

الجبر مقدماتی

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستي "ودان"

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

شناسنامه کتاب:

نام کتاب:	الجبر مقدماتی
تهیه و ترتیب:	استاد نجیب الله خوستی "ودان"
تیراژ:	1000 جلد
نوبت چاپ:	اول
تاریخ چاپ:	بهار 1393

فهرست مطالب

<u>عنوان:</u>	<u>صفحه</u>
(1) ست اعداد طبیعی، مکمل، تام و حقیقی	1
(2) نمایش هندسی اعداد حقیقی	2
(3) خواص اعداد حقیقی	2
(4) فرق بین حساب و الجبر	3
(5) محور اعداد	4
(6) قیمت مطلقه اعداد	5
(7) جمع اعداد الجبری	6
(8) تفریق اعداد الجبری	7
(9) ضرب اعداد الجبری	7
(10) تقسیم اعداد الجبری	8
(11) افاده های عددی	9
(12) طاقت	9
(13) ارایه علمی اعداد	17
(14) مسائل تطبیقی طاقت	18
(15) جذور	21
(16) تبدیل جذر به طاقت و عکس آن	24
(17) قوانین جذور	26
(18) عملیات مشترک بالای جذور	30
(19) جذر الجذر	32
(20) جذور مرکب	39
(21) تیوری ست اعداد موهومی	42
(22) تیوری ست اعداد مختلط	44
(23) دریافت جذرالمربع اعداد مختلط	49
(24) مسائل تطبیقی جذر	50
(25) متحول، ثابت، کمیت	59
(26) حد الجبری، حدود مشابه، حدود غیر مشابه، افاده های الجبری ضریب	60
(27) انواع افاده های الجبری	61
(28) قیمت عددی پولینوم	66
(29) عملیات اساسی بالای افاده های الجبری	68
(30) نامگذاری پولینوم	73
(31) قضیه باقیمانده	74
(32) قضیه فکتور	75

76	عکس قضیه فکتور	(33)
77	تقسیم ترکیبی	(34)
79	عملیات مشترک بالای پولینوم های الجبری	(35)
81	مسائل تطبیقی پولینوم ها	(36)
93	مطابقت ها	(37)
95	فکتور یل	(38)
96	ترکیب	(39)
98	دریافت حد خواسته شده در بینوم نیوتن	(40)
99	مثلث پاسکال	(41)
109	مطابقت های فرعی	(42)
109	مسائل تطبیقی مطابقت ها	(43)
116	تجزیه افاده های الجبری	(44)
120	تجزیه ترینوم ها	(45)
127	تجزیه به اساس جمع و تفريق حدود مناسب	(46)
128	تجزیه به اساس گروپ بندی	(47)
134	تجزیه به اساس جذر مربع	(48)
135	تجزیه افاده های معکوسه	(49)
136	مسائل عمومی تجزیه	(50)
140	موارد استعمال تجزیه	(51)
143	کسور الجبری	(52)
145	عملیات اساسی بالای کسور الجبری	(53)
147	کسر مرکب یا کسر الکسر	(54)
149	ناطق (گویا) ساختن	(55)
152	سوالات تقویتی الجبر	(56)
173	سوالات کانکور	(57)

الجبر (Algebra)

الجبر یکی از بخشهای مهم ریاضیات بوده که در لغت به معنی جبران کردن است و در اصطلاح ریاضیات عبارت از علمیهست که مسائل مغلق و پیچیده ریاضی را، که حساب از حل آن عاجز است به اساس فورمولها به طور مفصل و مسلسل حل مینماید.

کلمه الجبر به معنی جبران، تنظیم، تلافی و ترتیب کردن آمده است و همچنان برخی از علما میگویند که کلمه الجبر از لفظ جبیره زبان عربی گرفته شده، که معنی آن مرحم نهادن بالای زخم میباشد و در اصطلاح ریاضی یک شعبه از ریاضیات است که به وضع نمودن قوانین و فورمول ها مسائل مغلق و پیچیده ساینسی را به شکل های ساده حل می نمایند.

ست اعداد طبیعی: عبارت از ست اعداد است که از یک شروع و تا به مثبت لایتنهای ادامه دارد.

$$IN = N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \dots + \infty\}$$

ست اعداد مکمل: عبارت از ست اعداد است که از صفر شروع و تا به مثبت لایتنهای ادامه دارد.

$$W = H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \dots + \infty\}$$

ست اعداد تام: ست اعداد طبیعی مثبت و منفی به شمول صفر بنام ست اعداد تام یاد میشود.

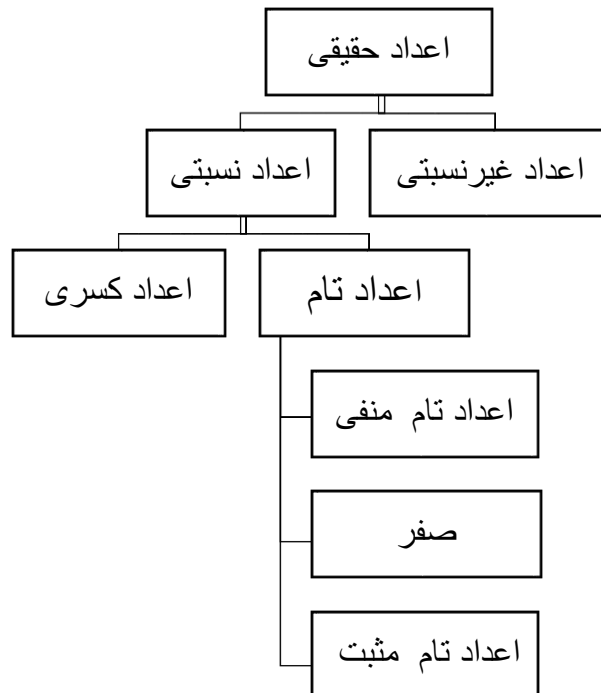
$$Z = I = \{-\infty \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots + \infty\}$$

موضوع علم الجبر: موضوع علم الجبر عبارت از ست اعداد حقیقی است.

ست اعداد حقیقی: از اتحاد اعداد ناطق و غیر ناطق ست که به وجود می آید بنام ست اعداد حقیقی یاد میشود و ست اعداد حقیقی توسط IR یا R نمایش داده میشود.

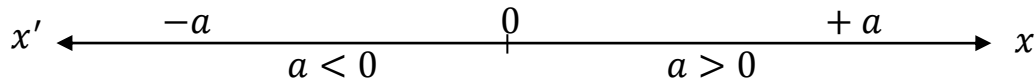
$$IR = \left\{ -\infty \dots -4, -3.5, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1, +2, +3, +\pi, +4 \dots + \infty \right\}$$

ست اعداد حقیقی در یک دیاگرام چنین نمایش داده میشود.



نمایش هندسی اعداد حقیقی

خط افقی xx' را در نظر گرفته و نقطه ای مانند 0 را روی آن مشخص مینمائیم، برای نمایش هندسی اعداد حقیقی فرض مینمائیم که 0 نمایش هندسی عدد صفر باشد، حال اگر $a > 0$ (مثبت باشد) نقطه ای در طرف راست 0 که فاصله آن از 0 برابر a واحد باشد، را انتخاب مینمائیم، این نقطه نمایش هندسی عدد a است. اگر $a < 0$ (منفی باشد) نقطه ای به فاصله a واحد در طرف چپ 0 انتخاب و این نمایش هندسی عدد a است، بنابراین نقاط طرف چپ 0 نمایش هندسی عدد a است، بطور کلی نقاط طرف راست 0، نمایش هندسی اعداد مثبت و نقاط طرف چپ 0 نمایش هندسی اعداد منفی میباشد، یعنی:



توجه داشته باشید که برای هر عدد حقیقی تنها یک نقطه در روی محور xx' و برای هر نقطه روی محور xx' تنها یک عدد حقیقی وجود دارد، یعنی بین ست نقاط xx' و ست اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک وجود دارد. بنابراین ازین جا نتیجه میگیریم که محور اعداد حقیقی عبارت از خط مستقیم است که اعداد حقیقی بالای آن قرار دارند و به دو طرف الی بینهایت امتداد دارد.

خواص اعداد حقیقی

اعداد حقیقی دارای خواص ذیل میباشد:

1. خاصیت بستگی در جمع: برای دو عدد حقیقی a و b حاصل جمع آنها یعنی $a + b$ نیز عدد حقیقی است یعنی:

$$a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b \in \mathbb{R}$$

در افاده فوق a و b اعداد و $\mathbb{R}$ بیانگر ست اعداد حقیقی میباشد.

2. خاصیت تبدیلی در جمع: برای دو عدد حقیقی a و b مجموع $a + b$ و $b + a$ با هم برابر اند یعنی:

$$a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b = b + a$$

3. موجودیت عنصر عینیت در جمع: در عملیه جمع عنصر عینیت عبارت از عدد صفر میباشد یعنی:

$$a + 0 = 0 + a = a \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

4. موجودیت عنصر معکوس در جمع: در عملیه جمع عنصر معکوس عبارت از عددی است که هرگاه با خود عدد جمع شود عنصر عینیت در عملیه جمع را بدهد یعنی:

$$a + (-a) = -a + a = 0 \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

از اینجا برای عدد صفر یک تعریف بدست می آید که صفر عبارت از عددیست که از حاصل جمع دو عدد یکسان اما مختلف علامه (اعداد متضاد) بدست می آید.

5. خاصیت اتحادی در عملیه جمع: برای سه عدد حقیقی a ، b و c داریم که:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$$

6. خاصیت بستگی در عملیه ضرب: حاصل ضرب دو عدد حقیقی a و b یعنی ab نیز یک عدد حقیقی است یعنی:

$$a, b \in \mathbb{R} \rightarrow ab \in \mathbb{R}$$

7. خاصیت تبدیلی در عملیه ضرب: حاصل ضرب هر جوره اعداد در اشکال حقیقی ab و ba با همدیگر برابر اند یعنی:

$$a, b \in R \rightarrow ab = ba$$

8. موجودیت عنصر عینیت در عملیه ضرب: در عملیه ضرب عدد یک عبارت از عنصر عینیت میباشد یعنی:

$$a \in R \rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

9. موجودیت عنصر معکوس در عملیه ضرب: در عملیه ضرب اعداد حقیقی عنصر معکوس عبارت از عددی میباشد که هر گاه با خود عدد ضرب گردد عنصر عینیت در عملیه ضرب را بدهد یعنی:

$$a \in R \quad a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$$

10. خاصیت اتحادی در عملیه ضرب: برای سه عدد حقیقی a ، b و c داریم که:

$$a(bc) = b(ac) = c(ab)$$

11. خاصیت توزیعی جمع بالای ضرب: برای سه عدد حقیقی a ، b و c داریم که:

$$c(a + b) = ac + bc$$

نوت: معلومات بیشتر و اضافه تراز این در باره اعداد حقیقی را در ست اعداد مطالعه خواهیم نمود.

اعداد متناظر (متضاد یا متقابل)

- ◀ اعداد متناظر عبارت از اعدادی اند که مقدار شان مساوی اما علامه های شان مختلف باشند.
- ◀ اعداد که از صفر به فاصله های مساوی به هردو طرف خط اعداد قرار داشته باشند.
- ◀ اعداد که حاصل جمع آنها صفر شود.
- ◀ اعداد که حاصل تقسیم شان منفی یک می گردد.
- ◀ اعداد که نتیجه مربع شدن شان نتیجه یکسان داشته باشد و یا به توان جفت دیگر دارای نتیجه یکسان باشند.
- ◀ اعداد که قیمت مطلقه های شان مساوی باشند.

1) $-4 + 4 = 0$

3) $-7 - 7 + 14 = 0$

2) $13 - 13 = 0$

4) $+5 - 5 = 0$

یاد داشت: عدد صفر، عدد متضاد ندارد.

فرق بین حساب و الجبر

- 1- در حساب با اعداد علامه در نظر گرفته نمیشود اما در الجبر علامه و عدد هردو ذکر میشود.
- 2- در حساب بیشتراً حروف استعمال نمیشود اما در الجبر تمام قوانین و فورمولهای الجبر از حروف ساخته شده است.
- 3- قواعد حساب بیشتراً تکمیل شده و از یاد نمیکند اما قوانین و فورمولهای الجبر با تخنیک روابط نا گسستی دارد پیشرفت تخنیک سبب زیادت قوانین الجبر میشود و کشفیات نوین در الجبر رخ میدهد.

4- حساب از حل سوالاتیکه عاجز مانده است آن را الجبر به آسانی حل می نمائید.

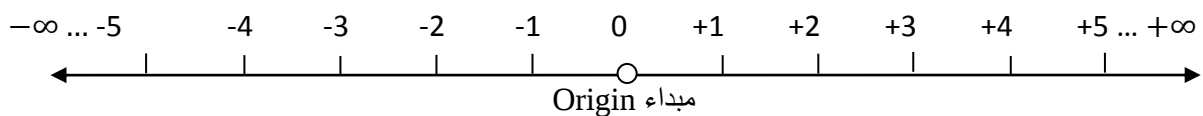
تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

محور اعداد

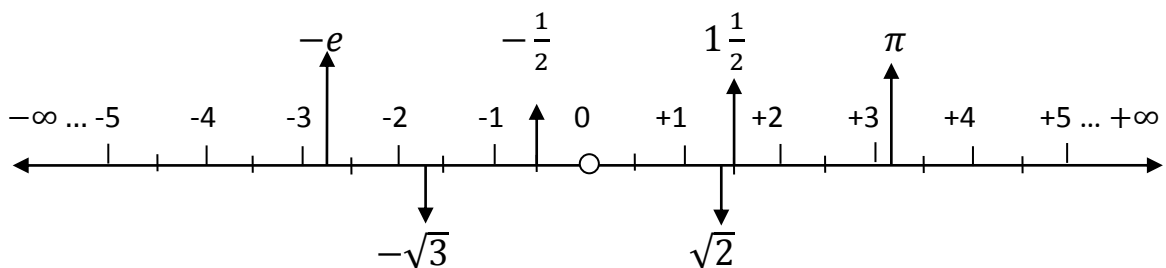
محور اعداد عبارت از قطعه خط جهت دار است که تمام اعداد در آن موجود است. محور اعداد عبارت از جوهره قطعه خط های جهت دار می باشد که دارای یک مبدا (صفر) می باشند.

خط اعداد متشکل از دو وکتور می باشد که از هر دو انجام تا به $+\infty$ و $-\infty$ ادامه دارد و دارای مبدا واحد (صفر) می باشد.

- در وسط محور عدد صفر قرار دارد که طرف راست آن اعداد مثبت که تا به مثبت لایتنای ادامه دارد و به طرف چپ آن اعداد منفی که تا به منفی لایتنای ادامه دارد، قرار دارد.
- هر قدر که به روی محور اعداد از طرف راست به چپ برویم عدد کوچک میشود. و هر قدر که از طرف چپ به طرف راست برویم عدد بزرگ میشود.
- فاصله بین دو عدد متوالی یا متعاقب (پی در پی) تعیین نشده اما یک واحد قبول شده است.
- فاصله بین دو عدد تام در روی خط اعداد به واحد های کوچک دیگر تا بی نهایت تقسیمات گردیده اند. یا به عباره دیگر فاصله بین دو عدد تام منفی یا مثبت دارای تقسیمات بی نهایت می باشد.



تعیین اعداد روی محور



تذکر مختصر:

- هر عددی که مخرج نداشت مخرج آن عدد یک است.
 - هر عددی که توان نداشت توان آن عدد یک است.
 - هر عددی که ضریب نداشت ضریب آن عدد یک است.
 - هر عددی که علامه نداشت علامه آن مثبت است.
- نوت: علامه یک عدد به طرف چپ آن نوشته میشود.
- هر جذریکه درجه نداشت درجه آن عدد دو است.

قیمت مطلقه اعداد

- هر عدد تام و متضاد آن به روی محور اعداد به فاصله های مساوی از صفر قرار داشته و دارای علامه های مختلف می باشند. این فاصله از مبدا را قیمت مطلقه نامیده اند.
- قیمت مطلقه یک عدد عبارت از خود همان عدد است بدون در نظر داشت علامه آن یعنی عدد ضرب علامش عبارت از قیمت مطلقه است.
- قیمت مطلقه یک عدد فاصله آن عدد را از مبدا (صفر) نشان میدهد.
- علامه قیمت مطلقه عبارت از دو خط موازی به شکل $| \quad |$ میباشد.
- به یاد داشته باشید که یک عدد معلوم و یا مجهول میتواند در سه شکل ظاهر گردد.
- عدد (3) سه واحد فاصله از صفر بدون جهت.
 - عدد (+3) سه واحد فاصله از صفر به طرف راست.
 - عدد (-3) سه واحد فاصله از صفر به طرف چپ.
- علامه یک عدد مفهوم نمایش گرافیکی آنرا نشان میدهد بناءً قیمت مطلقه فاصله عدد را از صفر نشان میدهد نه موقعیت عدد را.
- هر گاه از یک عدد مجهول مانند x قیمت مطلقه بگیریم در صورتیکه x بدون علامه فرض گردد یعنی خودش قیمت مطلقه باشد، سه حالت ذیل را دارا می باشد.

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ +x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

نوت: هیچ وقت قیمت مطلقه یک عدد کوچکتر از صفر بوده نه میتواند.

- | | |
|--|--|
| 1) $ -7 = 7$ | 7) $ -^2\sqrt{3} = ^2\sqrt{3}$ |
| 2) $ +7 = 7$ | 8) $ +\sqrt{2} = \sqrt{2}$ |
| 3) $ +7 - \sqrt{5} = 7 - \sqrt{5}$ | 9) $ \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5} - 2$ |
| 4) $ \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ | 10) $\left \frac{-7}{x^4}\right = \frac{ -7 }{ x^4 } = \frac{7}{x^4}$ |
| 5) $ -5x^2 = -5 x^2 = 5x^2$ | 11) $ \sqrt{5} + \sqrt{10} = \sqrt{5} + \sqrt{10}$ |
| 6) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{ x }{ y } \quad y \neq 0$ | 12) $ 0 = \boxed{0}$ |

مثالها:

- فاصله عدد +6 را از مبدا محور تعیین کنید.
 $d = |+6| = 6 \text{ unites}$
- فاصله عدد -6 را از مبدا محور تعیین کنید.
 $d = |-6| = 6 \text{ unites}$
- فاصله بین اعداد +1 و +5 را دریابید.
 $d = |+5| - |+1| = 4 \text{ unites}$
- فاصله بین اعداد -2 و -7 را دریابید.
 $d = |-7| - |-2| = 5 \text{ unites}$
- فاصله بین اعداد -3 و +4 را دریابید.
 $d = |+4| + |-3| = 7 \text{ unites}$

$$6) |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$$

$$8) |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$$

$$7) |1 - 4\pi| = 4\pi - 1$$

$$9) |10 - 3e| = 10 - 3e$$

(10) افاده $|1 - 2\pi| + |2 - 2\pi| + 3$ را ساده سازید.

حل:

$$|1 - 2\pi| + |2 - 2\pi| + 3 = 2\pi - 1 + 2\pi - 2 + 3 = \boxed{4\pi}$$

(11) افاده $|2 - \sqrt{7}| + |5 - 3\sqrt{7}| - 4\sqrt{7}$ را ساده نمائید.

حل:

$$|2 - \sqrt{7}| + |5 - 3\sqrt{7}| - 4\sqrt{7} = \sqrt{7} - 2 + 3\sqrt{7} - 5 - 4\sqrt{7} = \boxed{-7}$$

$$(12) |5 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{3}| = ?$$

حل:

$$|5 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{3}| = 5 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = \boxed{4}$$

• نباید فراموش کرد که قیمت مطلقه یک عدد و قیمت مطلقه عدد متضاد آن با هم مساوی اند.

$$\boxed{|-a| = |+a| = a}$$

$$|-7| = |+7| = 7$$

عملیات چهارگانه بالای اعداد علامه دار

جمع اعداد الجبری

در صورتیکه اعداد هم علامه باشند از علامه های مساوی یک علامه انتخاب نموده اعداد را با هم جمع مینمائیم و در صورتیکه اعداد مختلف علامه باشد اعداد را از هم دیگر تفریق نموده علامه مربوط به عددیست که قیمت مطلقه آن بزرگ باشد.

$$1) (+3) + (+4) = +7$$

$$7) (-12) + (-3) = -15$$

$$2) (-7) + (-6) = -13$$

$$8) (37) + (45) = 82$$

$$3) (-5) + (-3) = -8$$

$$9) (+5) + (-3) = +2$$

$$4) (-4) + (-6) = -10$$

$$10) (-4) + (-3) = -7$$

$$5) (+6) + (-2) = +4$$

$$11) (+3) + (-5) = -2$$

$$6) (-3) + (+7) + (-4) + (-9)$$

$$12) (+4) + (-6) + (-1)$$

$$-3 + 7 - 4 - 9 = -16 + 7 = -9$$

$$+4 - 6 - 1 = +4 - 7 = -3$$

تفریق اعداد الجبری

در عملیه تفریق اعداد الجبری علامه مفروق را تغیر داده بعداً به مانند عملیه جمع عمل مینمائیم.

- 1) $(+5) - (+7) = +5 - 7 = -2$
- 2) $(4) - (5) = +4 - 5 = -1$
- 3) $(7) - (-5) = +7 + 5 = +12$
- 4) $(-3) - (+9) = -3 - 9 = -12$
- 5) $(-4) + (-2) - (-9) = -4 - 2 + 9 = +3$
- 6) $(-12) - (-20) = -12 + 20 = +8$
- 7) $(+40) - (-10) - (+20)$
 $= +40 + 10 - 20 = +50 - 20 = +30$
- 8) $0 - 5 = -5$
- 9) $-3 - (-4 - 2) - (-3 - 6) = -3 - (-6) - (-9)$
 $-3 + 6 + 9 = +12$
- 10) $(-5 - 3) - (-4 - 6) = (-8) - (-10)$
 $= -8 + 10 = +2$

ضرب اعداد الجبری

در عملیه ضرب اعداد الجبری اولاً علامه ها را ضرب نموده و بعداً اعداد را با هم ضرب می نمائیم.

$$\begin{aligned} (+) \times (+) &= (+) \\ (-) \times (-) &= (+) \\ (+) \times (-) &= (-) \\ (-) \times (+) &= (-) \end{aligned}$$

نوت: میتوانیم که علامات را به آسانی ضرب نمائیم، فقط علامات منفی را شمار می نمائیم اگر تعداد آنها جفت باشد در اینصورت نتیجه حاصل ضرب مثبت است و اگر تعداد آنها طاق باشد در اینصورت نتیجه حاصل ضرب منفی است.

