشته نشود؟

یادداشت: دیاگرام خطی پرتاب یک سکه قرار
ذیل است.

همچنان دیاگرام برداشتن دو شی از یک مکان
مانند دیاگرام پرتاب سکه میباشد.

مثال: یک سکه سه بار پرتاب میشود.

سوال اول: احتمال اینکه فقط یک بار خط باشد،
را دریابید.

سوال دوم: احتمال اینکه حداقل یک بار خط باشد، را دریابید.

حداقل یکبار به معنای (مقصد یکبار) و حداکثر
یکبار به معنای (فقط یکبار) میباشد.

سوال سوم: احتمال اینکه حداکثر یک بار خط
باشد، را دریابید.

سوال چهارم: احتمال اینکه دو بار خط باشد، را دریابید.

مثال: از یک الماری دو پیراهن سفید و سیاه سه بار انتخاب شده و دوباره گذاشته میشود. احتمالات ذیل را محاسبه کنید.

سوال اول: احتمال اینکه دومین پیراهن سیاه باشد؟

سوال دوم: احتمال اینکه فقط دومین پیراهن سیاه باشد؟

سوال سوم: احتمال اینکه حداقل یک پیراهن سیاه باشد؟

سوال چهارم: احتمال اینکه حداکثر یک پیراهن سیاه باشد؟

سوال پنجم: احتمال اینکه اولین و آخرین پیراهن سیاه باشد؟

سوال ششم: احتمال اینکه اولین یا آخرین پیراهن سیاه باشد؟

قواعد احتمالات

1- احتمال حادثه اتفاقی E همیشه بین 0 و 1
و یا بین 0% و 100% است. یعنی:

$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad \text{و یا} \quad 0\% \leq P(E) \leq 100\%$$

2- احتمال فضای نمونه مساوی به 1 ویا
100% است. یعنی:

$$P(S) = 1 = 100\%$$

3- احتمال حادثهٔ اتفاقی ناممکن و یا ست خالی مساوی به 0 و یا 0% است. یعنی:

$$P(\phi) = 0 = 0\%$$

اتحاد حوادث اتفاقی

1- هرگاه در یک فضای نمونه S حوادث
اتفاقی $A \subset B$ باشد، $A \cup B = B$ میشود.

2- در یک فضای نمونه S حوادث $A \cup B$ و $B \cup A$ باهم یکسان اند.

$$A \cup B = B \cup A$$

3- هرگاه در يك فضاي نمونه S حادثه

A و B اتفاق افتد، حادثه اتفاقی

$A \cup B$ نیز اتفاق افتاده است. همچنان:

$$A \subset A \cup B \quad B \subset A \cup B$$

4- حادثه $A \cup B$ به این مفهوم است که
حادثه A و یا B اتفاق افتاده است.

تقاطع حوادث اتفاقی

1- حوادث اتفاقی $A \cap B$ و $B \cap A$ باهم

مساوی اند. $A \cap B = B \cap A$

2- هریک از حوادث اتفاقی A و B حادثه

اتفاقی $A \cap B$ را دربر دارد.

3- هرگاه $A \cap B = \emptyset$ باشد، حادثه های

A و B از هم جدا نامیده میشوند.

4- $A \cap S = A$ و $A \cap \emptyset = \emptyset$ میباشد.

5- هرگاه حادثه اتفاقی B حادثه A را
دربرداشته باشد، $A \cap B = A$ میشود.

ست مکمله در حوادث اتفاقی

$$A \cup \overline{A} = S \quad -1$$

$$P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(S) = 1 \quad \mathbf{-2}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad \text{-3}$$

اصل شمارش: در ترکیب عناصر دو ست اگر تعداد احتمالات عناصر یک ست m و از ست دوم مساوی به n باشد، در صورتیکه هر دو را انتخاب کنیم، تعداد مجموعی احتمالات مساوی به $m \times n$ میباشد.