چونکه تعداد علامات منفی جفت است. $(+)(+)(-)(-)(-)(+)(-)(+)(-)(-) = +$

چونکه تعداد علامات منفی طاق است. $(-)(+)(-)(+)(-)(+)(-)(+)(+)(-) = -$

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| 1) $(+4)(+3) = +12$ | 5) $(+3)(-4) = -12$ |
| 2) $(-6)(-2) = +12$ | 6) $(-6)(+2) = -12$ |
| 3) $(-2)(+3) = -6$ | 7) $(-5)(+5) = -25$ |
| 4) $(+7)(+2)(-5)$
$= -70$ | 8) $(-1)(+3)(-2)(+6)$
$= +36$ |

ریاضی عمومی

الجبر مقدماتی

حالا میخواهیم ثابت کنیم که $(-)(-) = +$ میشود.

$$(-a)(-b) = +ab \text{ مطلوب}$$

$$(-a)(-b) = x \text{ مفروض}$$

1. ثابت به شکل عددی:

$$7 \cdot 8 = 56$$

$$(8 - 1)(9 - 1) = 56$$

$$72 - 8 - 9 (?)1 = 56$$

$$72 - 17 (?) 1 = 56$$

$$55 (?) 1 = 56$$

$$55 (+) 1 = 56$$

2. ثابت به شکل حروفی:

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(-b) = x$$

$$(-a)(-b) - ab + ab = x$$

$$-a(-b + b) + ab = x$$

$$-a(0) + ab = x$$

$$ab = x$$

$$(-a)(-b) = ab$$

تقسیم اعداد الجبری

در تقسیم اعداد الجبری اولاً علامه ها را تقسیم نموده بعداً اعداد را تقسیم می نمایم.

$$(+) \div (+) = (+)$$

$$(-) \div (-) = (+)$$

$$(+) \div (-) = (-)$$

$$(-) \div (+) = (-)$$

$$1) (+18) \div (+6) = +3$$

$$2) (-18) \div (+6) = -3$$

$$3) \frac{+30}{+10} = +3$$

$$4) \frac{-40}{+8} = -5$$

$$5) \frac{(-4) \times (-3)}{(-2) \times (-1)} = \frac{+12}{+2} = +6$$

$$6) \frac{(+6) \times (-5)}{(+2) \times (-15)} = \frac{-30}{-30} = +1$$

$$7) (+18) \div (-6) = -3$$

$$8) (-18) \div (-6) = +3$$

$$9) \frac{-12}{-4} = +3$$

$$10) \frac{+20}{-5} = -4$$

$$11) \frac{(+5) \times (-8)}{(-10) \times (+1)} = \frac{-40}{-10} = +4$$

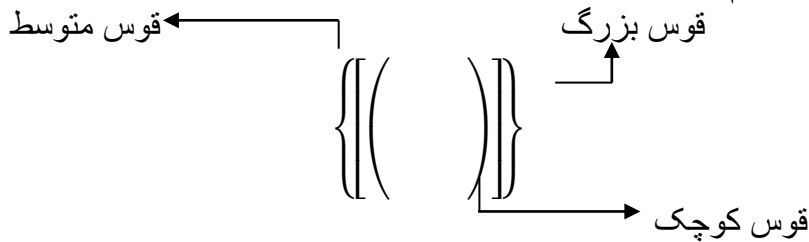
$$12) \frac{(+20) - (-10)}{(-5) - (+5)} = \frac{20+10}{-5-5} = \frac{+30}{-10} = -3$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

افاده های عددی

در محاسبات اکثراً چهار عملیه (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) به صورت همزمان و گاهی چند عملیه از آنها اتفاق می افتند، در چنین حالات به طور ذیل عمل می نماییم.

- 1) اگر در افاده های عددی طاقت و جذر وجود داشته باشد، اولاً آنرا ساده می سازیم.
- 2) اگر در افاده چهار عملیه طور همزمان بکار رفته باشد (در عدم موجودیت قوس ها) اول عملیه های تقسیم و ضرب بعداً عملیه های جمع و تفریق را از طرف چپ به طرف راست انجام می دهیم.
- 3) اگر در افاده از قوسها استفاده شده باشد نخست قوس کوچک، ثانیاً قوس متوسط و ثالثاً قوس بزرگ را رفع می سازیم.



5) در صورتیکه تمام علامات همنوع باشند به ترتیب از چپ به راست عملیه صورت می گیرد.
مثالها: افاده های ذیل را ساده سازی نمائید.

$$1) 2 + 2 \div 2 = ?$$

$$= 2 + 1 = \boxed{3}$$

$$5) 4 - 3 + 3 \times 5 \div 3 = ?$$

$$= 4 - 3 + 15 \div 3$$

$$= 4 - 3 + 5 = \boxed{6}$$

$$2) 3(2 + 4 \div 2) + 3 = ?$$

$$= 3(2 + 2) + 3$$

$$= 3 \cdot 4 + 3$$

$$= 12 + 3 = \boxed{15}$$

$$6) 5(40 + 32 - 11 \times 2) = ?$$

$$= 5(40 + 32 - 22)$$

$$= 5(40 + 10)$$

$$= 5 \cdot 50 = \boxed{250}$$

$$3) 80 \div 10 \div 2 = ?$$

$$= 8 \div 2 = \boxed{4}$$

$$4) (-6 \times 4) \times 2^3 - 5 + \sqrt{49} \div 7 - 10 = ?$$

$$-24 \times 8 - 5 + 7 \div 7 - 10$$

$$-192 - 5 + 1 - 10$$

$$-207 + 1 = \boxed{-206}$$

طاقت (Power)

هر گاه یک عدد چندین مرتبه در خودش ضرب شود آنرا میتوان به شکل ساده نوشت، که این عملیه عبارت از طاقت است.

$$\text{مانند: } 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

که در اینجا عدد (2) را قاعده، اساس، تهداب، پایه یا (Base) و عدد (5) را توان، نما، درجه (Exponent) و مکمل 2^5 را طاقت، قدرت (Power) گویند.
و آنرا چنین میخوانیم که 2 به توان 5 یا 2 به نمای 5.

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

نوت: هر عددی که توان نداشته باشد توان آن یک است.

$$5 = 5^1, \quad 6 = 6^1, \quad a = a^1$$

ارایه به طاقت

- 1) $a \cdot a = a^2$
- 2) $a \cdot a \cdot a = a^3$
- 3) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$
- 4) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$
- 5) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^6$
- 6) $\left(\frac{4}{2}\right) \left(\frac{6}{3}\right) \left(\frac{8}{4}\right) \left(\frac{10}{5}\right) \left(\frac{20}{10}\right) \left(\frac{28}{14}\right) \left(\frac{36}{18}\right) = ?$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$
- 7) $\left(\frac{6}{2}\right) \left(\frac{9}{3}\right) \left(\frac{12}{4}\right) \left(\frac{27}{9}\right) \left(\frac{36}{12}\right) \left(\frac{300}{100}\right) \cdot 3 \cdot 3 = ?$
 $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8$
- 8) $\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{6}\right) \left(\frac{5}{10}\right) \left(\frac{7}{14}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$
- 9) $\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4$
- 10) $\left(5\frac{2}{3}\right) \cdot \left(5\frac{2}{3}\right) \cdot \left(5\frac{2}{3}\right) = \left(5\frac{2}{3}\right)^3$

ساده سازی طاقت

اگر داشته باشیم که a^n این به این مفهوم است که an , دفعه در خودش ضرب شود.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ دفعه}} \quad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \text{ درست}$$

$$a^n \neq a \cdot n \quad 2^4 \neq 2 \cdot 4 = 8$$

مثالها:

1. $(3)^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
2. $(3)^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
3. $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
4. $-6^2 = -(6)(6) = -36$
5. $(-6)^2 = (-6)(-6) = +36$
6. $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = +81$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مربع بعضی از اعداد ذیل را به حافظه بسپارید.

1) $0^2 = 0$	11) $10^2 = 100$	21) $20^2 = 400$
2) $1^2 = 1$	12) $11^2 = 121$	22) $25^2 = 625$
3) $2^2 = 4$	13) $12^2 = 144$	23) $30^2 = 900$
4) $3^2 = 9$	14) $13^2 = 169$	24) $40^2 = 1600$
5) $4^2 = 16$	15) $14^2 = 196$	25) $50^2 = 2500$
6) $5^2 = 25$	16) $15^2 = 225$	26) $60^2 = 3600$
7) $6^2 = 36$	17) $16^2 = 256$	27) $70^2 = 4900$
8) $7^2 = 49$	18) $17^2 = 289$	28) $80^2 = 6400$
9) $8^2 = 64$	19) $18^2 = 324$	29) $90^2 = 8100$
10) $9^2 = 81$	20) $19^2 = 361$	30) $100^2 = 10000$

نوت: میتوانیم که یک عدد کامل را با استفاده از تجزیه به طاقت تبدیل کنیم.
مثلاً: میخواهیم که اعداد 40 و 360 را با استفاده از تجزیه به طاقت تبدیل نمائیم.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 40 \\ \hline 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \Rightarrow 2^3 \cdot 5 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \Rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

قوانین طاقت (Laws Of Power)

قانون اول: هر گاه در حالت ضرب قاعده ها مساوی و توانها مختلف باشند، از قاعده های مساوی یک قاعده و توانها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- $a \cdot a = a^{1+1} = a^2$
- $a \cdot a \cdot a = a^{1+1+1} = a^3$
- $7^5 \cdot 7^{-8} \cdot 7^{+12} = 7^{5+(-8)+12} = 7^{5-8+12} = 7^{+9}$
- $2^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+1+1+3+5} = 2^{13}$
- $3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^6 \cdot 3^2 = 3^{4+3+6+2} = 3^{15}$
- $5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1} = 5^{\frac{3+1+2}{2}} = 5^{\frac{6}{2}} = 5^3$

Proof: $2^4 \cdot 2^3 = 2^7$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$$

یاد داشت 1: بخاطر بسپارید که اگر دو حرف یکسان مثلاً a و a با هم به حالت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم باشند داریم که:

$$1) \boxed{a + a = 2a}$$

$$3) \boxed{a \cdot a = a^2}$$

$$2) \boxed{a - a = 0}$$

$$4) \boxed{a \div a = 1}$$

یاد داشت 2: اگر اعداد توان دار در حالت جمع و تفریق قرار داشته باشند در این صورت ابتدا توان را رفع نموده سپس با هم جمع و یا تفریق نمائید.

$$1) 3^2 + 5^4 = 9 + 625 = 634$$

$$2) 2^4 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

$$3) 5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133$$

$$4) 4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$$

$$5) 7^3 - 2^4 = 343 - 16 = 327$$

قانون دوم: هر گاه در حالت ضرب قاعده ها مختلف و توانها مساوی باشد، از توان های مساوی یک توان و قاعده ها را در بین خود ضرب می نمائیم.

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

$$1) 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$$

$$2) 3^4 \cdot 2^4 \cdot 4^4 \cdot 6^4 = (3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6)^4 = 144^4$$

$$3) 2^5 \cdot 3^5 \cdot 7^5 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^5 = 42^5$$

$$\text{Proof: } 3^4 \cdot 2^4 = (3 \cdot 2)^4 = 6^4$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$$

قانون سوم: هرگاه در حالت ضرب قاعده ها و توان ها هر دو مختلف باشد هر قاعده را به توان آن رفع نموده با هم ضرب می نمائیم.

$$\boxed{a^n \cdot b^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{n \text{ مرتبه}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \dots b)}_{m \text{ مرتبه}}}$$

$$1) 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 4^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{64}{32} = 2$$

$$3) 3^4 \cdot 5^3 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} = 45$$

قانون چهارم: در حالت تقسیم اگر قاعده ها مساوی و توانها مختلف باشند، از قاعده های مساوی یک قاعده و از توان صورت توان مخرج را تفریق می نمائیم.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}}$$

$$1) \frac{2^{15}}{2^8} = 2^{15-8} = 2^7$$

$$5) \frac{3^{-7}}{3^5} = 3^{-7-(5)} = 3^{-12}$$

$$2) \frac{5^4}{5^7} = 5^{4-7} = 5^{-3}$$

$$6) \frac{13^{-7}}{13^{-4}} = 13^{-7-(-4)} = 13^{-3}$$

$$3) \frac{6^5}{6^{-4}} = 6^{5-(-4)} = 6^9$$

$$7) \frac{2^{10} \cdot 2^8}{2^{16}} = \frac{2^{18}}{2^{16}} = 2^{18-16} = 2^2 = 4$$

$$4) \frac{2^{-5}}{2^{-8}} = 2^{-5-(-8)} = 2^3$$

$$8) \frac{3^{23} \cdot 5^{14}}{3^{21} \cdot 5^{13}} = 3^{23-21} \cdot 5^{14-13}$$

$$3^2 \cdot 5 = 45$$

Proof: $\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$

$$\frac{5^7}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5}} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

قانون پنجم: در حالت تقسیم اگر قاعده ها مختلف و توانها مساوی باشند، از توان های مساوی یک توان و قاعده ها را تقسیم می نماییم.

$$\boxed{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

$$1) \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$3) \frac{2^4}{4^4} = \left(\frac{2}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$2) \frac{12^6}{4^6} = \left(\frac{12}{4}\right)^6 = 3^6$$

$$4) \frac{(-40)^5}{(-8)^5} = \left(\frac{-40}{-8}\right)^5 = 5^5$$

Proof: $\frac{7^6}{3^6} = \left(\frac{7}{3}\right)^6$

$$\frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \left(\frac{7}{3}\right) \left(\frac{7}{3}\right) \left(\frac{7}{3}\right) \left(\frac{7}{3}\right) \left(\frac{7}{3}\right) \left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)^6$$

قانون ششم: در حالت تقسیم هرگاه قاعده ها و توان ها هر دو مختلف باشد هر قاعده را به توان آن رفع نموده و بعداً تقسیم می نماییم.

$$\boxed{\frac{a^n}{b^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{n \text{ مرتبه}}}{\underbrace{(b \cdot b \cdot b \dots b)}_{m \text{ مرتبه}}}}$$

$$1) \frac{3^2}{2^5} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{9}{32}$$

$$2) \frac{10^3}{5^4} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1000}{625} = \frac{8}{5}$$

$$3) \frac{13^2}{6^3} = \frac{13 \cdot 13}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{169}{216}$$

یاد داشت: اگر دو افاده دارای قاعده ها و توان های مساوی با هم در حالت تقسیم قرار داشته باشند، حاصل تقسیم آنها (1) میشود.

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

$$1) \frac{5^4}{5^4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 1 \quad 2) \frac{3^3}{3^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 1$$

قانون هفتم: هر عدد به توان صفر مساوی به یک است.

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0, \quad a \neq \infty$$

$$\begin{array}{ll} 1) 1^0 = 1 & 4) (0.0004)^0 = 1 \\ 2) (-4)^0 = 1 & 5) \left(\frac{23}{12}\right)^0 = 1 \\ 3) \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 & 6) (-8 + 2 \times 4 \div 5)^0 = 1 \end{array}$$

ثبوت: (به شکل عددی) عدد (2) را به اختیار خود یک توان میدهم این عدد طاقت دار را یک دفعه بر خودش تقسیم می نمائیم و دفعه دوم قوانین طاقت را بالایش تطبیق می نمائیم.

$$\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{32}{32} = 1$$

$$\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$$

چونکه یک طرف مساوات با هم مساوی است پس دیگه طرف آن نیز باهم مساوی است یعنی:

$$2^0 = 1$$

ثبوت: (به شکل حروفی):

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{a^n}{a^n} = \left(\frac{a}{a}\right)^n = 1^n = 1 \dots\dots\dots (2)$$

از مقایسه روابطه اول و دوم چنین نتیجه بدست میآید که $a^0 = 1$ است.

یاد داشت: صفر به توان هر عدد مساوی به خود صفر است.

$$0^n, \quad n \neq 0, \quad n \neq \infty$$

$$\begin{array}{lll} 1) 0^{0.38} = 0 & 3) 0^{\sqrt{5}} = 0 & 5) 0^{\frac{3}{4}} = 0 \\ 2) 0^{0.\bar{9}} = 0 & 4) 0^{35} = 0 & 6) 0^{472} = 0 \end{array}$$

قانون هشتم: عدد یک به توان هر عدد مساوی به یک است.

$$1^n = 1, \quad n \neq \infty$$

$$\begin{array}{lll} 1) 1^3 = 1 & 3) 1^{0.38} = 1 & 5) 1^{\sqrt{5}} = 1 \\ 2) 1^0 = 1 & 4) 1^{0.\bar{9}} = 1 & 6) 1^{35} = 1 \end{array}$$

قانون هشتم: هر عدد به توان منفی معکوس آن به همان توان مثبت است و هر عدد به توان مثبت معکوس آن به همان توان منفی است.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{+n}}, \quad a^{+n} = \frac{1}{a^{-n}}$$

1) $4^{-5} = \frac{1}{4^{+5}}$

3) $3^{-2} = \frac{1}{3^{+2}}$

5) $6^{-4} = \frac{1}{6^{+4}}$

2) $4^{+5} = \frac{1}{4^{-5}}$

4) $3^{+2} = \frac{1}{3^{-2}}$

6) $6^{+4} = \frac{1}{6^{-4}}$

Proof: $a^{-n} = a^{0-n}$

$$a^n = a^{0+n}$$

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^{+n}} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^{+n}}$$

$$a^n = a^{0-(-n)}$$

$$a^n = \frac{a^0}{a^{-n}} \Rightarrow a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

قانون نهم: اعداد منفی به توان عدد طاق مساوی میشود به منفی همان عدد به توان طاق و عدد منفی به توان عدد جفت مساوی میشود به مثبت همان عدد به توان جفت.

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}, \quad (-a)^{2n} = a^{2n}$$

1) $(-5)^3 = -(5^3)$

3) $(-2)^9 = -(2^9)$

5) $(-3)^{29} = -(3^{29})$

2) $(-5)^4 = 5^4$

4) $(-2)^6 = 2^6$

6) $(-3)^{16} = 3^{16}$

قانون دهم: اعداد مثبت به توان جفت و طاق هر دو مثبت است.

$$(a)^{2n} = a^{2n}, \quad (a)^{2n-1} = a^{2n-1}$$

1) $(+5)^3 = 5^3$

3) $(+2)^9 = 2^9$

5) $(+3)^{29} = 3^{29}$

2) $(+5)^4 = 5^4$

4) $(+2)^6 = 2^6$

6) $(+3)^{16} = 3^{16}$

قانون یازدهم: هرگاه توان از توان تشکیل شده باشد (در صورتیکه قوس داشته باشد) توانها با هم ضرب میگردند و به توان همان قاعده نوشته میشود.

$$((a^m)^t)^n = a^{mtn}$$

1) $((((3)^2)^3)^2 = 3^{12}$

4) $\left(13^{\frac{15}{8}}\right)^{-\frac{8}{3}} = 13^{-5}$

2) $((7)^5)^3 = 7^{15}$

5) $\left(6^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{5}{7}} = 6^{\frac{15}{14}}$

3) $((5^{-2})^{-3})^{-1} = 5^{-6}$

6) $(19^{0.3})^{0.2} = 19^{0.06}$

قانون دوازدهم: هر گاه توان از توان تشکیل شده باشد (در صورتیکه قوس نه داشته باشد) به شکل ذیل عمل می نمایم.

$$1) \quad 2^{3^{2^1 3^4}} = 2^{3^{2^1 3^4}} = 2^{3^{2^1 81}} = 2^{3^{2^1}} = 2^{3^2} = 2^9 = \boxed{512}$$

$$2) \quad 3^{4^{2^1 3^0}} = 3^{4^{2^1}} = 3^{4^{2^1}} = 3^{4^2} = \boxed{3^{16}}$$

قانون سیزدهم: هر عددی که از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت منتقل شود علامه توان آن تغییر مینماید.

$$\boxed{\frac{a^m}{b^n} = \frac{b^{-n}}{a^{-m}}} \quad , \quad \boxed{\frac{a^{+m}}{b^{-n}} = a^{+m} \cdot b^{+n}}$$

$$1) \quad \frac{4^3}{3^5} = \frac{3^{-5}}{4^{-3}}$$

$$3) \quad \frac{-2^{-4}}{(-3)^{-5}} = \frac{(-3)^{+5}}{-2^{+4}}$$

$$2) \quad \frac{5^{+6}}{3^{-8}} = 5^{+6} \cdot 3^{+8}$$

$$4) \quad \frac{1}{7^{+9}} = 7^{-9}$$

قانون چهاردهم: (مشترک گیری در طاقت)

$$\boxed{pa^n + qa^n + ra^m - sa^m + ta^m = (p + q)a^n + (r - s + t)a^m}$$

$$1) \quad 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^3 = (4 + 5 - 7) \cdot 3^3 = \boxed{2 \cdot 3^3}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 2^{23} - 2^{24} + 2^{25} - 2^{26} \\ & = 2^{23} - 2 \cdot 2^{23} + 2^2 \cdot 2^{23} - 2^3 \cdot 2^{23} \\ & = (1 - 2 + 2^2 - 2^3) \cdot 2^{23} = (1 - 2 + 4 - 8) \cdot 2^{23} = \boxed{-5 \cdot 2^{23}} \end{aligned}$$

یاد داشت:

- | | |
|----------------------|------|
| 1. $(+2)^4 = (-2)^4$ | درست |
| 2. $(-2)^4 = -(2)^4$ | غلط |
| 3. $(-2)^5 = -(2)^5$ | درست |
| 4. $(2)^5 = -(-2)^5$ | درست |
| 5. $(2)^4 = -(-2)^4$ | غلط |

تذکر مختصر:

صفر به توان صفر یک شکل مبهم است. (تا به حال تعریف نه گردیده است) مبهم $0^0 =$

صفر به توان لایتنهای معنی مبهم را ارایه می کند. مبهم $0^\infty =$

لایتنهای به توان صفر نیز یک شکل مبهم است. مبهم $\infty^0 =$

لایتنهای به توان لایتنهای شکل مبهم را دارا است. مبهم $\infty^\infty =$

یک به توان لایتنهای نیز مبهم است. مبهم $1^\infty =$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

ارایه علمی اعداد (Scientific Notation) (روش علمی عدد نویسی)

بعضی اوقات هنگام محاسبات اعداد بسیار بزرگ (اعداد نجومی) و اعداد بسیار کوچک (اعداد مستوی) برمی خوریم که خواندن و نوشتن آن تا حدی مشکل می باشد جهت ساده نوشتن اعداد از ارایه علمی استفاده نموده و اعداد را به شکل $(a \cdot 10^z)$ درمی آوریم که درین صورت $1 \leq a < 10$ و z یک عدد تام است.

مثالها:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) $100 = 1 \cdot 10^2 = 10^2$ | 11) $2000000 = 2 \cdot 10^6$ |
| 2) $720000000 = 7.2 \cdot 10^8$ | 12) $0.00015 = 1.5 \cdot 10^{-4}$ |
| 3) $732164 = 7.32164 \cdot 10^5$ | 13) $0.0000000978 = 9.78 \cdot 10^{-8}$ |
| 4) $5.7 = 5.7 \cdot 10^0$ | 14) $30000000000 = 3 \cdot 10^{10}$ |
| 5) $345000000 = 3.45 \cdot 10^8$ | 15) $14600000000 = 1.46 \cdot 10^{10}$ |
| 6) $0.0000001 = 10^{-7}$ | 16) $200 = 2 \cdot 10^2$ |
| 7) $2007.0023 = 2.0070023 \cdot 10^3$ | 17) $0.00000021 = 2.1 \cdot 10^{-7}$ |
| 8) $0.00000045 = 4.5 \cdot 10^{-7}$ | 18) $298000000 = 2.98 \cdot 10^8$ |
| 9) $3000000 = 3 \cdot 10^6$ | 19) $1000000000 = 1 \cdot 10^9 = 10^9$ |
| 10) $0.00001 = 10^{-5}$ | 20) $80000000000 = 8 \cdot 10^{10}$ |

از مثالهای فوق چنین نتیجه میشود که هرگاه خانه اعشاری از طرف راست به چپ برود توان بزرگتر و از چپ به راست توان کوچکتر میشود.

در حقیقت هر عدد ثابت اعشاری بوده چون در پیش روی اعشاریه عدد مذکور تا بی نهایت صفر ها قرار دارد. اعشاریه آن حذف میشود.

$$5, = 5,000\ 000 = 5 \qquad 6, = 6,000\ 000\ 000\ 0 = 6$$

هر قدر اعشاریه یک عدد را از راست به چپ انتقال بدهیم عدد مذکور را درین زمان ضرب 10 به نمای یک عدد مثبت (عدد مثبت باید تعداد خانه های انتقال یافته را نشان بدهد) می نمایم.

و برعکس هر قدر علامه اعشاریه از چپ به راست عدد انتقال داده شود، عدد مذکور در عین زمان ضرب 10 به نمای یک عدد منفی (عدد منفی باید به تعداد انتقال خانه های اعشاری را نشان بدهد) می نمایم.

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مسائل تطبیقی طاقت

(1) حاصل افاده $9^4 \cdot 81^5 \cdot 243^7$ عبارت است از:

حل:

$$9^4 \cdot 81^5 \cdot 243^7 = (3^2)^4 \cdot (3^4)^5 \cdot (3^5)^7 \\ = 3^8 \cdot 3^{20} \cdot 3^{35} = 3^{8+20+35} = \boxed{3^{63}}$$

$$\frac{(-2)^{13}-2^{14}}{2^{13}}=? \quad (2)$$

حل:

$$\frac{(-2)^{13}-2^{14}}{2^{13}} = \frac{-2^{13}-2^{14}}{2^{13}} = \frac{2^{13}(-1-2)}{2^{13}} = \boxed{-3}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (-2)^2}{(-2^2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2}=? \quad (3)$$

حل:

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (-2)^2}{(-2^2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{27} \cdot 4}{-4 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{9}{1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{(-2)^3+(-2^2)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{2^{-3}}}=? \quad (4)$$

حل:

$$\frac{(-2)^3+(-2^2)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{2^{-3}}} = \frac{-8+(-4)}{2^2+2^3} = \frac{-8-4}{4+8} = \frac{-12}{12} = \boxed{-1}$$

$$\frac{(-2)^{-2}-3^{-1}+2^{-2}}{6^{-2}}=? \quad (5)$$

حل:

$$\frac{(-2)^{-2}-3^{-1}+2^{-2}}{6^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}}{\frac{1}{6^2}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{36}} = \frac{\frac{3-4+3}{12}}{\frac{1}{36}} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{36}} = \frac{2}{12} \cdot \frac{36}{1} = \boxed{6}$$

$$\frac{[(-2)^{-2}]^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-1}}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2}=? \quad (6)$$

حل:

$$\frac{[(-2)^{-2}]^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-1}}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2} = \frac{(-2)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-(-2)} = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$(-2^2) + (-5)^2 + (-5^2) + (-5^2) - (-2)^3 = ? \quad (7)$$

حل:

$$(-2^2) + (-5)^2 + (-5^2) - (-2)^3$$

$$= -4 + 25 - 25 + 8 = \boxed{4}$$

$$\frac{(-2)^3 \cdot (-3)^{-2}}{-3^{-2}} = ? \quad (8)$$

حل:

$$\frac{(-2)^3 \cdot (-3)^{-2}}{-3^{-2}} = \frac{-8 \cdot \frac{1}{9}}{-\frac{1}{3^2}} = \frac{-\frac{8}{9}}{-\frac{1}{9}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{1} = \boxed{8}$$

$$\left[(2^{-1} + 3^{-1})^{-1} + \left(\frac{5}{4} \right)^{-1} \right]^{-2} = ? \quad (9)$$

حل:

$$\left[(2^{-1} + 3^{-1})^{-1} + \left(\frac{5}{4} \right)^{-1} \right]^{-2} = \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)^{-1} + \frac{4}{5} \right]^{-2} = \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{-1} + \frac{4}{5} \right]^{-2}$$

$$= \left(\frac{6}{5} + \frac{4}{5} \right)^{-2} = \left(\frac{10}{5} \right)^{-2} = \left(\frac{5}{10} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2} \right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{-3}}{\left(-\frac{1}{3} \right)^2 - \left(-\frac{1}{3} \right)^3} = ? \quad (10)$$

حل:

$$\frac{\left(-\frac{1}{2} \right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{-3}}{\left(-\frac{1}{3} \right)^2 - \left(-\frac{1}{3} \right)^3} = \frac{(-2)^2 + (-2)^3}{\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{27} \right)} = \frac{4 + (-8)}{\frac{1}{9} + \frac{1}{27}} = \frac{-4}{\frac{4}{27}} = -27$$

$$\frac{10^8 - 10^6}{5^8 - 5^6} = ? \quad (11)$$

حل:

$$\frac{10^8 - 10^6}{5^8 - 5^6} = \frac{10^6(10^2 - 1)}{5^6(5^2 - 1)} = \frac{2^6 \cdot 5^6 \cdot 99}{5^6 \cdot 24} = 64 \cdot \frac{99}{24} = \boxed{264}$$

$$\frac{(-2^{-1})^4 \cdot (-2)^{-5} \cdot (-2^2)}{(-2)^{-1} \cdot (-2)^{-6}} = ? \quad (12)$$

حل:

$$\frac{(-2^{-1})^4 \cdot (-2)^{-5} \cdot (-2^2)}{(-2)^{-1} \cdot (-2)^{-6}} = \frac{2^{-4} \cdot (-2^{-5}) \cdot (-2^2)}{-2^{-1} \cdot 2^{-6}} = -\frac{2^{-4} \cdot 2^{-5} \cdot 2^2}{2^{-1} \cdot 2^{-6}} = -\frac{2^{-7}}{2^{-7}} = \boxed{-1}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} - \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} \right]^{-1} = ? \quad (13)$$

حل:

$$\left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} - \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} \right]^{-1} = \left[2 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^{-1} = \left(2 - \frac{4}{9} \right)^{-1} = \left(\frac{14}{9} \right)^{-1} = \boxed{\frac{9}{14}}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^{-3} - (3^2)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = ? \quad (14)$$

حل:

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^{-3} + (3^2)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{-2^3 \cdot 2^{-3} - 9}{-\frac{1}{8}} = \frac{-1+9}{-\frac{1}{8}} = \frac{8}{-\frac{1}{8}} = \boxed{-64}$$

$$-(3)^2 + (-2)^3 + (-4)^2 = ? \quad (15)$$

حل:

$$\begin{aligned} & -(3)^2 + (-2)^3 + (-4)^2 \\ & -9 + (-8) + 16 \\ & -9 - 8 + 16 = \boxed{-1} \end{aligned}$$

$$\frac{3^6}{3^{-4}} \cdot \frac{3^{-7}}{3^{-10}} \cdot \frac{3^{-4}}{3^5} = ? \quad (16)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{3^6}{3^{-4}} \cdot \frac{3^{-7}}{3^{-10}} \cdot \frac{3^{-4}}{3^5} &= 3^{6-(-4)} \cdot 3^{-7-(-10)} \cdot 3^{-4-5} \\ &\Rightarrow 3^{6+4} \cdot 3^{-7+10} \cdot 3^{-9} = 3^4 = \boxed{81} \end{aligned}$$

$$(4^{a+1} - 2^{2a}) : (3 \cdot 2^{3a}) = ? \quad (17)$$

حل:

$$\begin{aligned} (4^{a+1} - 2^{2a}) : (3 \cdot 2^{3a}) &= (4 \cdot 4^a - 2^{2a}) : (3 \cdot 2^{3a}) \\ (4 \cdot 2^{2a} - 2^{2a}) : (3 \cdot 2^{3a}) &= 3 \cdot 2^{2a} : 3 \cdot 2^{3a} = \boxed{2^{-a}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{4x^a}{x^{b+1}}\right)^2 \left(\frac{x^b}{2x^{a-1}}\right)^2 = ? \quad (18)$$

حل:

$$\left(\frac{4x^a}{x^{b+1}}\right)^2 \left(\frac{x^b}{2x^{a-1}}\right)^2 = \left(\frac{4x^a}{x^{b \cdot x}} \cdot \frac{x^b}{2x^{a \cdot x^{-1}}}\right)^2 = \left(\frac{2}{x \cdot x^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{2}{x^{1-1}}\right)^2 = 2^2 = \boxed{4}$$

$$2^{13} + 2^{13} + 2^{13} + 2^{13} = ? \quad (19)$$

حل:

$$2^{13} + 2^{13} + 2^{13} + 2^{13} = 4 \cdot 2^{13} = 2^2 \cdot 2^{13} = \boxed{2^{15}}$$

$$\frac{3^{80} - 3^{78} + 3^{77}}{3^{80} + 3^{78} - 3^{77}} = ? \quad (20)$$

حل:

$$\frac{3^{80} - 3^{78} + 3^{77}}{3^{80} + 3^{78} - 3^{77}} = \frac{3^{77}(3^3 - 3 + 1)}{3^{77}(3^3 + 3 - 1)} = \frac{27 - 3 + 1}{27 + 3 - 1} = \boxed{\frac{25}{29}}$$

جذر (Radical, Root)

- جذر در لغت ریشه را گویند و در اصطلاح علم ریاضی جذر یک عدد عبارت از عددیست که هرگاه به درجه جذر رفع گردد مجذور را بدهد.
- جذر در لغت به معنی پائین آوردن است و در اصطلاح الجبر عدد حاصله به توان درجه جذر بلند بردن و مجذور را حاصل کردن است.
- جذر حالت خصوصی اعداد توان دار بوده، یعنی حالتی که توان عدد کسری باشد، به نام جذر تعریف شده است.

$$b^m \sqrt[n]{a}$$

مجزور ← توان ← قاعده ←

درجه جذر (جذر نما) ← ضریب جذر ←

به اساس این تعریف تمام جذور به درجه های مختلف را تعریف نموده میتوانیم.

جذر دوم یک عدد (جذر مربع): عبارت از عددی است که هرگاه به درجه 2 رفع گردد مجذور را بدهد.

$$\sqrt{a} = b \Rightarrow a = b^2$$

$$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10 \Rightarrow 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

جذر سوم یک عدد (جذر مکعب): عبارت از عددی است که هرگاه به درجه 3 رفع گردد مجذور را بدهد.

$$\sqrt[3]{a} = b \Rightarrow a = b^3$$

$$\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10 \Rightarrow 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

جذر چهارم یک عدد: عبارت از عددی است که هرگاه به درجه 4 رفع گردد مجذور بدهد.

$$\sqrt[4]{a} = b \Rightarrow a = b^4$$

$$\sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10 \Rightarrow 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

جذر n ام یک عدد: عبارت از عددی دیگر مانند b است که هرگاه به درجه n رفع شود مجذور را بدهد.

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow a = b^n$$

نمایش جذور: اعدادیکه تحت جذر قرار دارند به سه طریقه نمایش داده میشوند.

مثال: جذر پنجم عدد 7 را به اشکال ذیل نمایش داده میتوانیم:

طریقه اول: $\sqrt[5]{7}$ طریقه دوم: $7^{1/5}$ طریقه سوم: $7^{0.2}$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

چند نکته مهم در باره جذر:

- (1) هر جذریکه درجه نداشت درجه آن دو است. $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$
- (2) میتوانیم که توان مجذور را با درجه جذر اختصار نمائیم. $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt[2]{2}$
- (3) هرگاه در اختصار توان مجذور با درجه جذر، درجه جذر یک شود علامه جذر از بین میرود. $\sqrt[9]{3^9} = 3$
- (4) هرگاه $\sqrt[n]{a}$ داشته باشیم شرط درجه جذر آن قرار ذیل است:
 $n \in \mathbb{Z}^+ , n \geq 2$

دریافت جذر المربع اعداد مربع کامل با استفاده از تجزیه

مثال اول: جذر مربع عدد 400 را دریابید.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 400 \\ \hline 2 & 200 \\ \hline 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$400 = 2^4 \cdot 5^2$$

$$\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 5 = \boxed{20}$$

مثال دوم: جذر مربع عدد 900 را دریابید.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 900 \\ \hline 2 & 450 \\ \hline 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\sqrt{900} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \boxed{30}$$

جذر المربع کامل اعداد ذیل را به حافظه بسپارید:

- | | | |
|------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{0} = 0$ | 9) $\sqrt{64} = \pm 8$ | 17) $\sqrt{256} = \pm 16$ |
| 2) $\sqrt{1} = \pm 1$ | 10) $\sqrt{81} = \pm 9$ | 18) $\sqrt{289} = \pm 17$ |
| 3) $\sqrt{4} = \pm 2$ | 11) $\sqrt{100} = \pm 10$ | 19) $\sqrt{324} = \pm 18$ |
| 4) $\sqrt{9} = \pm 3$ | 12) $\sqrt{121} = \pm 11$ | 20) $\sqrt{361} = \pm 19$ |
| 5) $\sqrt{16} = \pm 4$ | 13) $\sqrt{144} = \pm 12$ | 21) $\sqrt{400} = \pm 20$ |
| 6) $\sqrt{25} = \pm 5$ | 14) $\sqrt{169} = \pm 13$ | 22) $\sqrt{625} = \pm 25$ |
| 7) $\sqrt{36} = \pm 6$ | 15) $\sqrt{196} = \pm 14$ | 23) $\sqrt{900} = \pm 30$ |
| 8) $\sqrt{49} = \pm 7$ | 16) $\sqrt{225} = \pm 15$ | 24) $\sqrt{1600} = \pm 40$ |

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

دریافت جذر مکعب اعداد مکعب کامل با استفاده از تجزیه

مثال اول: جذر مکعب عدد 216 را دریابید.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 216 \\ 2 & 108 \\ 2 & 54 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$216 = 2^3 \cdot 3^3$$

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$$

مثال دوم: جذر $\sqrt[3]{8000}$ را دریابید.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8000 \\ 2 & 4000 \\ 2 & 2000 \\ 2 & 1000 \\ 2 & 500 \\ 2 & 250 \\ 5 & 125 \\ 5 & 25 \\ 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$8000 = 2^6 \cdot 5^3$$

$$\sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5 = \boxed{20}$$

جذر مکعب اعداد ذیل را به حافظه بسپارید:

1) $\sqrt[3]{0} = 0$

5) $\sqrt[3]{64} = 4$

9) $\sqrt[3]{512} = 8$

2) $\sqrt[3]{1} = 1$

6) $\sqrt[3]{125} = 5$

10) $\sqrt[3]{729} = 9$

3) $\sqrt[3]{8} = 2$

7) $\sqrt[3]{216} = 6$

11) $\sqrt[3]{1000} = 10$

4) $\sqrt[3]{27} = 3$

8) $\sqrt[3]{343} = 7$

12) $\sqrt[3]{8000} = 20$

استخراج جذر n ام یک عدد

هرگاه بخواهیم جذر n ام یک عدد را دریافت نمائیم از رابطه ذیل استفاده می نمائیم.

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} = \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n \sqrt[n]{(x)^{n-1}}}$$

مثال اول: دریافت $\sqrt[3]{11}$ مطلوب میباشد.

میدانیم که

$$\sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{8+3} = \sqrt[3]{8} + \frac{3}{3 \sqrt[3]{(8)^2}}$$

$$2 + \frac{3}{\sqrt[3]{(2^3)^2}} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = \boxed{2,25}$$

مثال دوم: دریافت $\sqrt[3]{70}$ مطلوب میباشد؟

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64 + 6} = \sqrt[3]{64} + \frac{6}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$$

$$4 + \frac{2}{\sqrt[3]{(4^3)^2}} = 4 + \frac{2}{16} = \frac{33}{8} = \boxed{4,125}$$

مثال سوم: جذر $\sqrt[4]{626}$ را دریابید.

$$\sqrt[4]{626} = \sqrt[4]{625 + 1} = \sqrt[4]{625} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(625)^3}}$$

$$= 5 + \frac{1}{4 \cdot 5^3} = 5 + \frac{1}{4 \cdot 125} = 5 + \frac{1}{500}$$

$$= \frac{2501}{500} = \boxed{5.002}$$

تبدیل جذر به طاقت و عکس آن

اگر خواسته باشیم که یک جذر را به طاقت تبدیل نمائیم پس مجذور را به حیث قاعده و درجه جذر را به حیث مخرج توان قاعده و توان مجذور را به حیث صورت توان قاعده مینویسیم. اگر خواسته باشیم که یک طاقت را که توان آن کسری باشد به جذر تبدیل نمائیم، بر عکس قضیه بالا عمل می نمائیم.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}} \quad , \quad \boxed{b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}}$$

جذور ذیل را به طاقتتبدیل نمائید.

$$1) \sqrt[2]{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$$

$$7) \sqrt[3]{6^4} = 6^{\frac{4}{3}}$$

$$2) \sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}}$$

$$8) \sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}}$$

$$3) \sqrt{\frac{1}{3^2}} = 3^{\frac{1}{2} \div \frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{2} \times \frac{5}{2}} = 3^{\frac{5}{4}}$$

$$4) \sqrt[p]{2^{\frac{p}{2}}} = 2^{\frac{\frac{p}{2}}{p}} = 2^{\frac{p}{2p}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$5) \sqrt[2]{3^3 \sqrt[3]{3}} = \sqrt[2]{3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[2]{3^{\frac{4}{3}}} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}} =$$

$$6) \sqrt[3]{5^2 \sqrt[2]{5}} = \sqrt[3]{5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

در مثال های فوق برخی از آنها توسط قوانین جذر به بسیار آسانی حل میشود، اما برای یاد گرفتن درست تبدیل جذر به طاقت و طاقت به جذر آنها را کار نمودیم.

اعداد طاقت دار ذیل را به جذر تبدیل نمایند.

- 1) $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$
- 2) $7^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{7^5}$
- 3) $8^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$
- 4) $81^{\frac{3}{5}} = 3^{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{3^{12}}$
- 5) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- 6) $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

همدرجه سازی جذور

در صورتیکه جذر ها دارای درجه های مختلف باشند، برای همدرجه ساختن آنها اولاً کوچکترین مضرب مشترک درجه های جذور را بدست آورده آنرا تقسیم درجه هر یک از جذور می نمائیم، سپس حاصل تقسیم را ضرب توان مجذور نموده و بحیث توان مجذور قرار میدهیم.

$$\sqrt[m]{a^r}, \quad \sqrt[n]{a^t}, \quad \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[mnp]{a^{npr}}, \quad \sqrt[mnp]{a^{mpt}}, \quad \sqrt[mnp]{a^{mnq}}$$

یاد داشت: این عمل در هر چهار عملیه اساسی قابل تطبیق است.

مثال اول: جذور $\sqrt[4]{a^3}$ و $\sqrt[6]{a^5}$ را همدرجه سازید.

حل: ابتدا $L.C.M$ درجه های جذور را دریافت می نمائیم.

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 6 & 4 \\ \hline & 3 & 2 \end{array} \Rightarrow L.C.M(6,4) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$\sqrt[4]{a^3}, \quad \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{(a^3)^{\frac{12}{4}}}, \quad \sqrt[12]{(a^5)^{\frac{12}{6}}} \Rightarrow \sqrt[12]{a^9}, \quad \sqrt[12]{a^{10}}$$

مثال دوم: جذور $\sqrt[5]{2^4}$ ، $\sqrt[3]{2^5}$ و $\sqrt[2]{2^1}$ را همدرجه سازید.