مثال: از ارقام 3، 4، 5 و 8 چند عدد دو رقمی تشکیل میشود؟

مثال: از ارقام 0، 2، 4، 5 چند عدد دو رقمی تشکیل میشود؟

مثال: از ارقام 0، 1، 2، 3، 4، 5 چند عدد دو رقمی را میتوانیم تشکیل کنیم که قابل تقسیم بر دو باشند؟

مثال: از ارقام 3، 4، 5 و 8 چند عدد سه رقمی تشکیل میشود؟

مثال: یک شرکت ترانسپورتي 5 سرويس در لين
کابل – جلال آباد و 3 سرويس در لين جلال آباد
– کنر دارد. یک شخص به چند طريق ميتواند از
کابل به کنر برود؟

مثال: در یک آیسکریم فروشی سه نوع آیسکریم
با شش طعم به فروش میرسد. چند احتمال برای
خرید آیسکریم وجود دارد؟

مثال: در یک موتر فروشی دو نوع موتر کوچک و بزرگ که هر کدام سه مودل و پنج رنگ دارند، به فروش میرسند. به چند طریق میتوان یک موتر را خریداری کرد؟

مثال: با استفاده از سه حرف (م ، ر ، ی) چند کلمه چهار حرفی معنی دار و بی معنی میتوان تشکیل داد؟

مثال: با استفاده از ارقام 0 ، 1 ، 4 ، 7 ، 8 و 9 چند شماره 6 رقمی تلفون میتوان تشکیل داد به شرط آنکه سه رقم طرف چپ 077 باشد؟

یادداشت: در صورتیکه تکرار مجاز نباشد، در اصل شمارش باید تعداد احتمالات یک ست یک واحد کمتر از تعداد احتمالات ست دومی انتخاب شود.

مثال: از چهار رقم 6، 7، 8 و 9 چند عدد دو رقمی تشکیل میشود در صورتیکه رقم تکرار نشود؟

مثال: از چهار رقم 6، 7، 8 و 0 چند عدد دو رقمی تشکیل میشود در صورتیکه رقم تکرار نشود؟

مثال: از چهار رقم 6، 7، 8 و 9 چند عدد سه رقمی تشکیل میشود در صورتیکه رقم تکرار نشود؟

مثال: از چهار رقم 6، 7، 8 و 0 چند عدد سه رقمی تشکیل میشود در صورتیکه رقم تکرار نشود؟

ترتیب و ترکیب

در صورتیکه ترتیب مهم نباشد، در احتمالات
بنام ترکیب (Combination) یاد میشود
اما اگر ترتیب مهم باشد، بنام ترتیب
(Permutation) یاد میشود.

اگر هر تغییر یک احتمال جدید باشد به این مفهوم است که ترتیب مهم است.
در مثال (از سه رقم 2، 3 و 4 چند نمبر
پلیت تشکیل میشود؟) هر تغییر یک احتمال
جدید است.

اگر هر تغییر یک احتمال جدید نباشد به این مفهوم است که ترتیب مهم نیست در مثال (از سه نقطه متمایز چند خط عبور میکند؟) تغییر یک احتمال جدید نمیباشد.

ترتیب: ترتیب به دو نوع است.

نوع اول: ترتیب با تکرار

نوع دوم: ترتیب بدون تکرار

بطور مثال: از سه رقم 5، 6 و 7 چند نمبر پلیت تشکیل میشود، یک نوع ترتیب با تکرار میباشد. اما به چند طریق سه نفر میتوانند پهلوی هم ایستاده شوند، یک نوع ترتیب بدون تکرار است.

حل سوالات ترتیب با تکرار

برای این منظور از رابطه n^k استفاده

میشود. در رابطه فوق n تعداد اعداد ویا

اشیای داده شده و k تعداد منتخبه میباشد.

مثال: از چهار رقم 4 ، 5 ، 6 و 7 چند عدد

دو رقمی تشکیل میشود؟

مثال: از چهار رقم 4 ، 5 ، 6 و 7 چند عدد

چهار رقمی تشکیل میشود؟

مثال: از چهار رقم 4 ، 5 ، 6 و 7 چند عدد

پنج رقمی تشکیل میشود؟

یادداشت: در صورتیکه تعداد منتخبه تعیین

نشده باشد، برای حل سوالات ترتیب با

تکرار از رابطه n^n استفاده میکنیم.

مثال: از چهار رقم 4، 6، 7 و 9 چند نمبر
پلیت موتر تشکیل میشود؟

حل سوالات ترتیب بدون تکرار

برای این منظور از رابطه $\frac{n!}{(n-k)!}$ استفاده میشود. n تعداد اعداد ویا اشیای داده شده و k تعداد منتخبه میباشد.