حل: چون $L.C.M(2,3,5) = 30$ است پس:

$$\sqrt[5]{2^4}, \quad \sqrt[3]{2^5}, \quad \sqrt[2]{2^1} = \sqrt[30]{(2^4)^{\frac{30}{5}}}, \quad \sqrt[30]{(2^5)^{\frac{30}{3}}}, \quad \sqrt[30]{(2^1)^{\frac{30}{2}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[30]{2^{24}}, \quad \sqrt[30]{2^{50}}, \quad \sqrt[30]{2^{15}}$$

رفع عامل و عکس آن

در صورتیکه یک مقدار مجذور از جذر خارج شود بنام رفع عامل یاد میشود که معکوس آن عکس قضیه است، برای اینکه ضریب جذر را داخل جذر نمایم آنرا به توان درجه جذر بلند برده و تحت جذر مینویسیم.

$$\boxed{a \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n \cdot b^m}}$$

Proof: $a \sqrt[n]{b^m} = a \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{n}} \cdot (b^m)^{\frac{1}{n}} = (a^n \cdot b^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n \cdot b^m}$

- 1) $2^2\sqrt{3} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \boxed{\sqrt{12}}$
- 2) $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = 2\sqrt[5]{4}$
- 3) $\sqrt[7]{2^{15}} = \sqrt[7]{2^{14} \cdot 2^1} = 4\sqrt[7]{2}$
- 4) $\sqrt[30]{2^{100}} = \sqrt[30]{2^{90} \cdot 2^{10}} = 8\sqrt[3]{2}$
- 5) $3^8\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^8 \cdot 5} = \sqrt[3]{3^{13}}$
- 6) $3^5\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 3^1} = \sqrt[5]{3^6}$
- 7) $20^{20}\sqrt[20]{20^{41}} = \sqrt[20]{20^{20} \cdot 20^{41}} = \sqrt[20]{20^{61}}$
- 8) $\frac{1}{2}^3\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^7}$
- 9) $625^3\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{625^3 \cdot 25} = \sqrt[3]{5^{12} \cdot 5^2} = \sqrt[3]{5^{14}}$
- 10) $81^2\sqrt[2]{27} = \sqrt[2]{(81)^2 \cdot 27} = \sqrt[2]{3^8 \cdot 3^3} = \sqrt[2]{3^{11}}$

قوانین جذور (Rules Of Radicals)

قانون اول: جذر n -ام عدد یک عبارت از یک است و جذر n -ام صفر مساوی به صفر است. مثلاً:

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = 1} \quad , \quad \boxed{\sqrt[n]{0} = 0}$$

- | | | | |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\sqrt[2]{1} = \boxed{1}$ | 3) $\sqrt[3]{1} = \boxed{1}$ | 5) $\sqrt[20]{1} = \boxed{1}$ | 7) $\sqrt[500]{1} = \boxed{1}$ |
| 2) $\sqrt[2]{0} = \boxed{0}$ | 4) $\sqrt[3]{0} = \boxed{0}$ | 6) $\sqrt[20]{0} = \boxed{0}$ | 8) $\sqrt[500]{0} = \boxed{0}$ |

قانون دوم: اگر در حالت ضرب درجه های جذر با هم مساوی باشد، از درجه های مساوی یکی را انتخاب نموده و مجذور ها را با هم ضرب می نماییم.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}}$$

Proof: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = (abc)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{abc}$

- 1) $\sqrt[3]{200} \cdot \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{200 \cdot 40} = \sqrt[3]{8000} = 20$
- 2) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2} = \sqrt{1} = 1$
- 3) $\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2 \cdot 8} = \sqrt[2]{16} = 4$
- 4) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$
- 5) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{25} \cdot \sqrt[5]{125} \cdot \sqrt[5]{625} = \sqrt[5]{5 \cdot 25 \cdot 125 \cdot 625} = \sqrt[5]{5^{10}} = 25$
- 6) $\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[6]{3^7} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{3^5 \cdot 3 \cdot 3^7 \cdot 3^5} = \sqrt[6]{3^{18}} = 3^3 = 27$
- 7) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{8 \cdot 32 \cdot 2 \cdot 8} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 2^5 \cdot 2 \cdot 2^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$
- 8) $\sqrt[n]{5^{13}} \cdot \sqrt[n]{5^{-9}} \cdot \sqrt[n]{5^{-4}} = \sqrt[n]{5^{13} \cdot 5^{-9} \cdot 5^{-4}} = \sqrt[n]{5^0} = \sqrt[n]{1} = 1$
- 9) $\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \sqrt[5]{7^5} = 7$
- 10) $\sqrt[3]{40} \cdot \sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{40 \cdot 20 \cdot 100} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^2}$
 $= \sqrt[3]{2^3 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10 = 20$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

قانون سوم: اگر در حالت ضرب مجذور ها با هم مساوی و درجه ها مختلف باشد، از همدرجه سازی استفاده می نمائیم.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}$$

Proof: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}$

1) $\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[2 \cdot 3]{5^{2+3}} = \sqrt[6]{5^5}$

2) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[7]{3} = \sqrt[4 \cdot 7]{3^{4+7}} = \sqrt[28]{3^{11}}$

3) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[5]{10} = \sqrt[3 \cdot 5]{10^{3+5}} = \sqrt[15]{10^8}$

4) $\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 6]{2^{2+3+6}} = \sqrt[36]{2^{11}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

5) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[20]{4} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 4]{4^{5+10+20+4}} = \sqrt[200]{4^{39}} = \sqrt[20]{4^{12}} = \sqrt[20]{2^{24}} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$

قانون چهارم: در حالت ضرب هرگاه درجه ها و مجذور ها مختلف باشد از همدرجه سازی استفاده می نمائیم.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$$

Proof:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = (a^m)^{\frac{1}{n \cdot m}} \cdot (b^n)^{\frac{1}{n \cdot m}} = (a^m \cdot b^n)^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$$

1) $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[4 \cdot 3]{7^3 \cdot 5^4} = \sqrt[12]{7^3 \cdot 5^4} = \sqrt[12]{455625}$

2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[2 \cdot 6]{3^6 \cdot 2^2} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 2^2} = \sqrt[12]{2916}$

3) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{4 \cdot 27} = \sqrt[6]{108}$

4) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{6} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 4]{2^6 \cdot 3^4 \cdot 6^3} = \sqrt[24]{2^6 \cdot 3^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[24]{2^9 \cdot 3^7}$

5) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{15} = \sqrt[3 \cdot 4 \cdot 6]{5^4 \cdot 3^3 \cdot 15^2} = \sqrt[72]{5^4 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 3^5} = \sqrt[72]{5^4 \cdot 3^8 \cdot 2^2}$

قانون پنجم: هرگاه در حالت تقسیم درجه ها مساوی باشد از درجه های مساوی یک درجه و مجذور ها را تقسیم می نمائیم.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Proof: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

1) $\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{10}{5}} = \sqrt[4]{2}$

5) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

2) $\frac{\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{20 \cdot 2}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = 2$

3) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{60}{6}} = \sqrt{10}$

4) $\frac{\sqrt[5]{24} \cdot \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{26}}{\sqrt[5]{28} \cdot \sqrt[5]{2^{-1}}} = \frac{\sqrt[5]{24 \cdot 27 \cdot 26}}{\sqrt[5]{28 \cdot 2^{-1}}} = \frac{\sqrt[5]{2^{4+7+6}}}{\sqrt[5]{2^{8-1}}} = \frac{\sqrt[5]{2^{17}}}{\sqrt[5]{2^7}} = \sqrt[5]{\frac{2^{17}}{2^7}} = \sqrt[5]{2^{10}} = 4$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

قانون ششم: در حالت تقسیم هرگاه مجذور ها مساوی و درجه ها مختلف باشد از همدرجه سازی استفاده می نماییم.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$$

Proof: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$

1) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[3 \cdot 7]{5^{7-3}} = \sqrt[21]{5^4}$

2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[9]{3}} = \sqrt[2 \cdot 9]{3^{9-2}} = \sqrt[18]{3^7}$

3) $\frac{\sqrt{15625}}{\sqrt[3]{15625}} = \sqrt[2 \cdot 3]{(15625)^{3-2}} = \sqrt[6]{15625} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

4) $\frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[8]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 2^2}}{\sqrt[8]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[8]{2^3}} = \frac{\sqrt[8]{(2^3)^2}}{\sqrt[8]{2^3}} = \frac{\sqrt[8]{2^6}}{\sqrt[8]{2^3}} = \sqrt[8]{\frac{2^6}{2^3}} = \sqrt[8]{2^{6-3}} = \sqrt[8]{2^3} = \sqrt[8]{8}$

5) $\frac{\sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[5]{3^3} \cdot \sqrt[5]{3}}{\sqrt[10]{3^3} \cdot \sqrt[10]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^4 \cdot 3^3 \cdot 3}}{\sqrt[10]{3^3 \cdot 3^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[10]{3^8}} = \frac{\sqrt[10]{(3^8)^2}}{\sqrt[10]{3^8}} = \frac{\sqrt[10]{3^{16}}}{\sqrt[10]{3^8}} = \sqrt[10]{\frac{3^{16}}{3^8}} = \sqrt[10]{3^{16-8}} = \sqrt[10]{3^8} = \sqrt[5]{81}$

قانون هفتم: در حالت تقسیم اگر درجه ها و مجذور ها هردو مختلف باشند از همدرجه سازی استفاده می نماییم.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$$

Proof: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{(a^m)^{\frac{1}{nm}}}{(b^n)^{\frac{1}{nm}}} = \left(\frac{a^m}{b^n}\right)^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$

1) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{16}{8}} = \sqrt[6]{2}$

2) $\frac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[6]{2^4}} = \sqrt[6 \cdot 3]{\frac{2^{10}}{2^4}} = \sqrt[6]{\frac{2^{10}}{2^4}} = \sqrt[6]{2^{10-4}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

3) $\frac{\sqrt[5]{3^7}}{\sqrt[7]{3^5}} = \frac{\sqrt[35]{(3^7)^7}}{\sqrt[35]{(3^5)^5}} = \frac{\sqrt[35]{3^{49}}}{\sqrt[35]{3^{25}}} = \sqrt[35]{\frac{3^{49}}{3^{25}}} = \sqrt[35]{3^{49-25}} = \sqrt[35]{3^{24}}$

4) $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10^2}}{\sqrt[4]{10^3}} = \frac{\sqrt{10 \cdot 10^2}}{\sqrt[4]{10^3}} = \frac{\sqrt{10^3}}{\sqrt[4]{10^3}} = \frac{\sqrt[4]{(10^3)^2}}{\sqrt[4]{10^3}} = \frac{\sqrt[4]{10^6}}{\sqrt[4]{10^3}} = \sqrt[4]{\frac{10^6}{10^3}} = \sqrt[4]{10^{6-3}} = \sqrt[4]{10^3}$

5) $\frac{\sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^7}}{\sqrt[10]{2^6} \cdot \sqrt[10]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^7}}{\sqrt[10]{2^6 \cdot 2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^{14}}}{\sqrt[10]{2^8}} = \frac{\sqrt[10]{(2^{14})^2}}{\sqrt[10]{2^8}} = \frac{\sqrt[10]{2^{28}}}{\sqrt[10]{2^8}} = \sqrt[10]{\frac{2^{28}}{2^8}} = \sqrt[10]{2^{20}} = 4$

قانون هشتم: هرگاه جذر به یک توان آمده باشد توان عمومی جذر را به حیث توان مجذور انتخاب کرده میتوانیم و بر عکس توان مجذور را به حیث توان کل جذر انتخاب کرده میتوانیم.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Proof: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$1) (\sqrt[3]{2^2})^2 = \sqrt[3]{(2^2)^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$2) (\sqrt[15]{3^2})^4 = \sqrt[15]{(3^2)^4} = \sqrt[15]{3^8}$$

$$3) (\sqrt[5]{6^2})^3 = \sqrt[5]{(6^2)^3} = \sqrt[5]{6^6} = 6\sqrt[5]{6}$$

$$4) \sqrt[9]{5^7} = (\sqrt[9]{5})^7$$

$$5) \sqrt[11]{3^6} = (\sqrt[11]{3})^6$$

قانون نهم: میتوان درجه جذر را در یک عدد خلاف صفر ضرب یا تقسیم نمود به شرط آنکه توان مجذور جذر را نیز در همان عدد ضرب یا تقسیم نمائیم.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, k \neq 0}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div k]{a^{m \div k}}, k \neq 0}$$

$$1) \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6 \cdot 7]{3^{5 \cdot 7}} = \sqrt[42]{3^{35}}$$

$$3) \sqrt[42]{3^{35}} = \sqrt[42 \div 7]{3^{35 \div 7}} = \sqrt[6]{3^5}$$

$$2) \sqrt[7]{2^5} = \sqrt[7 \cdot 2]{2^{5 \cdot 2}} = \sqrt[14]{2^{10}}$$

$$4) \sqrt[30]{5^{18}} = \sqrt[30 \div 3]{5^{18 \div 3}} = \sqrt[10]{5^6}$$

قانون دهم: در زمان خارج ساختن یک عدد از جذر که دارای جذر نمای جفت باشد، آن را داخل قیمت مطلقه گرفته و خارج می سازیم.

$$\boxed{\sqrt{b^2} = |b|}$$

$$1) \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$$

$$2) \sqrt[4]{(1 - \sqrt{2})^4} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

$$3) \sqrt[6]{(2 - 3\pi)^6} = |2 - 3\pi| = 3\pi - 2$$

جذور مشابه: عبارت از جذور اند که دارای مجذور ها و جذر نماهای مساوی باشند.
مانند:

$$1) \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a} \Rightarrow \text{جذور مشابه}$$

$$2) a\sqrt[n]{P}, b\sqrt[n]{P} \Rightarrow \text{جذور مشابه}$$

$$3) \sqrt[n]{a}, \sqrt[m]{a} \Rightarrow \text{غیرجذور مشابه}$$

$$4) \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \Rightarrow \text{جذور غیر مشابه}$$

$$5) \sqrt[n]{a}, \sqrt[m]{b} \Rightarrow \text{جذور غیر مشابه}$$

عملیات چهار گانه بالای جذور

جمع و تفریق جذور: جذور مشابه را جمع و تفریق کرده میتوانیم.

- 1) $\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{3} = 2\sqrt[2]{3}$
- 2) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$
- 3) $\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{3} = 4\sqrt[2]{3}$
- 4) $4\sqrt[2]{3} + 5\sqrt[2]{3} + 7\sqrt[2]{3} + 4\sqrt[2]{3} = 20\sqrt[2]{3}$
- 5) $2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{4} = 10\sqrt[3]{4}$
- 6) $2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4}$
- 7) $\sqrt[2]{8} - \sqrt[2]{32} + \sqrt[2]{128} = 2\sqrt[2]{2} - 4\sqrt[2]{2} + 8\sqrt[2]{2} = 6\sqrt[2]{2}$
- 8) $\sqrt[2]{125} + \sqrt[2]{3125} + \sqrt[2]{78125} = 5\sqrt[2]{5} + 25\sqrt[2]{5} + 125\sqrt[2]{5} = 155\sqrt[2]{5}$
- 9) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} = ?$
 $= \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \boxed{4\sqrt{3}}$
- 10) $2\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 7\sqrt{80} - 4\sqrt{125} = ?$
 $= 2\sqrt{4 \cdot 5} - 3\sqrt{9 \cdot 5} + 7\sqrt{16 \cdot 5} - 4\sqrt{25 \cdot 5}$
 $= 2 \cdot 2\sqrt{5} - 3 \cdot 3\sqrt{5} + 7 \cdot 4\sqrt{5} - 4 \cdot 5\sqrt{5}$
 $= 4\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 28\sqrt{5} - 20\sqrt{5} = \boxed{3\sqrt{5}}$

ضرب جذور: برای اینکه جذور را با هم ضرب نمائیم هر حد قوس اول را در هر حد قوس دوم ضرب نموده و در اخیر از عملیه جمع و تفریق استفاده می نمائیم.

- 1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$
- 2) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$
- 3) $(2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = \boxed{20}$
- 4) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \sqrt{36} - \sqrt{12} + \sqrt{12} - \sqrt{4} = 6 - 2 = 4$
- 5) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{25} - \sqrt{15} + \sqrt{15} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$
- 6) $(2\sqrt{3} + \sqrt{6})(2\sqrt{3} - \sqrt{6}) = ?$
 $= 4\sqrt{9} - 2\sqrt{18} + 2\sqrt{18} - \sqrt{36} = 4 \cdot 3 - 6 = 12 - 6 = \boxed{6}$
- 7) $(\sqrt{18} + \sqrt{2})(\sqrt{18} + \sqrt{2}) = \sqrt{18^2} + \sqrt{36} + \sqrt{36} + \sqrt{2^2}$
 $= 18 + 6 + 6 + 2 = \boxed{32}$

$$8) (\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}})(\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}) + (\sqrt{3-\sqrt{5}})(\sqrt{3+\sqrt{5}}) = ?$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} + \sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} \\ &= \sqrt{\sqrt{36}-\sqrt{12}-\sqrt{12}+\sqrt{4}} + \sqrt{9+3\sqrt{5}-3\sqrt{5}-\sqrt{25}} \\ &= \sqrt{6-2} + \sqrt{9-5} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2 = \boxed{4} \end{aligned}$$

$$9) (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{20}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{19} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{24}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{25} = ?$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{19}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{19} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{24}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{24}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3}-\sqrt{2})[(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^{19} + [(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^{24}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3^2-2^2})^{19} + (\sqrt{3^2-2^2})^{24}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3}-\sqrt{2})(3-2)^{19} + (3-2)^{24}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{3}+\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$10) \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = ?$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{9}+1+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9}}{1-3} \\ &= \frac{1+3+1+3}{-2} = \frac{8}{-2} = \boxed{-4} \end{aligned}$$

تقسیم جذور: برای تقسیم جذور از قوانین جذر استفاده می نمایم.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$1) \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{20}{2}} = \boxed{\sqrt{10}}$$

$$4) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

$$2) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$5) \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

$$3) \frac{6\sqrt{10}}{8\sqrt{2}} = \boxed{\frac{3}{4}\sqrt{5}}$$

$$6) \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

یاد داشت: هرگاه صورت و مخرج یک کسر از چندین جذر تشکیل شده باشد از روش گویا سازی استفاده می نمایم که بعداً تشریح میشود.

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

جذر الجذر

هرگاه یک افاده جذری در تحت یک یا چندین جذر دیگر قرار داشته باشد، افاده مذکور جذر الجذر نامیده میشود که میتوان آنها را تحت یک جذر در آورد.

خواص جذر الجذر

خاصیت اول:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[nmp]{a}$$

- 1) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} \sqrt{10} = \sqrt[16]{10}$
- 2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[3 \cdot 4]{6} = \sqrt[12]{6}$
- 3) $\sqrt[2]{\sqrt{81}} = \sqrt[2 \cdot 2]{81} = \sqrt[4]{81} = 3$
- 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^6}} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^6} = \sqrt[12]{5^6} = \sqrt{5}$
- 5) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{2^{160}}}} = \sqrt[5 \cdot 4 \cdot 2]{2^{160}} = \sqrt[40]{2^{160}} = 2^4 = 16$

خاصیت دوم:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

- 1) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[4]{2}$
- 2) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}$

خاصیت سوم:

$$\sqrt[n]{a^t \cdot \sqrt[m]{b^p} \cdot \sqrt[q]{c}} = \sqrt[nmq]{a^{tmq} \cdot b^{pq} \cdot c}$$

- 1) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[2]{2\sqrt{5}}} = \sqrt[3 \cdot 2 \cdot 2]{3^{1 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 2^{1 \cdot 2} \cdot 5^1} = \sqrt[12]{3^4 \cdot 2^2 \cdot 5}$
- 2) $\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^{1 \cdot 3} \cdot 2^1} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 2}$
- 3) $\sqrt[5]{2^3 \sqrt[4]{3^5 \sqrt[6]{5^3}}} = \sqrt[5 \cdot 4 \cdot 6]{2^{3 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 3^{5 \cdot 6} \cdot 5^3} = \sqrt[120]{2^{72} \cdot 3^{30} \cdot 5^3}$
- 4) $\sqrt[2]{3 \sqrt[5]{7}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 5]{3^{1 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 5^{1 \cdot 2} \cdot 7^1} = \sqrt[20]{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}$
- 5) $\sqrt[3]{3^4 \sqrt[5]{2^3 \sqrt{5}}} = \sqrt[3 \cdot 5 \cdot 2]{3^{4 \cdot 5 \cdot 2} \cdot 2^{3 \cdot 2} \cdot 5^1} = \sqrt[20]{3^{40} \cdot 2^6 \cdot 5}$

خاصیت چهارم:

$$\sqrt[m]{a^t \cdot \sqrt[n]{a^b \cdot \sqrt[p]{a^c \cdot \sqrt[z]{a^d}}} = \sqrt[mnpz]{a^{((t \cdot n + b) \cdot p + c) \cdot z + d}}$$

$$1) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{2^{(1 \cdot 2 + 1)2 + 1}} = \sqrt[8]{2^7}$$

$$2) \sqrt[3]{3^2 \cdot \sqrt[3]{3^2 \cdot \sqrt[3]{3^2}}} = \sqrt[3 \cdot 3 \cdot 3]{3^{(2 \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 2}} = \sqrt[27]{3^{26}}$$

$$3) \sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{25}} = \sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^{1 \cdot 3 + 2}} = \sqrt[12]{5^5}$$

$$4) \sqrt[3]{3\sqrt[4]{9\sqrt[5]{27}}} = \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3^2\sqrt[5]{3^3}}} = \sqrt[3 \cdot 4 \cdot 5]{3^{((1 \cdot 4) + 2)5 + 3}} = \sqrt[60]{3^{33}} = \sqrt[20]{3^{11}}$$

$$5) \sqrt[5]{2^3\sqrt[4]{2^5\sqrt[6]{2^5}}} = \sqrt[5 \cdot 4 \cdot 6]{2^{((3 \cdot 4) + 5) \cdot 6 + 5}} = \sqrt[120]{2^{107}}$$

خاصیت پنجم:

$$\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \dots \sqrt{a}}}}} = \sqrt[2^n]{a^{2^n - 1}}$$

$$1) \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}}} = \sqrt[2^5]{2^{2^5 - 1}} = \sqrt[32]{2^{31}}$$

$$2) \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}} = \sqrt[2^3]{7^{2^3 - 1}} = \sqrt[8]{7^7}$$

$$3) \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}} = \sqrt[2^4]{3^{2^4 - 1}} = \sqrt[16]{3^{15}}$$

⚠ بخاطر داشته باشید که فورمول فوق در صورتی درست است که درجه جذر 2 و مجذور ها با هم مساوی باشند.

خاصیت ششم:

$$\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \dots \sqrt{a^2}}}} = a$$

$$1) \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \sqrt{5^2}}}} = 5$$

$$2) \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \sqrt{4}}}} = 2$$

خاصیت هفتم:

$$\sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[3]{a^4 \dots \sqrt[3]{a^6}}} = a^2$$

$$1) \sqrt[3]{2^4 \cdot \sqrt[3]{2^4 \cdot \sqrt[3]{2^4 \cdot \sqrt[3]{2^6}}} = 2^2 = 4$$

$$2) \sqrt[3]{5^4 \cdot \sqrt[3]{5^4 \cdot \sqrt[3]{5^4 \cdot \sqrt[3]{5^6}}} = 5^2 = 25$$

$$3) \sqrt[3]{8^4 \cdot \sqrt[3]{8^4 \cdot \sqrt[3]{8^4 \cdot \sqrt[3]{8^6}}} = 8^2 = 64$$

◀ بخاطر داشته باشید که فورمول فوق در صورتی درست است که درجه جذر 3 باشد.

خاصیت هشتم:

$$\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \dots}}} = a$$

ثبوت:

$$x = \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \dots}}} \Rightarrow x^2 = a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \dots}}}$$

$$x^2 = ax \Rightarrow x^2 - ax = 0 \Rightarrow x(x - a) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ ناممکن } x_2 = a \text{ ممکن}$$

$$1) \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \dots}}} = 5$$

$$2) \sqrt{11 \cdot \sqrt{11 \cdot \sqrt{11 \cdot \sqrt{11 \dots}}} = 11$$

$$3) \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \dots}}} = 3$$

$$4) \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \dots}}} = 2$$

$$5) \sqrt{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{7 \dots}}} = 7$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

خاصیت نهم:

$$\sqrt[n]{a^{n-1} \cdot \sqrt[m]{a^{m-1}} \cdot \sqrt[p]{a^{p-1}}} = \sqrt[mnp]{a^{m \cdot n \cdot p - 1}}$$

$$1) \sqrt[4]{3^3 \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt[4 \cdot 3 \cdot 2]{3^{4 \cdot 3 \cdot 2 - 1}} = \sqrt[24]{3^{23}}$$

$$2) \sqrt[6]{2^5 \cdot \sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2]{2^{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 - 1}} = \sqrt[180]{2^{179}}$$

$$3) \sqrt[7]{5^6 \cdot \sqrt[5]{5^4} \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[7 \cdot 5 \cdot 2]{5^{7 \cdot 5 \cdot 2 - 1}} = \sqrt[70]{5^{69}}$$

خاصیت دهم:

$$\sqrt[m]{a \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \dots} = \sqrt[m-1]{a}$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \dots} &= \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m^2]{a} \cdot \sqrt[m^3]{a} \cdot \sqrt[m^4]{a} \dots \sqrt[m^n]{a} \\ &= a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{m^2}} \cdot a^{\frac{1}{m^3}} \cdot a^{\frac{1}{m^4}} \dots a^{\frac{1}{m^n}} \\ &= (a)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} \dots \frac{1}{m^n}} \end{aligned}$$

طوری که دیده می شود توان a یک تصاعد هندسی بوده که حد اول آن $\frac{1}{m}$ و فرق مشترک آن هم $\frac{1}{m}$ می باشد، بناءً مجموع n حد سلسله مذکور عبارت است از:

$$a_1 = \frac{1}{m}, \quad r = \frac{1}{m^2} \div \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{m}{1} = \frac{1}{m}$$

$$r = \frac{1}{m}$$

$$S_n = ? \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{m} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{m}\right)^n}{1 - \frac{1}{m}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{m}\right)^n}{1 - \frac{1}{m}} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1-0}{\frac{m-1}{m}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{m-1} = \frac{1}{m-1} \Rightarrow a^{\frac{1}{m-1}} = \sqrt[m-1]{a}$$

$$1) \sqrt[2]{3 \cdot \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{3} \dots} = \sqrt[2-1]{2} = 2$$

$$2) \sqrt[5]{64 \cdot \sqrt[5]{64} \cdot \sqrt[5]{64} \dots} = \sqrt[5-1]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2\sqrt{2}$$

$$3) \sqrt[6]{32 \cdot \sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[6]{32} \dots} = \sqrt[6-1]{32} = \sqrt[5]{32} = 2$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

خاصیت یازدهم:

$$\boxed{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}$$

ثبوت: اگر داشته باشیم:

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} \dots \dots \dots I$$

اطراف را به توان 2 رفع می سازیم:

$$x^2 = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}$$

$$x^2 - a = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} \dots \dots \dots II$$

از مقایسه رابطه I و II داریم که:

$$x^2 - a = x$$

$$x^2 - a - x = 0 \Rightarrow x^2 - x - a = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4a$$

$$\boxed{x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}$$

جذر منفی آن قابل قبول نمی باشد:

$$1) \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} \dots}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$2) \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}} \dots}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$3) \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}} \dots}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3$$

$$4) \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42}} \dots}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 42}}{2} = \frac{1 + \sqrt{169}}{2} = 7$$

$$5) \sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{56}} \dots}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 56}}{2} = \frac{1 + \sqrt{225}}{2} = \frac{1 + 15}{2} = 8$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$\boxed{\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}}$$

ثبوت: اگر داشته باشیم:

$$x = \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} \dots \dots \dots I$$

اطراف را به توان 2 رفع می سازیم:

$$x^2 = a - \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}}$$

$$a - x^2 = \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} \dots \dots \dots II$$

از مقایسه رابطه I و II داریم که:

$$a - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - a = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4a$$

$$\boxed{\frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}}$$

$$1) \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \dots}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$2) \sqrt{90 - \sqrt{90 - \sqrt{90 - \sqrt{90}} \dots}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4 \cdot 90}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{361}}{2} = 9$$

$$3) \sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56}} \dots}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4 \cdot 56}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{225}}{2} = 7$$

$$4) \sqrt{110 - \sqrt{110 - \sqrt{110 - \sqrt{110}} \dots}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4 \cdot 110}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{441}}{2} = \frac{-1+21}{2} = 10$$

$$5) \sqrt{600 - \sqrt{600 - \sqrt{600 - \dots}}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4 \cdot 600}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{2401}}{2} = \frac{-1+49}{2} = 24$$

$$\boxed{\sqrt[m]{a \div \sqrt[m]{a \div \sqrt[m]{a \div \dots}}} = {}^{m+1}\sqrt{a}}$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a \div \sqrt[m]{a \div \sqrt[m]{a \div \dots}}} &= \sqrt[m]{a} \div \sqrt[m^2]{a} \div \sqrt[m^3]{a} \div \dots \div \sqrt[m^n]{a} \\ &= a^{1/m} \div a^{1/m^2} \div a^{1/m^3} \div \dots \div a^{1/m^n} \\ &= a^{1/m} \div \frac{a^{1/m^2}}{a^{1/m^3}} \div \dots \div a^{1/m^n} \\ &= a^{1/m} \div a^{1/m^2 - 1/m^3} \div \dots \div a^{1/m^n} \\ &= (a)^{\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} \dots \frac{1}{m^n}} \end{aligned}$$

طوری‌که دیده میشود توان a یک تصاعد هندسی بوده که حد اول آن $\frac{1}{m}$ و نسبت مشترک شان $-\frac{1}{m}$ است، بناءً مجموع سلسله مذکور عبارت است از:

$$\left. \begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{(1-r^n)}{(1-r)} \\ a_1 &= \frac{1}{m} \\ r &= -\frac{1}{m} \end{aligned} \right\} S_n = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{m}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{m}\right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{m}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{m}\right)} \right) \right) = \frac{\frac{1}{m} \cdot (1-0)}{\frac{m+1}{m}}$$

$$\begin{aligned} S_n = ? \quad \frac{\frac{1}{m}}{\frac{m+1}{m}} &= \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{m+1} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow a^{\frac{1}{m+1}} \\ a^{\frac{1}{m+1}} &= {}^{m+1}\sqrt{a} \end{aligned}$$

- 1) $\sqrt[3]{16 \div \sqrt[3]{16 \div \sqrt[3]{16 \div \dots}}} = {}^{3+1}\sqrt{16} = {}^4\sqrt{16} = 2$
- 2) $\sqrt{64 \div \sqrt{64 \div \sqrt{64 \div \dots}}} = {}^{2+1}\sqrt{64} = {}^3\sqrt{64} = 4$
- 3) $\sqrt[3]{81 \div \sqrt[3]{81 \div \sqrt[3]{81 \div \dots}}} = {}^{3+1}\sqrt{81} = {}^4\sqrt{81} = 3$
- 4) $\sqrt[9]{5 \div \sqrt[9]{5 \div \sqrt[9]{5 \div \dots}}} = {}^{9+1}\sqrt{5} = {}^{10}\sqrt{5}$
- 5) $\sqrt[5]{10^6 \div \sqrt[5]{10^6 \div \sqrt[5]{10^6 \div \dots}}} = {}^{5+1}\sqrt{10^6} = {}^6\sqrt{10^6} = 10$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

جذور مرکب

جذور را گویند که به شکل $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ باشند، و برای ساده سازی آن از رابطه ذیل استفاده می نمائیم.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \quad , \quad x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad , \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

مثال اول: جذر $\sqrt{6 + \sqrt{11}}$ را ساده سازید.

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} = ? \quad A = 6 \quad , \quad B = 11$$

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \Rightarrow x = \frac{6 + \sqrt{6^2 - 11}}{2} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} \Rightarrow y = \frac{6 - \sqrt{6^2 - 11}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

مثال دوم: جذر $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$ را ساده نمائید.

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = ? \quad A = 4 \quad , \quad B = 12$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{4^2 - 12}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 12}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{3} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1$$

مثال سوم: جذر $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ را ساده نمائید.

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = ? = \sqrt{5 + \sqrt{24}} \quad A = 5 \quad , \quad B = 24$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{5 + \sqrt{5^2 - 24}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ y &= \frac{5 - \sqrt{5^2 - 24}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

و یا هم میتوانیم که جذور فوق را به صورت $\sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ ساده سازی نمائیم که C از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$C = \sqrt{A^2 - B} \text{ or } C^2 = A^2 - B$$

$$1) \sqrt{5 + \sqrt{24}} = ? \quad C = \sqrt{5^2 - 24} = \sqrt{25 - 24} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$2) \sqrt{10 - \sqrt{96}} = ? \quad C = \sqrt{10^2 - 96} = \sqrt{100 - 96} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{\frac{10+2}{2}} - \sqrt{\frac{10-2}{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{4} = \sqrt{6} - 2$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

جمع و تفریق جذور مرکب:

برای جمع و تفریق جذور مرکب باید از فرمول های ذیل استفاده کرد:

$$\boxed{\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}} \quad , \quad \boxed{\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}}$$

- 1) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 - 3}}{2}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{6}$
- 2) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} = 2\sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 7}}{2}} = 2\sqrt{\frac{4 + 3}{2}} = 2\sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{14}$
- 3) $\sqrt{4 + \sqrt{12}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}} = 2\sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 12}}{2}} = 2\sqrt{\frac{4 - 2}{2}} = 2$
- 4) $\sqrt{6 + \sqrt{20}} - \sqrt{6 - \sqrt{20}} = 2\sqrt{\frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2}} = 2\sqrt{\frac{6 - \sqrt{16}}{2}} = 2\sqrt{\frac{6 - 4}{2}} = 2$
- 5) $\sqrt{7 + \sqrt{13}} + \sqrt{7 - \sqrt{13}} = 2\sqrt{\frac{5 + \sqrt{49 - 13}}{2}} = 2\sqrt{\frac{5 + 6}{2}} = 2\sqrt{\frac{11}{2}} = \sqrt{22}$

جذر اعداد الجبری یا حقیقی

جذر اعداد الجبری را طور مفصل به شکل ذیل مطالعه می نمائیم:

1) هر گاه عدد مثبت تحت جذر درجه جفت باشد دارای 2 جذر (یک مثبت و دیگری منفی) میباشد.

$$\boxed{\sqrt[2n]{(+a)^{2n}} = \pm a}$$

بخطریکه اگر $(-a)$ یا $(+a)$ را به درجه جفت $(2n)$ رفع نمائیم مجذور را پوره کرده میتواند یعنی $(+a)^{2n} = (-a)^{2n} = a^{2n}$.

- 1) $\sqrt{+a^2} = \pm a \Rightarrow \begin{cases} (-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2 \\ (+a)^2 = (+a) \cdot (+a) = +a^2 \end{cases}$
- 2) $\sqrt{+4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +2^2 = +4 \\ (+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +2^2 = +4 \end{cases}$
- 3) $\sqrt[4]{+81} = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +3^4 = +81 \\ (+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +3^4 = +81 \end{cases}$

(2) هر عدد مثبت تحت جذر درجه طاق، یک جذر مثبت دارد.

$$\sqrt[2n-1]{(+a)^{2n-1}} = +a^{2n-1}$$

$$1) \sqrt[3]{+8} = +2 \Rightarrow \begin{cases} (+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8 & +2 \text{ شده میتواند} \\ (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 & -2 \text{ شده نمیتواند} \end{cases}$$

$$2) \sqrt[3]{+27} = +3 \Rightarrow \begin{cases} (+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27 & +3 \text{ شده میتواند} \\ (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 & -3 \text{ شده نمیتواند} \end{cases}$$

(3) هر عدد منفی تحت جذر درجه طاق، یک جذر منفی دارد.

$$\sqrt[2n-1]{(-a)^{2n-1}} = -a^{2n-1}$$

$$1) \sqrt[3]{-27} = -3 \Rightarrow \begin{cases} (+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27 & +3 \text{ شده نمیتواند} \\ (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 & -3 \text{ شده میتواند} \end{cases}$$

$$2) \sqrt[3]{-8} = -2 \Rightarrow \begin{cases} (+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8 & +2 \text{ شده نمیتواند} \\ (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 & -2 \text{ شده میتواند} \end{cases}$$

(4) هر عدد منفی تحت جذر درجه جفت، دارای جذر موهومی میباشد.

$$\sqrt[2n]{IR^-} \Rightarrow \text{جذر موهومی}$$

$$\sqrt[2]{-a} = \text{جذر موهومی}$$

$$\sqrt[2]{-4} = \text{جذر موهومی}$$

یعنی هیچ عددی حقیقی وجود ندارد که دو بار ضرب گردد و منفی چهار حاصل شود.

$$1) \sqrt[2]{-4} \neq \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4 & +2 \text{ شده نمیتواند} \\ (+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4 & -2 \text{ شده نمیتواند} \end{cases}$$

تئوری ست اعداد موهومی

تمام اعداد منفی تحت جذر درجه جفت را ست اعداد موهومی گویند. مانند:

$$\sqrt{-16}, \quad \sqrt{-64}, \quad \sqrt{-169}, \quad \sqrt[6]{-18}$$

اعداد موهومی به صورت عموم به شکل (ai) نمایش داده میشود که در آن a یک عدد حقیقی و $i = \sqrt{-1}$ یا $i^2 = -1$ میباشد.

ست اعداد موهومی توسط (I) نمایش داده میشود مطابق تعریف این ست اعداد توسط علامه ریاضی قرار ذیل نمایش داده میشود.

$$I = \{x/x = ai; a \in R; i = \sqrt{-1}\}$$

نکته: حرف i از کلمه یونانی *iota* گرفته شده است که $i = \sqrt{-1}$ را بنام واحد اعداد موهومی یاد میکنند.

خواص اعداد موهومی:

خواص ذیل برای محاسبه جذور موهومی استفاده میشود:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ai} \cdot \sqrt{bi} = i^2 \cdot \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$$

$$1) \sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i\sqrt{4} = \pm 2i$$

$$2) \sqrt{-16} = \sqrt{(-1) \cdot 16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = i\sqrt{16} = \pm 4i$$

$$3) \sqrt[6]{-15625} = \sqrt[6]{(-1) \cdot 15625} = \sqrt[6]{(-1)}\sqrt[6]{15625} = i\sqrt[6]{15625} = i\sqrt[6]{5^6} = 5i$$

$$4) \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-14} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{14}i = i^2\sqrt{2 \cdot 14} = -1 \cdot \sqrt{28} = -2\sqrt{7}$$

$$5) \sqrt{-4} + \sqrt{-9} = 2i + 3i = 5i$$

توان های عدد (i) (Powers of i)

مشاهده میشود که به کمک $i = \sqrt{-1}$ یا $i^2 = -1$ میتوانیم که اعداد موهومی را ساده سازیم. به خاطر داشته باشید که مربع اعداد حقیقی مثبت اما مربع اعداد موهومی منفی میباشد.

$$1) i^0 = 1$$

$$2) i^1 = i$$

$$3) i^2 = -1$$

$$4) i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot (i) = -i$$

$$5) i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1$$

$$6) i^5 = i^4 \cdot i = (i^2)^2 \cdot (i) = (+1)(i) = i$$

$$7) i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$8) i^7 = i^6 \cdot i = (i^2)^3(i) = (-1)^3(i) = (-1)i = -i$$

$$9) i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = +1$$

$$10) i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7 \cdot i = (-1)^7 \cdot i = -i$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n} = 1$$

لهذا هر توان طبیعی i یکی از اعداد $i, 1, -i$ و -1 می باشد.
مثال اول: i^{1216} را ساده نمائید.

حل: میدانیم که باقیمانده تقسیم عدد 1216 بالای 4 عبارت از صفر خواهد بود پس داریم که:

$$i^{1216} = i^0 = 1$$

مثال دوم: i^{209} را ساده سازید.

حل: میدانیم که باقیمانده تقسیم عدد 209 بالای 4 یک خواهد بود پس داریم که:

$$i^{209} = i^1 = i$$

مثال سوم: i^{54} را ساده نمائید.

حل: اگر عدد 54 بر 4 تقسیم کنیم باقیمانده آن 2 خواهد بود پس داریم که:

$$i^{54} = i^2 = -1$$

مثال چهارم: i^{2835} را ساده سازید.

حل: اگر 2835 بر 4 تقسیم کنیم باقیمانده آن 3 خواهد بود.

$$i^{2835} = i^3 = -i$$

عملیات چهارگانه بالای اعداد موهومی

a. جمع اعداد موهومی: در عملیه جمع اعداد موهومی فقط قسمت حقیقی آن با هم جمع میشوند و حاصل جمع دو عدد موهومی یک عدد موهومی است.

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $7i + 9i = (7 + 9)i = 16i$ | 5) $-4i + 4i = 0$ |
| 2) $8i + 11i = (5 + 11)i = 19i$ | 6) $6i - 6i = 0$ |
| 3) $-4i + 12i = (-4 + 12)i = 8i$ | 7) $\sqrt{7}i + 5i = (\sqrt{7} + 5)i$ |
| 4) $-6i - 7i = (-6 - 7)i = -13i$ | 8) $14i - 20i = -7i$ |

b. تفریق اعداد موهومی: در عملیه تفریق اعداد موهومی فقط قسمت حقیقی آن تفریق میشود و حاصل تفریق دو عدد موهومی یک عدد موهومی است.

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $13i - 9i = (13 - 9)i = 4i$ | 5) $-4i + 4i = 0$ |
| 2) $7i - 4i = (7 - 4)i = 3i$ | 6) $6i - 6i = 0$ |
| 3) $4i - 12i = (4 - 12)i = -8i$ | 7) $\sqrt{7}i - 5i = (\sqrt{7} - 5)i$ |
| 4) $-6i - 7i = (-6 - 7)i = -13i$ | 8) $14i - 20i = -6i$ |

c. ضرب اعداد موهومی: حاصل ضرب دو عدد موهومی یک عدد حقیقی است و به طور ذیل ضرب میگردند.

- $(10i) \cdot (5i) = (10) \cdot (5) \cdot i \cdot i = 50i^2 = 50(-1) = -50$
- $(11i) \cdot (6i) = (11) \cdot (6) \cdot i \cdot i = 66i^2 = 66(-1) = -66$
- $(4i)(2i)(6i) = (4 \cdot 2 \cdot 6)i \cdot i \cdot i = 48i^3 = 48i^2i = -48i$
- $(\sqrt{4}i)(\sqrt{9}i) = \sqrt{4 \cdot 9} \cdot i \cdot i = \sqrt{36} \cdot i^2 = 6 \cdot -1 = -6$
- $(\sqrt{3}i)(\sqrt{12}i) = \sqrt{3 \cdot 12} \cdot i \cdot i = \sqrt{36} \cdot i^2 = 6 \cdot -1 = -6$

d . تقسیم اعداد موهومی: حاصل تقسیم دو عدد موهومی یک عدد حقیقی است و به طور ذیل تقسیم میگردند.

$$1) \frac{8i}{2i} = 4$$

$$2) \frac{5i}{7i} = \frac{5}{7}$$

$$3) \frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$4) \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}i}{\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

$$5) \frac{5i^{17}}{i^{10}} + \sqrt{-16} = \frac{5 \cdot i^{16} \cdot i}{(i^2)^5} + 4i = \frac{5 \cdot (i^2)^8 \cdot i}{(-1)^5} = \frac{5 \cdot (-1)^8 \cdot i}{-1} = -5i$$

نوت: در عملیه های جمع و ضرب اعداد موهومی خاصیت تبدیلی همیشه صادق است.