و یا از رابطه $\frac{n!}{r!}$ استفاده میکنیم. در
این رابطه r تفاضل تعداد اشیای داده شده و
منتخبه میباشد.

مثال: از بین 10 تیم به چند طریق امکان دارد
تیم اول و دوم انتخاب شود؟

مثال: از 20 تن شاگردان یک صنف به چند طریق میتوان یک نماینده و یک معاون را انتخاب کنیم؟

مثال: از 12 تیم فوتبال به چند شکل برنده برای
مقام های اول، دوم و سوم وجود دارد؟

یادداشت: اگر تعداد منتهیه داده نشده باشد،
برای حل سوالات ترتیب بدون تکرار از $n!$
استفاده میکنیم.

مثال: سه نفر به چند طریق میتوانند پهلوی هم ایستاده شوند؟

حل سوالات ترکیب

برای این منظور از رابطه $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ استفاده میشود. n تعداد اعداد ویا اشیای داده شده و k تعداد منتخبه میباشد.

مثال: در یک امتحان ضرورت است تا از 10 سوال به 7 سوال جواب داده شود. به چند شکل احتمال جواب دادن وجود دارد؟

مثال: چهار نفر احوال پرسی میکنند، تعداد

احوال پرسی ها را دریابید؟

مثال: از یک گروپ 6 نفری 4 نفر برای

یک مسابقه انتخاب میشوند. به چند طریق

انتخاب امکان پذیر است؟

مثال: سوالات ذیل را به یکی از طریقه های
اصل شمارش، ترتیب و یا ترکیب حل کنید؟

سوال اول: از 1، 5، 4، 2 و 8 چند عدد پنج رقمی تشکیل شده میتواند که رقم آنها تکرار نباشد و از عدد 30000 بزرگتر باشند؟

حل: برای حل این سوال از اصل شمارش استفاده میکنیم. در خانه ده هزار ارقام 4، 5 و 8 صدق میکنند و برای اینکه رقم تکرار نباشد باید از مجموع احتمالات در خانه های قبلی در هر مرحله یک یک واحد کم شود.

سوال دوم: چند عدد پنج رقمی از ارقام 1، 5، 4، 2 و 8 تشکیل میشود طوری که رقم اول آن 5، رقم آخر آن 2 و رقم تکرار نباشد؟

حل: برای حل این سوال از اصل شمارش استفاده میکنیم. رقم اول یک احتمال و رقم آخر نیز یک احتمال دارد. سه احتمال باقیمانده است و باید در هر خانه بادر نظر داشت اینکه رقم تکرار نباشد، یک یک احتمال کم شود.

سوال سوم: چند عدد پنج رقمی وجود دارد که
رقم اول آن 2، رقم آخر آن 4 و هیچ رقم تکرار
نداشته باشد؟

حل: برای اینکه ارقام داده نشده است باید از ده رقم 0،1،2،3،4،5،6،7،8،9 استفاده شود. رقم اول و آخر هر کدام دارای یک احتمال میباشند و از هشت احتمال باقیمانده در هر خانه بادر نظر داشت اینکه رقم تکرار نباشد، یک یک واحد کم میکنیم.

سوال چهارم: ست $B = \{a, b, c, d\}$ چند

ست فرعی 3 عنصره دارد؟

حل: برای دریافت تعداد ست های فرعی از ترکیب استفاده میشود.

سوال پنجم: به چند طریق میتوانیم 3 توپ سرخ، 2 توپ آبی و 4 توپ زرد را پهلوی هم قرار دهیم؟

حل: مجموع توپها $n = 9$ میباشد و برای

دریافت تعداد احتمالات از رابطه ذیل استفاده

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!}$$

میشود.

سوال ششم: از هفت حرف G, F, E, D, C, B, A
چند کلمه چهار حرفی بدون تکرار میتوانیم
تشکیل کنیم؟

حل: از اصل شمارش استفاده میکنیم.

سوال هفتم: ست $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند

ست فرعی 2 عنصره دارد؟

حل: برای دریافت تعداد ست های فرعی از ترکیب استفاده میشود.