تیوری ست اعداد مختلط

تعریف: مجموعه اعداد موهومی و اعداد حقیقی را اعداد مختلط گویند و به شکل $z = a + bi$ نشان داده میشود طوری که در آن a قسمت حقیقی و bi قسمت موهومی عدد مختلط میباشد. ست اعداد مختلط این طور تعریف میشود:

$$C = \{Z/Z = a + bi, a, b \in IR, i^2 = -1\}$$

عدد مختلط z را به شکل جوره مرتب نیز نوشته کرده میتوانیم:

$$Z = a + bi = (a, b), \quad Z = a - bi = (a, -b)$$

اگر $a = 0$ شود پس $Z = 0 + bi \Rightarrow bi$ که bi یک عدد خالص موهومی می باشد و اگر $b = 0$ باشد پس، $Z = a + 0i \Rightarrow a$ می شود که a یک عدد خالص حقیقی می باشد. به یاد داشته باشید که اعداد مختلط مانند اعداد حقیقی خاصیت ترتیب را ندارند.

شکل معیاری یک عدد مختلط:

شکل معیاری یک عدد مختلط $Z = a + bi$ میباشد که در آن a قسمت حقیقی و bi قسمت موهومی آن است.

جدول زیر نمایش عدد های فوق را به شکل معیاری اعداد مختلط ارائه می نماید.

شکل معیاری	اعداد مختلط
$0 + 6i$	$6i$
$-9 + 0i$	-9
$0 + 0i$	0
$9 - i$	$9 - i$
$-1 + i$	$i - 1$

عدد صفری مختلط:

عددی است که هر دو قسمت حقیقی و موهومی آن صفر باشند. $(a = 0, b = 0)$ بنابر آن $Z = a + bi = 0 + 0i = 0$

نوت: معادلات که در ست اعداد حقیقی حل ندارند در ست اعداد مختلط حل دارند.

تساوی اعداد مختلط:

اعداد $Z_1 = a_1 + b_1i$ و $Z_2 = a_2 + b_2i$ زمانی با همدیگر مساوی اند که فقط قسمت های حقیقی و موهومی آن ها با همدیگر مساوی باشند.

$$Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

مثلاً:

$$2 + 3i = 2 + 3i$$

مثال اول: اگر $Z_1 = \sqrt{2}x + \sqrt{3}yi$ و $Z_2 = -5 - 6i$ باشد با در نظر داشت $Z_1 = Z_2$ قیمت های x و y را دریابید.

حل: چون $Z_1 = Z_2$ است لذا داریم که:

$$\sqrt{2}x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{3}y = -6 \Rightarrow y = -\frac{6}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}$$

مثال دوم: اگر $2 + mi = k + 3i$ باشد، در آن صورت قیمت عدد های حقیقی m و k را پیدا کنید.

حل: چون میدانیم که $Z_1 = Z_2$ است لذا داریم که:

$$2 + mi = k + 3i$$

$$k = 2 \quad m = 3$$

عملیات چهارگانه در اعداد مختلط

جمع اعداد مختلط:

اجرای عملیه طوری است که قسمت حقیقی را با قسمت حقیقی و قسمت موهومی را با قسمت موهومی جمع می نمائیم.

مثال اول: حاصل جمع اعداد مختلط $2 + 6i$ و $3 - \sqrt{9}i$ را دریابید.

حل:

$$(2 + 3) + (6 - \sqrt{9})i = 5 + 3i$$

مثال دوم: اگر $z_1 = 2 - 3i$ و $z_2 = 3 + 4i$ باشد $z_1 + z_2$ را پیدا نمائید.

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3 + 4)i = 5 + i$$

مثال سوم: جمع نمائید. $(2 + 5i) + (3 + 4i)$

حل:

$$(2 + 5i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (5 + 4)i = 5 + 9i$$

عنصر عینیت در عملیه جمع اعداد مختلط:

عنصر عینیت در عملیه جمع اعداد مختلط عبارت از $0 + 0i$ می باشد. زیرا که:

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$$

معکوس جمعی اعداد مختلط:

معکوس جمعی یک عدد مختلط عبارت از عددیست که هرگاه با عدد اولی جمع شود نتیجه حاصل جمع صفر گردد.

معکوس جمعی عدد $a + bi$ عبارت از $-a - bi$ می باشد زیرا که:

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

مثال اول: معکوس جمعی عدد مختلط $2 + 3i$ را دریابید.

حل:

$$2 + 3i + Z = 0 \Rightarrow Z = -2 - 3i$$

مثال دوم: معکوس جمعی عدد مختلط $-5i$ را دریابید.

$$-5i + Z = 0 \Rightarrow Z = +5i$$

مثال سوم: معکوس جمعی عدد مختلط $8 + 11i$ را دریابید.

$$8 + 11i + Z = 0 \Rightarrow Z = -8 - 11i$$

مثال چهارم: معکوس جمعی عدد مختلط $(2, -3)$ را دریابید.

$$2 - 3i + Z = 0 \Rightarrow Z = -2 + 3i \Rightarrow (-2, 3)$$

عملیه تفریق اعداد مختلط:

حاصل تفریق دو عدد مختلط عددی است که قسمت حقیقی آن از حاصل تفریق قسمت های حقیقی و قسمت موهومی آن از حاصل تفریق قسمت های موهومی به دست آمده باشد. یعنی:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

مثال اول:

$$(-4 + 3i) - (6 - 7i) = (-4 + 3i) + (-6 + 7i) = -10 + 10i$$

مثال دوم:

$$(12 - 5i) - (8 - 3i) = (12 - 8) + (-5 + 3)i = 4 - 2i$$

مثال سوم:

$$(5 - i) - (7 + 3i) = 5 - i - 7 - 3i = -2 - 4i$$

عنصر عینیت در عملیه تفریق اعداد مختلط:

$0 + 0i$ عنصر عینیت در عملیه تفریق اعداد مختلط می باشد. زیرا که:

$$(a + bi) - (0 + 0i) = a + bi - 0 - 0i = a + bi$$

ضرب اعداد مختلط:

عملیه ضرب اعداد مختلط را با در نظر داشت $i^2 = -1$ چنین ضرب می نمایم.

مثال ها:

$$1) Z_1 = 2 + 3i, Z_2 = 5 - 2i, Z_3 = 2 + 7i$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (2 + 3i)(5 - 2i) = 10 - 4i + 15i - 6i^2 = 10 + 11i - 6(-1)$$

$$\Rightarrow 10 + 11i + 6 = 16 + 11i$$

$$2) Z_1 \cdot Z_3 = (2 + 3i)(2 + 7i) = 4 + 14i + 6i + 21i^2 = 4 + 20i + 21(-1) \\ \Rightarrow 4 + 20i - 21 = -17 + 20i$$

$$3) Z_2 \cdot Z_3 = (5 - 2i)(2 + 7i) = 10 + 35i - 4i - 14i^2 \\ = 10 + 31i - 14(-1) \Rightarrow 10 + 31i + 14 = 24 + 31i$$

عنصر عینیت در ضرب اعداد مختلط:

عنصر عینیت در عملیه ضرب اعداد مختلط عبارت از $1 + 0i$ می باشد زیرا که:

$$(a + bi)(1 + 0i) = a + (a \cdot 0)i + bi + (b \cdot 0)i^2 = a + bi$$

مزدوج اعداد مختلط:

مزدوج عدد مختلط $Z = a + bi$ به $\bar{Z}$ نشان داده میشود و دارای شکل ذیل میباشد $\bar{Z} = a - bi$ یعنی قسمت های حقیقی Z و $\bar{Z}$ با هم مساوی و هم علامه اما قسمت موهومی آن مختلف علامه میباشد.

مثال اول: مزدوج اعداد ذیل را بنویسید؟

$$Z_1 = 4 + 6i \Rightarrow \bar{Z}_1 = 4 - 6i$$

$$Z_2 = x + yi \Rightarrow \bar{Z}_2 = x - yi$$

مثال دوم: اگر $Z = 3 + 4i$ و $\bar{Z} = 3 - 4i$ باشد قیمت های $Z - \bar{Z}$ ، $Z + \bar{Z}$ و $Z \cdot \bar{Z}$ را به دست آرید.

$$Z - \bar{Z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 3 + 4i - 3 + 4i = 8i$$

$$Z + \bar{Z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 3 + 4i + 3 - 4i = 6$$

$$Z \cdot \bar{Z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

برای ضرب نمودن یک عدد مختلط در مزدوج آن از رابطه ذیل استفاده می نمائیم.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Z \cdot \bar{Z} = a^2 + b^2}$$

مثال اول: حاصل ضرب عدد مختلط $5 + 2i$ را در مزدوج آن دریابید.

$$(5 + 2i)(5 - 2i) = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29$$

مثال دوم: حاصل ضرب عدد مختلط $6 - 4i$ را در مزدوج آن دریابید.

$$(6 - 4i)(6 + 4i) = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

مثال سوم: حاصل افاده $(4 + 5i)(4 - 5i) + (3 - i)(3 + i)$ را دریابید.

حل:

$$(4 + 5i)(4 - 5i) + (3 - i)(3 + i)$$

$$(4^2 + 5^2) + (3^2 + 1^2) = 16 + 25 + 9 + 1 = 51$$

معکوس ضربی یک عدد مختلط:

میدانیم که مزدوج عدد $a + bi$ عبارت از $a - bi$ است، و

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (b^2i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

برای دریافت معکوس ضربی $a + bi$ عدد $\frac{1}{a+bi}$ را به شکل معیاری یک عدد مختلط می نویسیم،

سپس صورت و مخرج را ضرب $\frac{1}{a+bi}$ می نمائیم. $(a - bi)$ مزدوج مخرج می باشد

$$\frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i}$$

معکوس ضربی عدد $(a + bi)$ عبارت از $\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right)$ می باشد.

مثال اول: معکوس ضربی عدد $2 - 3i$ را دریابید.

$$\frac{1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال دوم: معکوس ضربی عدد $1 - i$ را دریابید.

$$\frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

مثال سوم: معکوس ضربی عدد $(7, 4)$ را دریابید.

$$Z = (7, 4) \Rightarrow Z = 7 + 4i$$

$$\frac{1}{7+4i} \cdot \frac{7-4i}{7-4i} = \frac{7-4i}{49+16} = \frac{7-4i}{65} = \frac{7}{65} - \frac{4}{65}i$$

تقسیم اعداد مختلط:

عملیه تقسیم در اعداد مختلط طوری صورت میگیرد که مزدوج مخرج را در صورت و مخرج ضرب نموده ساده سازی می نمائیم که این عملیه را گویا کردن نیز میگویند، مانند:

مثال اول: هرگاه $Z_1 = 2 + 3i$ و $Z_2 = 3 + 2i$ باشد قیمت های $\frac{Z_2}{Z_1}$ و $\frac{Z_1}{Z_2}$ را دریابید.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2+3i}{3+2i} = \frac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i+9i-6i^2}{9-6i+6i-4i^2} = \frac{6+5i+6}{9+4} = \frac{12+5i}{13} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{3+2i}{2+3i} = \frac{(3+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6-9i+4i-6i^2}{4-6i+6i-9i^2} = \frac{6-5i+6}{4+9} = \frac{12-5i}{13} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$$

مثال دوم: حاصل تقسیم $\frac{4+3i}{2+5i}$ را به دست آرید.

حل: مزدوج مخرج یعنی $2 - 5i$ را در صورت و مخرج ضرب می نمائیم.

$$\frac{4+3i}{2+5i} = \frac{(4+3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2} = \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i$$

مثال سوم: حاصل افاده $\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i}$ را به دست آرید.

$$\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2+i)(2+i) + (2-i)(2-i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i+2i+i^2 + 4-2i-2i+i^2}{2^2+1^2} = \frac{8+2i^2}{4+1} = \frac{6}{5}$$

قیمت مطلق اعداد مختلط:

قیمت مطلقه اعداد مختلط $Z = a + bi$ به شکل $|Z|$ نشان داده میشود و مقدار آن مساوی است به:

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال اول: قیمت مطلقه عدد مختلط $Z_1 = 2 + 3i$ را دریابید.

حل:

$$|Z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

مثال دوم: قیمت مطلقه عدد مختلط $Z_2 = \sqrt{5} - 7i$ را دریابید.

حل:

$$|Z_2| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-7)^2} = \sqrt{5 + 49} = \sqrt{54}$$

مثال سوم: قیمت مطلقه عدد مختلط $Z = 1 + i$ را دریابید.

حل:

$$|Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

خاصیت های مزدوج یک عدد مختلط: اگر Z_1 و Z_2 دو عدد مختلط باشند:

$$1) \overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$5) Z + \bar{Z} = 2x$$

$$2) \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$$

$$6) Z - \bar{Z} = 2yi$$

$$3) \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = \overline{Z_2} \cdot \overline{Z_1}$$

$$7) \bar{\bar{Z}} = Z$$

$$4) \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

دریافت جذر المربع اعداد مختلط

برای دریافت نمودن جذر مربع اعداد مختلط از فرمول ذیل استفاده می نمائیم:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

مثال اول: جذر مربع عدد $\sqrt{5 + 12i}$ را دریابید؟

$$\begin{aligned} \sqrt{5 + 12i} &= \sqrt{\frac{\sqrt{5^2+12^2}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5^2+12^2}-5}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{13+5}{2}} + i\sqrt{\frac{13-5}{2}} &= \sqrt{9} + i\sqrt{4} = \pm 3 + 2i = \boxed{3 + 2i} \end{aligned}$$

مثال دوم: جذر مربع عدد $\sqrt{4 - 3i}$ را دریابید؟

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - 3i} &= \sqrt{\frac{\sqrt{4^2+3^2}+4}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{4^2+3^2}-4}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{49+9}+4}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{49+9}-4}{2}} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{25+7}{2}} - i\sqrt{\frac{25-7}{2}} &= \sqrt{16} - i\sqrt{9} = \pm 4 - 3i = \boxed{4 - 3i} \end{aligned}$$

مثال سوم: جذر مربع عدد $\sqrt{a^2 - b^2 + 2abi}$ را دریابید؟

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{a^2 - b^2 + 2abi} \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} + (a^2 - b^2)}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} - (a^2 - b^2)}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} + (a^2 - b^2)}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} - (a^2 - b^2)}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} + (a^2 - b^2)}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} - (a^2 - b^2)}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^2} + (a^2 - b^2)}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^2} - (a^2 - b^2)}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2}} + i \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2a^2}{2}} + i \sqrt{\frac{2b^2}{2}} \Rightarrow \boxed{a + bi}
 \end{aligned}$$

مسائل تطبیقی جذر

(1) قیمت افاده جذری $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ را دریابید.

حل:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{5-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(2) قیمت افاده جذری $(2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}})(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})$ را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned}
 (2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}})(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) &= 2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \\
 &= 2^{\frac{4}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{2}} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = \boxed{36}
 \end{aligned}$$

(3) $\frac{\sqrt{2.7} + \sqrt{5.4}}{\sqrt{0.1} + \sqrt{0.4}} = ?$

حل:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{2.7} + \sqrt{5.4}}{\sqrt{0.1} + \sqrt{0.4}} &= \frac{\sqrt{\frac{27-2}{9}} + \sqrt{\frac{54-5}{9}}}{\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9}}} = \frac{\sqrt{\frac{25}{9}} + \sqrt{\frac{49}{9}}}{\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9}}} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{7}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{12}{3}}{\frac{3}{3}} = \frac{4}{1} = \boxed{4}
 \end{aligned}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

(4) عدد $\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}$ مساوی است به:

حل:

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{4} \cdot 2}} = \boxed{\sqrt[8]{8}}$$

(5) اگر $x = \sqrt{5} + 2$ و $y = \sqrt{5} - 2$ باشد آنگاه قیمت $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ عبارت است از:

حل:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+2) + (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{5+4\sqrt{5}+4+5-4\sqrt{5}+4}{5-4} = 18$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 18}$$

(6) $\sqrt{0.25} + \sqrt{1.21} + \sqrt{1.44} = ?$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{0.25} + \sqrt{1.21} + \sqrt{1.44} &= \sqrt{\frac{25}{100}} + \sqrt{\frac{121}{100}} + \sqrt{\frac{144}{100}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{11}{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{12}{10}\right)^2} = \frac{5}{10} + \frac{11}{10} + \frac{12}{10} = \frac{28}{10} = \boxed{2.8} \end{aligned}$$

(7) $\frac{\sqrt[3]{(-3)^3} - \sqrt[6]{(-3)^6}}{-\sqrt{(-2)^2} - \sqrt[5]{-243}} = ?$

حل:

$$\frac{\sqrt[3]{(-3)^3} - \sqrt[6]{(-3)^6}}{-\sqrt{(-2)^2} - \sqrt[5]{-243}} = \frac{-3 - |-3|}{-|-2| - (-3)} = \frac{-3-3}{-2+3} = \frac{-6}{1} = \boxed{-6}$$

(8) $\frac{\sqrt{2.7} + \sqrt{5.4}}{\sqrt{0.1} + \sqrt{0.4}} = ?$

حل:

$$\frac{\sqrt{2.7} + \sqrt{5.4}}{\sqrt{0.1} + \sqrt{0.4}} = \frac{\sqrt{\frac{27}{10}} + \sqrt{\frac{54}{10}}}{\sqrt{\frac{1}{10}} + \sqrt{\frac{4}{10}}} = \frac{\sqrt{\frac{25}{9}} + \sqrt{\frac{49}{9}}}{\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9}}} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{7}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{12}{3}}{\frac{3}{3}} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$$

$$3\sqrt{147} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{108} = ? \quad (9)$$

حل:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{147} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{108} &= 3\sqrt{49 \cdot 3} + 2\sqrt{25 \cdot 3} - 5\sqrt{36 \cdot 3} \\ &= 3 \cdot 7\sqrt{3} + 2 \cdot 5\sqrt{3} - 5 \cdot 6\sqrt{3} \\ &= 21\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 30\sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$3\sqrt{40} - \sqrt{250} + \frac{20}{\sqrt{10}} = ? \quad (10)$$

حل:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{40} - \sqrt{250} + \frac{20}{\sqrt{10}} &= 3\sqrt{4 \cdot 10} - \sqrt{25 \cdot 10} + \frac{20\sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} \\ &= 3 \cdot 2\sqrt{10} - 5\sqrt{10} + \frac{20\sqrt{10}}{10} = 6\sqrt{10} - 5\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = \boxed{3\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$18\sqrt{\frac{8}{27}} - \sqrt{150} = ? \quad (11)$$

حل:

$$\begin{aligned} 18\sqrt{\frac{8}{27}} - \sqrt{150} &= 18\sqrt{\frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3}} - \sqrt{25 \cdot 6} \\ &= 18 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} - 5\sqrt{6} = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 5\sqrt{6} \\ &= 12 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} - 5\sqrt{6} \\ &= 12 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} - 5\sqrt{6} = \boxed{-\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{18} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = ? \quad (12)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{18} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{2}\sqrt{16 \cdot 2} - \frac{1}{3}\sqrt{9 \cdot 2} + \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{18}}{3} &= 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{3} = \boxed{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{25}} = ? \quad (13)$$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{25}} &= \sqrt{\frac{25}{144}} \cdot \sqrt{\frac{16}{225}} = \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{15}\right)^2} \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{15} = \boxed{\frac{1}{9}} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{28} + \sqrt{63} + \sqrt{7}}{\sqrt{150} + \sqrt{24}} = ? \quad (14)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{28} + \sqrt{63} + \sqrt{7}}{\sqrt{150} + \sqrt{24}} &= \frac{\sqrt{4 \cdot 7} + \sqrt{9 \cdot 7} + \sqrt{7}}{\sqrt{25 \cdot 6} + \sqrt{4 \cdot 6}} = \frac{2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + \sqrt{7}}{5\sqrt{6} + 2\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{7}}{7\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{6}}{7\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7}} \\ &= \frac{6 \cdot 7 \cdot \sqrt{6}}{7 \cdot 6 \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \boxed{\sqrt{\frac{6}{7}}} \end{aligned}$$

$$\frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} + \frac{2 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = ? \quad (15)$$

حل:

$$\frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} + \frac{2 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{(2 - \sqrt{5})^2 + (2 + \sqrt{5})^2}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{4 - 4\sqrt{5} + 5 + 4 + 4\sqrt{5} + 5}{4 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5} = \frac{18}{-1} = \boxed{-18}$$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt[8]{2} = ? \quad (16)$$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt[8]{2} &= \sqrt[8]{2^7 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2} = \sqrt[8]{2^{16}} = 2^2 = \boxed{4} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = ? \quad (17)$$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} &= \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})} \\ &= \sqrt{\sqrt{7^2} - \sqrt{21} + \sqrt{21} - \sqrt{3^2}} = \sqrt{7 - 3} = \sqrt{4} = \boxed{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{0.09} + \sqrt{0.25} + \sqrt{0.0016} = ? \quad (18)$$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{0.09} + \sqrt{0.25} + \sqrt{0.0016} &= \sqrt{\frac{9}{100}} + \sqrt{\frac{25}{100}} + \sqrt{\frac{16}{10000}} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = \frac{30+50+4}{100} = \frac{84}{100} = \boxed{\frac{21}{25}} \end{aligned}$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{20}} - \sqrt{\frac{1}{5}} = ? \quad (19)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{20}} - \sqrt{\frac{1}{5}} &= \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} - \frac{8 \cdot \sqrt{20}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \\ \frac{10\sqrt{5}}{5} - \frac{8 \cdot 2\sqrt{5}}{20} - \frac{\sqrt{5}}{5} &= 2\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= 2\sqrt{5} - \left(\frac{5\sqrt{5}}{5}\right) = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \boxed{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$3 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} + 2\sqrt{5} + 5 \cdot \sqrt{\frac{125}{4}} = ? \quad (20)$$

حل:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} + 2\sqrt{5} + 5 \cdot \sqrt{\frac{125}{4}} &= \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{1} + \frac{5\sqrt{125}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{25 \cdot 5}}{2} = \frac{32\sqrt{5}}{2} = \boxed{16\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5^5} \cdot \sqrt[4]{5^3} = ? \quad (21)$$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5^5} \cdot \sqrt[4]{5^3} &= \sqrt[12]{(5^2)^4 \cdot (5^5)^2 \cdot (5^3)^3} = \sqrt[12]{5^8 \cdot 5^{10} \cdot 5^9} \\ &= \sqrt[12]{5^{27}} = \sqrt[4]{5^9} = \boxed{25\sqrt[4]{5}} \end{aligned}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = ? \quad (22)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \boxed{5-\sqrt{15}} \end{aligned}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$\sqrt{72 + \sqrt{72 + \sqrt{72 + \dots}}} = ? \quad (23)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad a = 72 \\ = \frac{1+\sqrt{1+4 \cdot 72}}{2} = \frac{1+\sqrt{1+188}}{2} = \frac{1+\sqrt{289}}{2} = \frac{1+17}{2} = \boxed{9} \end{aligned}$$

$$4\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{\frac{2}{3}} = ? \quad (24)$$

حل:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{\frac{2}{3}} &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \\ 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} &= 2\sqrt{6} - \sqrt{6} = \boxed{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{132 - \sqrt{132 - \sqrt{132 \dots}}} = ? \quad (25)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad a = 132 \\ \sqrt{132 - \sqrt{132 - \sqrt{132 \dots}}} = \frac{-1+\sqrt{1+4 \cdot 132}}{2} = \frac{-1+23}{2} = \frac{22}{2} = \boxed{11} \end{aligned}$$

$$4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{54} + 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = ? \quad (26)$$

حل:

$$\begin{aligned} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{54} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} &= \frac{4\sqrt{6}}{2} - \sqrt{9 \cdot 6} + \frac{3\sqrt{6}}{3} \\ &= 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\sqrt{1.44} - \sqrt{19.6} + \sqrt{\frac{490}{25}} = ? \quad (27)$$

حل:

$$\begin{aligned} = \sqrt{\frac{144}{100}} - \sqrt{\frac{196}{10}} + \sqrt{\frac{490}{25}} &= \frac{12}{10} - \frac{14}{\sqrt{10}} + \frac{7\sqrt{10}}{5} \\ &= \frac{12}{10} - \frac{14\sqrt{10}}{10} + \frac{7\sqrt{10}}{5} = \frac{12}{10} - \frac{7\sqrt{10}}{5} + \frac{7\sqrt{10}}{5} = \frac{12}{10} = \boxed{1.2} \end{aligned}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right) = ? \quad (28)$$

حل:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1}}} = ? \quad (29)$$

حل:

$$\frac{2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1}}} = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}+1}{1}}} = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}-1}} = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}} = \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

$$\frac{\sqrt{45}+\sqrt{20}}{4\sqrt{20}-\sqrt{5}} = ? \quad (30)$$

حل:

$$\frac{\sqrt{45}+\sqrt{20}}{4\sqrt{20}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{4 \cdot 5}}{4\sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{8\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{7\sqrt{5}} = \boxed{\frac{5}{7}}$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6} = ? \quad (31)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6} &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - 2\sqrt{6} = \frac{3+\sqrt{6}+\sqrt{6}+2}{1} - 2\sqrt{6} \\ &= 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \boxed{5} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = ? \quad (32)$$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{10}{\sqrt[3]{25}} = ? \quad (33)$$

حل:

$$\frac{10}{\sqrt[3]{25}} = \frac{10}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 5}} = \frac{10\sqrt[3]{5}}{5} = \boxed{2\sqrt[3]{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{3}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{5}} = ? \quad (34)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{3}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \frac{3(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})(\sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} - \frac{3(\sqrt{3}+1)}{3-1} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1-3\sqrt{3}-3}{2} + \sqrt{3} = \frac{-2\sqrt{3}-4}{2} + \sqrt{3} \\ &= \frac{2(-\sqrt{3}-2)}{2} + \sqrt{3} = -\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = \boxed{-2} \end{aligned}$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{4-\sqrt[3]{2}}\right)}{\sqrt[3]{2}-1} = ? \quad (35)$$

حل:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{4-\sqrt[3]{2}}\right)}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{4^2-\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{16-2}}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2-2}}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{2\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{2(\sqrt[3]{2}-1)}{\sqrt[3]{2}-1} = \boxed{2}$$

(36) قیمت $(2+i)^2$ را دریابید.

حل:

$$(2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 4 + 2i + 2i + i^2 = 4 + 4i - 1 = \boxed{3+4i}$$

(37) اگر $Z = 4 - 3i$ باشد، $8Z - Z^2$ را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned} 8Z - Z^2 &= 8(4 - 3i) - (4 - 3i)^2 \\ &= 32 - 24i - (4 - 3i)(4 - 3i) \\ &= 32 - 24i - 16 - 12i - 12i + 9i^2 \\ &= 16 - 24i - 9 = \boxed{15 - 24i} \end{aligned}$$

(38) خارج قسمت $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ مساوی است به:

حل:

$$\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}} = \frac{6+6i}{3+3i} = \frac{2(3+3i)}{3+3i} = \boxed{2}$$

2: کمیت غیر مستقل یا تابع (Function)

کمیت غیر مستقل عبارت از کمیت ایست که هر قیمت را به خود گرفته نتواند، بلکه با در نظر داشت قیمت های کمیت مستقل به خود قیمت میگیرد.

$$y = x + 3 \quad \begin{array}{c} \text{مستقل} \uparrow \\ \text{غیر مستقل} \leftarrow \end{array}$$

حد الجبری (Term):

حد عبارت از کمیت است به شکل حاصل ضرب که بر علاوه عدد چند متحول نیز داشته باشد. یعنی حد در حقیقت یک حاصل ضرب است.

$$2xy, 4x^2y^2z^2, \frac{3}{4}xy, \frac{1}{2}\sqrt{xyz}, -2\alpha\beta, a^2, 4a^2b^2, b^2c^2z^2, \frac{1}{\sqrt{2}}xy$$

حدود مشابه (Liketerms):

حدودیکه از نظر متحول و توان متحول یکسان باشند بنام حدود مشابه یاد میشوند.

$$\left. \begin{array}{l} 4ab \\ \frac{1}{2}ab \\ \sqrt{3}ab \end{array} \right\} \text{حدود مشابه} \quad \left. \begin{array}{l} -5xy^3z^2 \\ +3xy^3z^2 \\ 7.2xy^3z^2 \end{array} \right\} \text{حدود مشابه}$$

حدود غیر مشابه (Unliketerms):

حدودیکه از نظر متحول یا از نظر توان متحول و یا از نظر هر دو آنها متفاوت باشد بنام حدود غیر مشابه یاد میشود.

$$\left. \begin{array}{l} -3a^2b \\ 4ab \\ +3ab^2 \end{array} \right\} \text{حدود غیر مشابه} \quad \left. \begin{array}{l} +4xyz \\ 3x^2yz \\ 0.2xy \end{array} \right\} \text{حدود غیر مشابه}$$

افاده ها، عبارات یا جملات الجبری (Algebraic Expression):

افاده الجبری آنست که از یک ثابت یا یک متحول و یا از ترکیب ثابت ها و متحول ها تشکیل شده باشد.

$$4x + 5 + \frac{15}{t^2}, x^2 - x + 1, \sqrt{3}x, -12$$

و یا مجموعه حدود غیر مشابه بنام افاده الجبری یاد میشود.

$$2x^2y + (3xy) + (-6p^2) + 9 \Rightarrow 2x^2y + 3xy - 6p^2 + 9$$

$$4x^3 + (-3x^2) + (+9x) + (-30) \Rightarrow 4x^3 - 3x^2 + 9x - 30$$

ضریب (Coefficient):

قسمت عددی حد الجبری بنام ضریب یاد میگردد.

یا به فکتور عددی (Numerical Factor) یک حد، ضریب می گویند.

مثال اول: در حد الجبری $3x^2yz$ عدد 3 ضریب حد مذکور است.

مثال دوم: در افاده $y - \frac{1}{2}$ عدد $-\frac{1}{2}$ ضریب می باشد.

مثال سوم: در افاده x عدد یک ضریب می باشد.

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

انواع افاده های الجبری:

افاده های الجبری به صورت عموم به سه نوع است.

1. افاده الجبری پولینومی یا تام (Polynomial Algebraic Expressions)

عبارت از افاده است که توان متحولین آن در ست اعداد مکمل شامل باشد.

مثالها:

- | | |
|-------------------|----------------|
| 1) $x^3 - x + 1$ | 5) 88 |
| 2) $2x^2 + x - 1$ | 6) $6a^2 - 4a$ |
| 3) $x - 1$ | 7) -12 |
| 4) $\sqrt{2}x$ | |

یادداشت: هر پولینوم، یک افاده الجبری ناطق می باشد؛ اما هر افاده الجبری ناطق، پولینوم نمی باشد. به طور مثال: $x^3 + \frac{y}{x^2} + \frac{y}{x} + y^3$ یک افاده ناطق است، لیکن پولینوم نیست.

2. افاده الجبری ناطق یا کسری (Rational Algebraic Expressions)

عبارت از افاده است که به شکل کسری (نسبتی) نوشته شده بتواند در صورتیکه مخرج آن خلاف صفر باشد.

و یا اگر بتوانیم که یک افاده الجبری را به شکل $\frac{p}{q}$ بنویسیم طوری که p و q پولینوم ها میباشند.

$$x^2 - \frac{1}{x^2}, \frac{x^2-1}{1}, \frac{x^2+3x+2}{x-1}$$

3. افاده الجبری غیر ناطق یا جذری (Irrational Algebraic Expressions)

عبارت از افاده است که به شکل کسری (نسبتی) نوشته شده نمیتواند. و یا عبارت از افاده الجبری است که آن را به شکل خارج قسمت دو پولینوم نوشته کرده نمیتوانیم.

$$\sqrt{xy}, \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}, \sqrt{y^2+1}$$

پولینوم (Polynome):

افاده الجبری یک یا چند حده که توان های حروف آن در ست اعداد مکمل شامل باشند، پولینوم نامیده میشود.

$$x^3 - x + 1, 2x^2 + x - 1, x - 1, 12$$

یک پولینوم دارای مشخصات ذیل میباشد:

- توان تمام متحولین اعداد مکمل باشند.
- در مخرج متحول نداشته باشد.
- متحول تحت جذر نباشد.

شکل عمومی پولینوم:

پولینوم که دارای یک متحول باشد شکل عمومی آن قرار ذیل است:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

n یک عدد مکمل و $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی اند. اگر $a_n \neq 0$ باشد پس درجه پولینوم n است.

مثال اول: پولینوم $p(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ را در نظر میگیریم داریم که:

$$a_3 = -5, \quad a_2 = -1, \quad a_1 = -1, \quad a_0 = 12, \quad n = 3$$

مثال دوم: پولینوم $11x^2 - 1$ را در نظر میگیریم داریم که:

$$n = 2, \quad a_2 = 11, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -1$$

اقسام پولینوم:

1. یک حده یا مونوم (Monomial)

افاده الجبری که از یک حد تشکیل شده باشد بنام مونوم یا یک حده یاد میگردد.

$$2x, \quad 4xy, \quad \frac{-3}{7}ab \dots$$

2. دو حده یا بینوم (Binomial)

افاده که دارای دو حد باشند بنام بینوم یا دو حده یاد می گردد.

$$3x + 4, \quad ax + b, 4x^2 - 7$$

3. سه حده یا ترینوم (Trinomial)

افاده های الجبری که از سه حد تشکیل شده باشند بنام ترینوم یا سه حده یاد می گردد. مانند:

$$2x^2 - 3x + 5, \quad a + b + c, \quad ax^2 + bx + c$$

افاده چندین حده یا ملتی نوم (Multinomial)

هر افاده که در تشکیل آن زیاد تر از یک حد موجود باشد به نام ملتی نوم یاد میشود هر یک از افاده های ذیل نمونه یی از ملتی نوم میباشد.

$$3x^2 + 5xy + 2, \quad \sqrt[3]{x} + 4xy, \quad 2x^2 - 5x + \frac{2x}{y}, \quad \sqrt{2x} - \frac{1}{y} + 1$$

نوت: هر پولینوم یک ملتی نوم است ولی هر ملتی نوم یک پولینوم نیست.

درجه مونوم (Degree of a Monomial):

مجموعه توان های حروف که در یک مونوم شامل باشند به نام درجه آن یاد میشود. مانند:

مثال اول: درجه مونوم $4x^3$ عبارت از 3 است.

مونوم $3x^2yz^4$ درجه 7 است. ($2 + 1 + 4 = 7$)

مثال دوم: درجه مونوم 5 عبارت از صفر است یعنی: $5 = 5x^0$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

درجه مونوم به دو نوع است 1. درجه کلی مونوم 2. درجه مونوم از نظر متحول

اگر در یک مونوم چند متحول موجود باشد می توانیم درجه آنرا نظر به هر حرف تعیین نمائیم. مثلاً اگر مونوم $6x^2y^3z^5$ را در نظر گیریم، درجه کلی آن عبارت از 10 میباشد و نظر به x درجه دوم، نظر به y درجه سوم و نظر به z درجه پنجم می باشد.

مثال اول: درجه مونوم $\frac{3}{4}x^5y^3z^4$ را نظر به هر متحول و درجه کلی آنرا تعیین نمائید.

- درجه مونوم از نظر x عبارت از 5 میباشد.
- درجه مونوم از نظر y عبارت از 3 میباشد.
- درجه مونوم از نظر z عبارت از 4 میباشد.
- درجه کلی آن عبارت از 12 میباشد.

مثال دوم: در مونوم zy^33x^5 درجه آن نظر به متحول x مساوی به 5 و نظر به y درجه 3 و نسبت به z درجه 1 است.

مثال سوم: در مونوم $3x^5y^3z$ درجه آن نسبت به y و z درجه 4 و نسبت به x ، y و z درجه 9 میباشد.

درجه پولینوم (Degree of a Polynomial):

درجه یک پولینوم عبارت از بلند ترین درجه مونوم آن است.

$$2x^3y + 3x^2y^5 + 4xy^5 + 4$$

به ملاحظه میرسد که درجه مونوم $3x^2y^5$ عبارت از 7 است، و نظر به حدود دیگر مونوم درجه بلندتر دارد. پس میگویم که پولینوم فوق درجه 7 است.

اگر پولینوم از چندین مجهول تشکیل شده باشد میتوانیم درجه آنرا نظر به هر مجهول تعیین نماییم.

$$4xy^2z^4 - 2x^3y^3z^2 + x^2y^4z$$

نظر به x درجه 3، نظر به y درجه 4 و نظر به z نیز درجه 4 میباشد.

مثال اول: درجه پولینوم $x^2 + 3xy + 4$ نظر به x درجه دوم می باشد.

مثال دوم: درجه پولینوم $xz^3 + 3x^2z^2 - 4x^3z$ نظر به x و z درجه چار میباشد.

پولینوم خطی (Linear Polynomial):

اگر درجه پولینوم یک باشد بنام پولینوم خطی یاد میشود که شکل عمومی آن $P(x) = ax + b$ میباشد.

$$3x + 4, \quad -5x + 2, \quad -x - 1$$

پولینوم درجه دوم (Quadratic Polynomial):

اگر درجه یک پولینوم دو باشد بنام پولینوم درجه دوم یاد میشود که شکل عمومی آن $P(x) = ax^2 + bx + c$ میباشد.

$$2x^2 + 4x + 7, \quad -4x^2 + 2x - 6, \quad x^2 - x - 1$$

پولینوم درجه سوم (Cubic Polynomial):

اگر درجه یک پولینوم سه باشد بنام پولینوم درجه سوم یاد میشود که شکل عمومی آن $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ میباشد.

$$5x^3 - 2x^2 + x - 14, \quad x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

پولینوم ثابت

پولینومی است که درجه آن صفر باشد یا به عبارت دیگر پولینومی است که ضرایب تمام متحولین آن صفر باشد.

شکل عمومی پولینوم ثابت $P(x) = c$ است.

$$12, \quad -12, \quad 5, \quad 7$$

مثال: پولینوم $ax^2 + bx + c$ به کدام شرط یک پولینوم ثابت است.

$$a = b = 0, \quad c \neq 0$$

پولینوم صفری:

اگر حد ثابت پولینوم ثابت صفر باشد این نوع پولینوم به نام پولینوم صفری یاد میشود.

نوت: درجه پولینوم صفری تعریف نشده است.

شکل عمومی پولینوم صفری $P(x) = 0$ است.

مثال: پولینوم $ax^2 + bx + c$ به کدام شرط یک پولینوم صفری است.

$$a = b = c = 0$$

افاده هموجن (Homogeny Expression)

افاده هموجن افاده را میگویند که درجه تمام حدود آن باهم مساوی باشد.

- 1) $4x^2y^2 + axyz + 2x^4$
- 2) $2xyz^3 + 5x^3yz + 7x^5 + 4xy^4$
- 3) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
- 4) $a^2 + 2ab + b^2$

پولینوم مکمل (Perfect Polynome):

پولینوم مکمل پولینومی است که تمام حدود آن از بزرگترین توان متحول تا عدد ثابت موجود باشد.

$$4x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 6, \quad x^2 + 3x + 1$$

پولینوم ناقص (Depective Polynome):

هر پولینومی که مکمل نباشد بنام پولینوم ناقص یاد میشود.

$$4x^4 + 3x^2 - x + 6, \quad 5x^6 + 2x^3 + 8x^2 - x + 6$$

میتوانیم که پولینوم ناقص را با گذاشتن ضریب صفر مکمل کرد.

$$x^2 - 1 \Rightarrow x^2 + 0x - 1$$

$$2x^3 + 4x + 5 \Rightarrow 2x^3 + 0x^2 + 4x + 5$$

پولینوم منظم یا مرتب (Orderly Polynome):

پولینوم منظم عبارت از پولینوم است که توانهای متحولین آن به ترتیب (صعودی و یا نزولی) باشد.

$$6x^5 + 7x^4 - 2ax^3 + bx^2 + 5x - 3 \Rightarrow \text{ترتیب نزولی}$$

$$x^3 - 4x - 20 \Rightarrow \text{ترتیب نزولی}$$

$$8 + 2y + 5y^2 - 4y^3 + 6y^4 \Rightarrow \text{ترتیب صعودی}$$

$$1 + 5x^4 + 2x^7 \Rightarrow \text{ترتیب صعودی}$$

اگر توان های متحولین یک پولینوم از توان بلند به توان پائین ترتیب شده باشد، بنام ترتیب نزولی یا پولینوم نزولی و اگر از توان پائین به توان بالا ترتیب شده باشد، بنام ترتیب صعودی یا پولینوم صعودی یاد میشود.

$$x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{پولینوم نزولی}$$

$$1 + x + x^2 + 3x^3 + x^4 \quad \text{پولینوم صعودی}$$

اگر یک پولینوم از چندین حرف تشکیل شده باشد میتوانیم که آنرا نظر به هر حرف آن به شکل صعودی یا نزولی ترتیب کنیم. مانند پولینوم ذیل که نظر به x به شکل نزولی و نظر به y به شکل صعودی ترتیب شده.

$$x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 - 5y^4$$

مثال اول: پولینوم $P(y) = 4xy^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^3 + x^4 + y^5$ را نظر به y به شکل صعودی بنویسید.

حل:

$$P(y) = x^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$$

مثال دوم: پولینوم $P(x) = 4x^2 - 6x + 7 + 2x^4$ را کامل و مرتب نمائید.

حل:

$$P(x) = 2x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 6x + 7$$

مکمل و ترتیب نزولی

$$P(x) = 7 - 6x + 4x^2 + 0x^3 + 2x^4$$

مکمل و ترتیب صعودی

پولینوم غیر منظم:

پولینوم که توان های متحول آن ترتیب نزولی یا صعودی نداشته باشد بنام پولینوم غیر منظم یا غیر مرتب یاد میشود.

$$x^2 + 4 - 5x + 2x^3, \quad 3x - 10x^4 + 6x^2 - 5 + 2x^3$$

پولینوم های معادل (Equivalent Polynomials):

عبارت از پولینوم های اند که ضرایب حدود مشابه آن با هم مساوی باشند.

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 3x^2 + 7x - 4 = 3x^2 + 7x - 4 \end{array}$$

مثال اول: به کدام شرط پولینوم $a_2x^2 + a_1x + a_0$ به پولینوم $b_2x^2 + b_1x + b_0$ معادل میشود.

$$a_2 = b_2, \quad a_1 = b_1, \quad a_0 = b_0$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

پولینوم متجانس (Homogen Polynomial):

عبارت از پولینوم است که درجه تمام حدود آن با هم مساوی باشند. (افاده هموجن) مانند:

$$2x^2 + y^2 - z^2$$

$$8x^6 + 6x^4y^2 + 6x^2y^4 + y^6$$

پولینوم کثیر المتحول (Multivariable Polynomial):

اگر در یک پولینوم چندین متحول موجود باشد بنام پولینوم کثیر المتحول یاد میشود.

$$3xyz + 2pq + 6abc - 5$$

پولینوم مذکور دارای 8 متحول میباشد.

قیمت عددی یک پولینوم:

اگر در یک پولینوم به عوض متحول یک عدد حقیقی وضع نماییم یک عدد حقیقی به دست می آید که همین عدد حقیقی قیمت این پولینوم می باشد.

مثال اول: برای پولینوم $P(x) = 3x + 2$ قیمت $P(2)$ را دریابید.

$$P(x) = 3x + 2 \Rightarrow P(2) = 3 \cdot 2 + 2 \Rightarrow \boxed{P(2) = 8}$$

مثال دوم: برای پولینوم $P(x) = 2x^2 - 7x + 1$ قیمت های $P(0)$, $P(-1)$, $P(5)$ را دریابید.

$$P(5) = 2 \cdot 5^2 - 7(5) + 1 \Rightarrow \boxed{P(5) = 16}$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 7(-1) + 1 \Rightarrow \boxed{P(-1) = 10}$$

$$P(0) = 2 \cdot 0^2 - 7(0) + 1 \Rightarrow \boxed{P(0) = 1}$$

مثال سوم: برای پولینوم $P(x) = x^5 - x^3 - x - 1$ قیمت های $P(1)$, $P(-1)$, $P(0)$ را دریابید.

$$P(0) = 0^5 - 0^3 - 0 - 1 \Rightarrow \boxed{P(0) = -1}$$

$$P(-1) = (-1)^5 - (-1)^3 - (-1) - 1 \Rightarrow \boxed{P(-1) = 0}$$

$$P(1) = 1^5 - 1^3 - 1 - 1 \Rightarrow \boxed{P(1) = -2}$$

مثال چهارم: اگر $P(x) = 16x^3 - 8x^2 + \frac{3}{4}$ باشد $P\left(-\frac{1}{4}\right)$ را دریابید.

$$P\left(-\frac{1}{4}\right) = 16\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 8\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = 16\left(-\frac{1}{64}\right) - 8\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{-1-2+3}{4} = \frac{0}{4} = \boxed{0}$$

مثال پنجم: حجم استوانه از فرمول $V = \pi r^2 h$ به دست می آید که V حجم استوانه، r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه می باشد. اگر $r = 5\text{cm}$ و $h = 21\text{cm}$ باشد حجم استوانه را دریابید.