سوال هشتم: هفت تیم در یک مسابقه شرکت دارند، به چند طریق امکان دارد مقامهای اول، دوم و سوم را حاصل کنند؟

حل: برای حل این سوال باید از ترتیب بدون تکرار استفاده شود؟

سوال نهم: از بین 4 مرد و 6 زن 2 مرد و 3 زن باید طوری انتخاب شوند که از تیم مردها اولی رئیس و دومی مسوول مالی باشد. چند احتمال وجود دارد؟

حل: تعداد احتمالات مردها را به ترتیب بدون تکرار و تعداد احتمالات زنها را به ترکیب حل میکنیم و بعداً برای دریافت مجموع احتمالات آنها را باهم ضرب میکنیم.

سوال دهم: از پنج نقطه متمایز در یک مستوی
چند خط عبور میکند؟

حل: برای حل این سوال از ترکیب استفاده میشود طوری که مجموع نقاط 5 و منتخبه 2 میباشد.

سوال یازدهم: از پنج نقطه متمایز در یک
مستوی چند مثلث تشکیل میشود؟

حل: برای حل این سوال از ترکیب استفاده میشود طوری که مجموع نقاط 5 و منتخبه 3 میباشد.

سوال دوازدهم: به چند طریق 6 نفر میتوانند
پهلوی هم ایستاده شوند؟

حل: برای حل این سوال از ترتیب بدون تکرار استفاده میشود و تعداد منتخبه نیز تعیین نشده است.

سوال سیزدهم: چند احتمال وجود دارد تا حروف
کلمه **MATH** پهلوی هم قرار گیرند؟

حل: برای حل این سوال از ترتیب بدون تکرار استفاده میشود و تعداد منتخبه نیز تعیین نشده است.

سوال چهاردهم: چند احتمال وجود دارد تا
حروف کلمه **digit** پهلوی هم قرار گیرند؟

حل: برای حل این سوال از ترتیب بدون تکرار استفاده میشود و تعداد منتخبه نیز تعیین نشده است. همچنان حرف **i** دوبار تکرار شده است و عملیه تقسیم بر دو را نیز انجام دهیم.

سوال پانزدهم: به چند طریق میتوانیم 5 کتاب را
در یک الماری پهلوی هم قرار دهیم؟

حل: برای حل این سوال از ترتیب بدون تکرار استفاده میشود و تعداد منتخبه نیز تعیین نشده است.

سوال شانزدهم: در یک کشور نمبر پلّیت های موتر 4 رقمی از 9 رقم و 3 حرفی از 10 حرف تشکیل شده است. احتمال تشکیل چند نمبر پلّیت وجود دارد در صورتیکه رقم و حرف نیز تکرار نشود؟

حل: با استفاده از ترتیب احتمالات ارقام و احتمالات حروف را جدا جدا محاسبه کرده و در اخیر تعداد احتمالات هر دو ست را باهم ضرب میکنیم.

سوال هفدهم: از 7 حرف بی صدا و 4 حرف با صدا چند کلمه را میتوانیم تشکیل کنیم که 3 حرف بی صدا و 2 حرف با صدا داشته باشند؟

حل: با استفاده از ترکیب احتمالات ارقام و احتمالات حروف را جدا جدا محاسبه کرده و در اخیر تعداد احتمالات هر دو ست را باهم ضرب میکنیم.

سوال هژدهم: یک سکه سه بار پرتاب میشود،
تعداد مجموعی احتمالات را دریابید؟

حل: از گراف درختی استفاده میکنیم و مجموع احتمالات را دریافت میکنیم.

سوال نوزدهم: از ارقام (2,3,5,6,7,9) چند عدد سه رقمی قابل تقسیم بر پنج تشکیل میشود در صورتیکه رقم تکرار نشود؟

حل: از اصل شمارش استفاده میکنیم. احتمال خانه یکها تنها رقم 5 میباشد. از پنج رقم باقیمانده احتمال صدها پنج و احتمال ده ها چهار رقم میباشد.

سوال بیستم: در یک صنف درسی ده میز و هشت چوکی وجود دارد. به چند طریق میتوانیم یک میز و یک چوکی را باهم ترتیب کنیم؟

حل: از اصل شمارش استفاده میکنیم و تعداد
چوکی ها را با تعداد میزها ضرب میکنیم.

سوال بیست و یکم: در یک شهر سه مکان P , Q , R وجود دارد. اگر از سه طریق بتوانیم از P به Q و از چهار طریق بتوانیم از Q به R برویم. چند احتمال وجود دارد تا از P به R برسیم.

حل: از اصل شمارش استفاده میکنیم و تعداد احتمالات را باهم ضرب میکنیم.

سوال بیست و دوم: چند احتمال وجود دارد تا سه شاگرد در پنج چوکی قرار بگیرند؟

حل: از اصل شمارش استفاده میکنیم و تعداد عناصر هر دو ست را باهم ضرب میکنیم.

قضیه بینوم: رایه بینوم برای دریافت احتمال تجاری به کار میرود که ست فضای نمونه آن دو عنصر داشته باشد.

هرگاه ست فضای نمونه یک تجربه دو عنصر

A و A' داشته باشند، طبق قواعد

احتمالات $P(A) + P(A') = 1$ میباشد.

اگر $P(A) = P$ باشد، $P(A') = 1 - P$ میشود.

P بنام احتمال وقوع حادثه A و

$1 - P$ بنام عدم احتمال حادثه A یاد

میشود.

و یا P بنام احتمال پیروزی و $1-P$ بنام
عدم احتمال پیروزی و یا احتمال ناکامی یاد
میشود.

در صورتیکه تجربه n بار تکرار شده باشد
احتمال k دفعه پیروزی از رابطه ذیل
دریافت میشود.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} P^k (1-P)^{n-k}$$

ویا

$$\binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

رابطه فوق بنام احتمال برنولی نیز یاد میشود و
به $B(n, P, k)$ نیز نشان داده میشود.

در صورتیکه احتمال کامیابی 50 فیصد و یا $\frac{1}{2}$ باشد، احتمال برنولی و یا قضیه بینوم شکل ذیل را اختیار میکند.

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال: یک سکه 4 بار پرتاب میشود. احتمال اینکه 2 بار خط بیاید را دریابید؟

مثال: یک سکه 6 بار پرتاب میشود. احتمال اینکه 4 بار شیر بیاید را دریابید؟

مثال: یک سکه $2n$ بار پرتاب میشود. احتمال اینکه n بار خط بیاید را دریابید؟

مثال: در یک فامیل از 5 فرزند احتمال اینکه 2 تن پسر و بقیه دختر باشد، را دریابید؟

مثال: یک دانه رمل را 5 بار پرتاب میکنیم.
احتمال اینکه در 3 پرتاب عدد حاصل شده
بزرگتر از 3 باشد، را دریابید؟

$$n = 5$$

$$k = 3$$

$$P = \frac{1}{2}$$

مثال: یک دانه رمل را 6 بار پرتاب میکنیم.
احتمال اینکه در 3 پرتاب عدد حاصل شده قابل
تقسیم بر 2 باشد، را دریابید؟

$$n = 6$$

$$k = 3$$

$$P = \frac{1}{2}$$

مثال: یک دانه رمل را 6 بار پرتاب میکنیم.
احتمال اینکه در 4 پرتاب عدد حاصل شده
کوچکتر از 3 باشد، را دریابید؟

$$n = 6$$

$$k = 4$$

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال: یک دانه رمل را 20 بار پرتاب میکنیم.
احتمال اینکه عدد 4 در 16 پرتاب حاصل شود،
را دریابید؟

$$n = 20$$

$$k = 16$$

$$P = \frac{1}{6}$$

مثال: یک امتحان 10 سوال دارد و هر سوال دارای 4 جواب است. بدون حل سوالات یکی از جوابات را انتخاب میکنیم. احتمال اینکه 6 سوال درست حل شده باشد، را دریابید؟

$$n = 10$$

$$k = 6$$

$$P = \frac{1}{4}$$

مثال: احتمال اینکه بلال در امتحان ریاضی نمره

بالاتر از 90 را اخذ کند $\frac{4}{5}$ است. احتمال اینکه

در سه امتحان از چهار امتحان نمره بالاتر از

90 را اخذ کند، دریابید؟

$$n = 4$$

$$k = 3$$

$$P = \frac{4}{5}$$

یادداشت: در صورتیکه حداقل و یا حداکثر احتمال خواسته شده باشد، برای محاسبه احتمال توسط قضیه بینوم از رابطه ذیل استفاده میشود.

$$\sum \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

برای دریافت حداقل احتمال در هر حد بینوم

قیمت k را یک یک واحد افزایش میدهیم و

برای دریافت حداکثر احتمال در هر حد بینوم

قیمت k را یک یک واحد کاهش میدهیم.

مثال: یک دانه رمل 8 بار پرتاب میشود، احتمال اینکه حداقل 5 بار رقم حاصل شده کوچکتر از 3 باشد، از کدام رابطه دریافت میشود؟

مثال: یک دانه رمل 8 بار پرتاب میشود، احتمال اینکه حداکثر 5 بار رقم حاصل شده کوچکتر از 3 باشد، از کدام رابطه دریافت میشود؟

یادداشت: در صورتیکه احتمال واقعه $1/2$ باشد،
برای دریافت حداکثر احتمال و حداقل احتمال
میتوانیم از رابطه ذیل نیز استفاده کنیم.

$$\sum \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال: در یک قریه 200 خانواده زندگی میکنند
و هر فامیل دارای چهار طفل میباشند، احتمال
اینکه حداقل یک پسر داشته باشند، را دریابید؟

مثال: در یک قریه 200 خانواده زندگی میکنند
و هر فامیل دارای چهار طفل میباشند، احتمال
اینکه حداکثر یک پسر داشته باشند، را دریابید؟

مثال: در یک قریه 200 خانواده زندگی میکنند
و هر فامیل دارای چهار طفل میباشند، احتمال
اینکه تنها یک پسر داشته باشند، را دریابید؟

مثال: در یک قریه 200 خانواده زندگی میکنند
و هر فامیل دارای چهار طفل میباشند، احتمال
اینکه یک الی دو پسر داشته باشند، را دریابید؟

مثال: در یک قریه 200 خانواده زندگی میکنند
و هر فامیل دارای چهار طفل میباشند، احتمال
اینکه یک یا دو پسر داشته باشند، را دریابید؟

مثال: احتمال شفا یافتن مریضان شکر 0.4 است. اگر 15 نفر به این مریض مصاب باشند احتمال اینکه 3 الی 4 نفر شفا یابند را دریابید؟

مثال: احتمال شفا یافتن مریضان شکر 0.4 است. اگر 15 نفر به این مریض مصاب باشند احتمال اینکه 3 یا 4 نفر شفا یابند را دریابید؟

یادداشت: در صورتیکه $n = k$ باشد، احتمال برنولی شکل ذیل را اختیار میکند.

$$\binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k} = P^k$$

مثال: اگر دو سوال چهارجوابه را بدون حل جواب دهیم، احتمال اینکه جوابات درست باشند، را دریابید؟

مثال: اگر دو سوال چهارجوابه را بدون حل جواب دهیم، احتمال اینکه جوابات غلط باشند، را دریابید؟

اوسط توزیع برنولی: اوسط توزیع برنولی ویا
اوسط احتمال دو جمله ای از رابطه ذیل دریافت
میشود.

$$\bar{x} = n \cdot P$$

انحراف معیاری توزیع برنولی: انحراف معیاری
توزیع برنولی ویا انحراف معیاری احتمال دو
جمله ای از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$S = \sqrt{nP(1-P)}$$

توزیع احتمال پواسن: در سوالات توزیع احتمال دو جمله ای ویا توزیع برنولی اگر $n \rightarrow \infty$ و $P \rightarrow 0$ تقرب کند، برای آسانی حل سوالات از توزیع پواسن استفاده میشود. بصورت عموم اگر یک سوال به طریقه توزیع احتمال برنولی ویا توزیع احتمال پواسن حل شود، جوابات حاصل شده یکسان میباشد اما محاسبه احتمال توسط توزیع پواسن ساده تر میباشد.

توزیع احتمال پواسن قرار ذیل میباشد.

$$\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

طوریکه $e = 2.71828$ و $\lambda = nP$ میباشد.

توزیع احتمال پواسن به $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ P \rightarrow 0}} (n, P, k)$ نیز
نشان داده میشود.

بناءً گفته می‌توانیم که لمت توزیع دو جمله ای
بنام توزیع احتمال پواسن یاد میشود. از توزیع
احتمال پواسن اکثراً زمانی استفاده میشود که
قیمت n بزرگتر از 20 و قیمت P کوچکتر از
0.01 باشد.

مثال: به تعداد 200 مسافر تکت طیاره را گرفته اند و طبق تجارب گذشته احتمال نیامدن مسافران 0.01 است. احتمال اینکه 3 مسافر نیاید را دریابید؟

مثال: تعداد مراجعین به یک بانک در هر ساعت بطور اوسط 60 نفر است. احتمال اینکه چهار نفر در سه دقیقه اول به بانک مراجعه کنند، را دریابید؟

محاسبه مساحت تحت منحنی نورمال:
در صورتیکه خواسته باشیم مساحت تحت منحنی نورمال را از x_1 الی x_2 محاسبه کنیم از معادله منحنی نورمال انتگرال می گیریم. بناءً مساحت تحت منحنی نورمال از x_1 الی x_2 را میتوانیم از رابطه ذیل دریابیم.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx$$

اگر $\frac{X - \bar{X}}{S}$ را به Z نشان دهیم

رابطه فوق شکل $\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ را

اختیار میکند.

Z بنام متحول معیاری نورمال یاد میشود. در

رابطه $Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$ ، X عبارت از

متحول تصادفی است و میتوانیم قیمت های

X_1 و X_2 را بجای آن وضع کنیم.

بدر نظر داشت اینکه متحول معیاری نورمال
دارای اوسط صفر و انحراف معیاری یک میباشد
میتوانیم رابطه ذیل را نیز بنویسیم.

$$\int_{z_1}^{z_2} N(z, \bar{x}, s) = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1)$$

نمونه گیری: مجموعه همه افراد ویا اشیا را که میخواهیم در باره آنها احصاییه گیری کنیم، جامعه مینامیم. بطورمثال: در احصاییه گیری سابقه تدریس معلمان افغانستان، موضوع احصاییه گیری سابقه تدریس و جامعه آن معلمان افغانستان است.

مجموعه کوچکی که از یک جامعه برای
احصاییه گیری یک موضوع تعیین میشود بنام
نمونه یاد میشود. بصورت عموم نمونه به دو
نوع ساده یا غیرتصادفی و تصادفی میباشد.

روش های مختلف نمونه گیری قرار ذیل اند:

1- نمونه گیری تصادفی: در این نوع نمونه گیری عناصر جامعه همه برای انتخاب شدن هم چانس هستند.

2- نمونه گیری سیستماتیک و یا منظم: در این نوع نمونه گیری عناصر جامعه بطور منظم شماره گذاری میشوند.

3- نمونه گیری طبقه ای ویا گروهی: در این نوع نمونه گیری، جامعه به گروه های متجانس تقسیم میشود.

4- نمونه گیری خوشه ای: در این نوع نمونه گیری، جامعه بزرگ را به خوشه ها تقسیم کرده و از هر خوشه نمونه گیری میکنیم.

پارامتر جامعه: هر ویژگی عددی جامعه را
پارامتر جامعه مینامند.
آماره: هر ویژگی عددی نمونه را آماره مینامند
و یا هر تابع از عناصر نمونه تصادفی را که با
پارامترهای مجهول بستگی نداشته باشد، آماره
مینامند

مثال: اگر حجم جامعه 25 باشد و خواسته باشیم نمونه های 5 تایی از آن انتخاب کنیم. تعداد نمونه ها را دریابید؟

حل: از ترکیب استفاده میکنیم و تعداد نمونه ها
53130 حاصل میشود.

اوسط نمونه: در صورتیکه خواسته باشیم اوسط یک نمونه را دریابیم، مجموع آنرا بالای تعداد تقسیم میکنیم. بناءً اوسط نمونه از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

توزیع احتمال نمونه تصادفی

اگر $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی
از یک جامعه تابع احتمال $f(x)$ باشد، توزیع
احتمال نمونه تصادفی از جدول ذیل دریافت
میشود.

x	$x_1 \quad x_2 \dots\dots x_n$			
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots\dots$	$\frac{1}{n}$

بطور مثال: اگر داتاها 1،2،3،4 باشند، جدول توزیع احتمال نمونه تصادفی آن قرار ذیل میباشد.

همچنان اگر داتاها 4، 7، 9 باشند، جدول توزیع
احتمال نمونه تصادفی آن قرار ذیل میباشد.