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \pi \cdot (5\text{cm})^2 \cdot (21\text{cm})$$

$$\pi \cdot 25\text{cm}^2 \cdot 21\text{cm} \Rightarrow \boxed{V = 525\pi\text{cm}^3}$$

متضاد افاده های الجبری: متضاد يك افاده الجبري عبارت از افاده ایست که هرگاه با افاده مذکور جمع شود حاصل آن صفر شود.

مثال: متضاد هر یک از افاده های ذیل را تعیین نمایید:

$$1) -8m + 7n \longrightarrow 8m - 7n$$

$$2) -6x - 11 + 4x^2 \longrightarrow 6x + 11 - 4x^2$$

$$3) -x^3 + 5xy^2 - y^3x^3 \longrightarrow +x^3 - 5xy^2 + y^3x^3$$

مجموعه ضرایب پولینوم

اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ یک پولینوم باشد پس مجموعه ضرایب آن عبارت است از:

$$\boxed{a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0}$$

و همچنان برای دریافت مجموعه ضرایب پولینوم $P(x)$ ، آنرا محاسبه می نمایم.

مثال اول: مجموعه ضرایب پولینوم $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ را به دست بیاورید.

حل: $p(1)$ پولینوم مذکور را دریافت می نمایم.

$$p(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 2 + 5 - 3 + 1 = \boxed{5}$$

اگر پولینوم متشکل از چندین حرف باشد، برای دریافت مجموعه ضرایب آن به عوض هر حرف عدد یک وضع می نمایم.

مثال دوم: مجموعه ضرایب پولینوم $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ را دریافت نمایید.

حل: برای دریافت مجموعه ضرایب پولینوم مذکور به عوض حروف x و y عدد (1) را وضع می نمایم.

$$\begin{aligned} & x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ &= 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1^3 + 1^4 \\ &= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = \boxed{16} \end{aligned}$$

مثال سوم: مجموعه ضرایب پولینوم $(x - 3y)^4$ را دریابید.

$$(1 - 3 \cdot 1)^4 = (1 - 3)^4 = (-2)^4 = \boxed{16}$$

مثال چهارم: مجموعه ضرایب $(7x^2 - 5x - 1)^{600}(2x^3 - 1)^{17}(x + 2)^4$ چند است.

$$\begin{aligned} & (7 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1)^{600} (2 \cdot 1^3 - 1)^{17} (1 + 2)^4 = \\ & (1)^{600} (1)^{17} (3)^4 = \boxed{81} \end{aligned}$$

مثال پنجم: مجموعه ضرایب پولینوم $P(x) = (3x^2 + 4x - 6)^{10} + (2x + 1)^5$ را دریابید.

$$\begin{aligned} P(x) &= (3x^2 + 4x - 6)^{10} + (2x + 1)^5 \\ P(1) &= (3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 6)^{10} + (2 \cdot 1 + 1)^5 \\ P(1) &= 1^{10} + 3^5 \Rightarrow \boxed{P(1) = 244} \end{aligned}$$

عملیات اساسی بالای پولینوم های الجبری

1. عملیه جمع پولینوم ها:

در عملیه جمع افاده های الجبری حدود مشابه با هم جمع و نیز حدود مشابه یکی از دیگری تفریق می شود

$$\begin{aligned} 1) \quad & (3x^3y + xy^2) + (x^3y + 5xy^2) = 4x^3y + 6xy^2 \\ 2) \quad & (-3cd^2 - 2cd + 5) + (9cd - 7cd^2 - 5) = -10cd^2 + 7cd \end{aligned}$$

مثال سوم: اگر $A = ab^2 + 3a$ ، $B = 2ab^2 + 3a - 2$ و $C = 2a + 4$ باشد $A + B + C$ را دریابید.

$$\begin{aligned} A + B + C &= (ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4) \\ &\Rightarrow 3ab^2 + 8a + 2 \end{aligned}$$

2. عملیه تفریق پولینوم ها:

در عملیه تفریق پولینوم های الجبری صرف علامه مفروق را تغیر داده و بعداً عیناً مانند عملیه جمع پولینوم های الجبری عمل می نمایم.

$$\begin{aligned} 1) \quad & (-x^3 + x^2 + x - 7) - (x^3 + x^2 + 4x + 3) = \\ & -x^3 + x^2 + x - 7 + x^3 - x^2 - 4x - 3 = \boxed{-3x - 10} \\ 2) \quad & (2b^2 - 2c^2 - 2d^2 - 2e^2) - (b^2 - 3c^2 - 3d^2 - 3e^2 - f^2) \\ & 2b^2 - 2c^2 - 2d^2 - 2e^2 - b^2 + 3c^2 + 3d^2 + 3e^2 + f^2 \\ & \Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} \end{aligned}$$

مثال سوم: مجموعه پولینوم های $4x + 6 - 2x^2$ و $3x^2 - x^3 - 3$ را از مجموع پولینوم های $x^3 + x^2 - 2x$ و $-2x^3 + 3x - 7$ تفریق نمایند.

حل:

$$\begin{aligned} & [(x^3 + x^2 - 2x) + (-2x^3 + 3x - 7)] - [(4x + 6 - 2x^2) + (3x^2 - x^3 - 3)] \\ & (-x^3 + x^2 + x - 7) - (-x^3 + x^2 + 4x + 3) \\ & -x^3 + x^2 + x - 7 + x^3 - x^2 - 4x - 3 \Rightarrow \boxed{-3x - 10} \end{aligned}$$

3. عملیه ضرب پولینوم ها:

در عملیه ضرب افاده های الجبری اول علامه ها بعداً ضرایب و در اخیر حروف یا متحولین را به اساس قوانین طاقت با هم ضرب می نمائیم.

a. ضرب مونوم در مونوم:

- 1) $-a^{2x}(-2a) = 2a^{2x+1}$
- 2) $(3x^2y^3)(5x^4y^5) = 15x^6y^8$
- 3) $(2a)(a) = 2a^2$
- 4) $(4rs)(2rs) = 4r^2s^2$
- 5) $(a^2)(a^2) = a^4$

b. ضرب مونوم در پولینوم:

اگر خواسته باشیم که یک مونوم را در یک پولینوم ضرب نمائیم، ما باید مونوم داده شده را در هر حد پولینوم داده شده ضرب نمائیم. مانند:

- 1) $x^3(x - x^2y^4) = x^4 - x^5y^4$
- 2) $-3b(5b^4 - 8b + 12) = -15b^5 + 24b^2 - 36b$
- 3) $(3x)(x + 5) = 3x^2 + 15x$
- 4) $(2x^2)(x^3 + 4x^2 - 2x + 6) = 2x^5 + 8x^4 - 4x^3 + 12x^2$
- 5) $-4s^2t^2(5s^2t + 6st - 2s^2t^2) = -20s^4t^3 - 24s^3t^3 + 8s^4t^4$

c. ضرب پولینوم در پولینوم:

اگر خواسته باشیم که یک پولینوم را در یک پولینوم ضرب نمائیم، ما باید هر حد پولینوم اولی را در هر حد پولینوم دومی ضرب نمائیم و بعداً آنرا ساده سازی نمائیم. مانند:

- 1) $(t - 4)(t + 5) = t^2 + 5t - 4t - 20 = t^2 + t - 20$
- 2) $(a + 3)(a + 4) = a^2 + 4a + 3a + 12 = a^2 + 7a + 12$
- 3) $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 2x - 4x - 8 = x^2 - 6x - 8$
- 4) $\left(y + \frac{2}{3}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}y + \frac{2}{6} = y^2 + \frac{7}{6}y + \frac{1}{3}$
- 5) $(2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$
- 6) $(\sqrt{2} + x)(x - \sqrt{2}) = \sqrt{2}x - \sqrt{4} + x^2 - \sqrt{2}x = x^2 - 2$
- 7) $(a - 3)(a + 4) = a^2 + 4a - 3a - 12 = a^2 + a - 12$
- 8) $\left(0.5xm - \frac{1}{2}\right)(4xm + 0.5) = 2x^2m^2 + 0.25xm - 2xm - 0.25$
 $= 2x^2m^2 - 1.75xm - 0.25$

همچنان میتوانیم برای ضرب پولینوم ها از فورمول های ذیل استفاده نمائیم.

- 1) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- 2) $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$

$$3) (x+5)(x+6) = x^2 + 11x + 30$$

$$4) (x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$$

$$5) (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$6) (x-4)(x+5)(x+3) = x^3 + 4x^2 - 17x - 60$$

d. مربع و مکعب یک پولینوم:

فرضاً پولینوم $(2x - y)$ را داشته باشیم، مربع آن مساوی است به:

$$(2x - y)^2 = (2x - y)(2x - y) = 4x^2 - 2xy + y^2$$

و مکعب آن مساوی است با:

$$(2x - y)^3 = (2x - y)(2x - y)(2x - y) = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

4. عملیه تقسیم پولینوم ها:

در عملیه تقسیم افاده های الجبری مانند عملیه ضرب اول علامه ها بعداً ضرایب و در اخیر حروف یا متحولین را به اساس قوانین طاقت تقسیم می نمائیم.

عملیه تقسیم پولینوم ها را در سه مرحله ذیل مورد بررسی قرار میدهیم:

a. تقسیم مونوم بالای مونوم:

درین عملیه ابتدا علایم، بعداً ضریب ها و در اخیر با در نظر داشت قوانین طاقت متحولین را تقسیم مینمائیم. مانند مثالهای ذیل:

$$1) \frac{18a^5b^5c^7}{3a^4bc^3} = 6ab^4c^4$$

$$2) \frac{6x^9y^3}{4x^2y^2} = \frac{3}{2}x^3y$$

$$3) \frac{-m^4}{-m^x} = m^{4-x}$$

$$4) \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

$$5) \frac{-x^2y}{-\frac{1}{3}xy} = +\frac{x}{\frac{1}{3}} = 3x$$

b. تقسیم پولینوم بالای مونوم:

درین عملیه هر یک از حدود پولینوم که در صورت کسر قرار دارد بطور جداگانه بالای مونوم که در مخرج قرار دارد تقسیم می نمائیم. مانند مثالهای ذیل:

$$1) \frac{x^4+5x^3-7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7$$

$$2) \frac{2xy^2-4x^2y^4}{-2xy^2} = \frac{2xy^2}{-2xy^2} - \frac{4x^2y^4}{-2xy^2} = -1 + 2xy^2$$

$$3) \frac{2m^2y-3x^3y^4+24xy^3}{-3xy^2} = \frac{2m^2y}{-3xy^2} - \frac{3x^3y^4}{-3xy^2} + \frac{24xy^3}{-3xy^2} \\ = -\frac{2m^2}{3xy} + x^2y^2 - 8y$$

$$4) \frac{6a^2b^3 - 2a^4b^7 + 5ab^3}{2ab} = \frac{6a^2b^3}{2ab} - \frac{2a^4b^7}{2ab} + \frac{5ab^3}{2ab} = 3ab^2 - a^3b^6 + \frac{5}{2}b^2$$

$$5) \frac{8x^3y^3 - 14x^2y^2 + 6xy^4}{2xy^2} = \frac{8x^3y^3}{2xy^2} - \frac{14x^2y^2}{2xy^2} + \frac{6xy^4}{2xy^2} = 4x^2y - 7xy + 3y^2$$

c. تقسیم پولینوم بالای پولینوم:

جهت تقسیم نمودن پولینوم بالای پولینوم مراحل ذیل را در نظر میگیریم.

1. در صورتیکه پولینوم های مقسوم و مقسوم علیه کامل نباشند اولاً آنها را کامل نموده و بصورت نزولی ترتیب می نمائیم.
2. حد اول مقسوم را بالای حد اول مقسوم علیه بر اساس تقسیم یک حده تقسیم نموده حاصل تقسیم را به حیث خارج قسمت انتخاب می نمائیم.
3. خارج قسمت انتخاب شده را در تمام حدود مقسوم علیه ضرب نموده، تحت پولینوم مقسوم از طرف چپ مینویسیم و عملیه تفریق را انجام می دهیم.
4. مراحل فوق را تا زمانی ادامه می دهیم که درجه مقسوم کمتر از درجه مقسوم علیه گردد یا باقیمانده صفر شود.

مثال اول: پولینوم $x^3 - 2x^2 - 11x - 6$ را بالای پولینوم $x + 2$ تقسیم نمائید.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 11x - 6 & x + 2 \\ \pm x^3 \pm 2x^2 & \hline -4x^2 - 11x & \\ \mp 4x^2 \mp 8x & \hline -3x - 6 & \\ \mp 3x \mp 6 & \hline 0 & \end{array}$$

مثال دوم: افاده $x^3 - 3x^2 - 23x + 30$ را بالای $x - 6$ تقسیم نمائید.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - 23x + 30 & x - 6 \\ \pm x^3 \mp 6x^2 & \hline 3x^2 - 23x & \\ \pm 3x^2 \mp 18x & \hline -5x + 30 & \\ \mp 5x \pm 30 & \hline 0 & \end{array}$$

مثال سوم: حاصل تقسیم $(13x + 2x^4 + 12 + 3x^3 - 4x^2) \div (3 + x^2 - 2x)$ را به دست آرید.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 13x + 12 & x^2 - 2x + 3 \\
 \pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2 & 2x^2 + 7x + 4 \\
 \hline
 7x^3 - 10x^2 + 13x & \\
 \pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x & \\
 \hline
 4x^2 - 8x + 12 & \\
 \pm 4x^2 \mp 8x \pm 12 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

مثال چهارم: حاصل تقسیم $(x^3 + 4x^2y - xy^2 + 3y^3) \div (x - y)$ را به دست آرید.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 4x^2y - xy^2 + 3y^3 & x - y \\
 \pm x^3 \mp x^2y & x^2 + 5xy + 4y^2 \\
 \hline
 5x^2y - xy^2 & \\
 \pm 5x^2y \mp 5xy^2 & \\
 \hline
 4xy^2 + 3y^3 & \\
 \pm 4xy^2 \mp 4y^3 & \\
 \hline
 7y^3 & \Rightarrow \text{باقیمانده}
 \end{array}$$

- برای امتحان عملیه تقسیم خارج قسمت را ضرب مقسوم علیه نموده جمع باقی مانده مینمائیم اگر مقسوم حاصل گردد عملیه تقسیم صحت دارد.

$$\begin{array}{r|l}
 P(x) & (x \pm a) \\
 \hline
 Q(x) & \\
 \hline
 R &
 \end{array}
 \Rightarrow \boxed{P(x) = Q(x)(x \pm a) + R}$$

d. تقسیم پولینوم های اعشاری:

در تقسیم نمودن پولینوم های اعشاری در صورتیکه مقسوم از مقسوم علیه کوچکتر باشد این پولینوم را بنام پولینوم اعشاری یاد می کند.

1) $(x + 3) \div (x^6 + 2)$

$$\begin{array}{r|l}
 x + 3 & x^6 + 2 \\
 \pm x \mp 2x^{-5} & x^{-5} - 2x^{-11} + 4x^{-17} - 8x^{-23} \\
 \hline
 -2x^{-5} + 3 & \\
 \mp 2x^{-5} \mp 4x^{-11} & \\
 \hline
 4x^{-11} + 3 & \\
 \pm 4x^{-11} \pm 8x^{-17} & \\
 \hline
 -8x^{-17} + 3 & \\
 \mp 8x^{-17} \mp 16x^{-23} & \\
 \hline
 16x^{-23} + 3 &
 \end{array}$$

$$2) (x^{-2} + 12) \div (x^5 + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^{-2} + 12 & x^5 + 1 \\ \hline \pm x^{-2} \pm x^{-7} & x^{-7} - x^{-12} + x^{-17} - x^{-22} \\ \hline -x^{-7} + 12 & \\ \hline \mp x^{-7} \mp x^{-12} & \\ \hline x^{-12} + 12 & \\ \hline \pm x^{-12} \pm x^{-17} & \\ \hline -x^{-17} + 12 & \\ \hline \mp x^{-17} \mp x^{-22} & \\ \hline x^{-22} + 12 & \end{array}$$

نامگذاری پولینوم

هر پولینوم نظر به تعداد مجهولات و بزرگترین توان آن (درجه پولینوم) به خود یک نام میگیرد. پولینوم یک مجهوله به پولینومی گفته میشود که فقط دارای یک مجهول باشد، پولینومی دو مجهوله به پولینومی گفته میشود که دارای دو مجهول باشد و بالاخره پولینومی n مجهوله به پولینومی گفته میشود که دارای n مجهول باشد.

پولینوم يك مجهوله درجه يك ----- $P(x) = 4x - 5$

پولینوم دو مجهوله درجه يك ----- $g(x, y) = 3x - 6y$

پولینوم سه مجهوله درجه يك ----- $h(x, y, z) = 3x - 2y + z$

پولینوم يك مجهوله درجه دوم ----- $F(x) = 2x^2 - 3x + 4$

پولینوم دو مجهوله درجه چهار و پنج ----- $P(x, y) = 2x^4 + 4x^3y - x^2y^2 + y^5$

پولینوم سه مجهوله درجه دوم ----- $g(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 - 7z^2$

دریافت جذر یک پولینوم

جذر یک پولینوم عبارت از قیمت است که اگر به جای مجهول وضع شود، قیمت عددی پولینوم صفر شود.

$$2x^2 + 5x + 2$$

$$2(-2)^2 + 5(-2) + 2$$

$$2 \cdot 4 - 10 + 2 = 8 - 8 = 0$$

یعنی جذر پولینوم مذکور عبارت از -2 میباشد، چونکه اگر به جای مجهول آنرا وضع نمائیم قیمت عددی پولینوم صفر میشود.

قضیه باقیمانده یا قضیه بیزو (Remainder Theorem)

قضیه باقیمانده در حقیقت قضیه یک عالم بنام "بیزو" میباشد.

(1) باقیمانده عملیه $P(x) \div (x - a)$ ، $R = P(a)$ می باشد.

(2) باقیمانده عملیه $P(x) \div (x + a)$ ، $R = P(-a)$ می باشد.

(3) باقیمانده عملیه $P(x) \div (ax - b)$ ، $R = P\left(\frac{b}{a}\right)$ می باشد.

(4) باقیمانده عملیه $P(x) \div (ax + b)$ ، $R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$ می باشد.

ثبوت: فرض می نمائیم که در نتیجه تقسیم پولینوم $P(x)$ بالای بینوم $(x - a)$ پولینوم $Q(x)$ خارج قسمت و R بحیث باقیمانده بدست آمده باشد یعنی:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R \dots I$$

اگر در رابطه فوق به عوض x ، a را وضع می نمائیم خواهیم داشت که:

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R \Rightarrow P(a) = 0 \cdot Q(a) + R \Rightarrow \boxed{P(a) = R}$$

نوت: برای دریافت باقیمانده افاده مقسوم علیه را مساوی به صفر قرار داده و قیمت عددی آنرا در پولینوم مقسوم وضع نموده باقیمانده بدست می آید.

مثال اول: باقیمانده عملیه تقسیم ذیل را دریابید.

$$(x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x + 6) \div (x - 2) \quad x - 2 = 0$$

$$2^4 + 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 6 \quad x = 2$$

$$= 16 + 32 + 8 + 4 = 60 \Rightarrow \boxed{R = 60}$$

مثال دوم: در عملیه تقسیم ذیل باقیمانده را دریابید.

$$(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 3) \div (x + 3) \quad x + 3 = 0$$

$$(-3)^4 - 3 \cdot (-3)^3 + 5 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) + 3 \quad x = -3$$

$$81 + 81 + 45 + 18 + 3 = \boxed{R = 228}$$

مثال سوم: باقیمانده عملیه $(5x^2 + x - 9) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$ بدون انجام دادن عملیه تقسیم باقیمانده را دریافت نمائید.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 9 \quad x + \frac{1}{2} = 0$$

$$= 5\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5-2-36}{4} \Rightarrow \boxed{R = -\frac{33}{4}} \quad x = -\frac{1}{2}$$

مثال چهارم: اگر پولینوم $P(y) = 10y^3 + 7y^2 - y - 11$ را بالای $(2y + 1)$ تقسیم نمائیم بدون انجام دادن عملیه تقسیم باقیمانده را دریابید.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 7\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 11 \quad 2y + 1 = 0$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{8}\right) + 7\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 11 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} - 11 = \frac{-5 + 7 + 2 - 44}{4} = \frac{-40}{4} = -10 \Rightarrow \boxed{R = -10}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال پنجم: به کمک قضیه باقیمانده، باقیمانده را دریابید.

$$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$$

$$4x + 9 = 0$$

$$6\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 15 = 6\left(\frac{81}{16}\right) + 15 = \frac{243}{4} + 15 = \boxed{R = \frac{303}{4}}$$

$$x = -\frac{9}{4}$$

• برای دریافت باقیمانده عملیه $P(x) \div (x^n \pm a)$ قیمت x^n را در پولینوم $P(x)$ وضع می‌نمائیم.

مثال اول: باقیمانده عملیه $(x^{16} - 2x^{11} + 6x^6 + 3) \div (x^5 + 2)$ را دریابید.

$$x^5 + 2 = 0 \Rightarrow x^5 = -2$$

$$P(x) = x \cdot x^{15} - 2x \cdot x^{10} + 6x \cdot x^5 + 3$$

$$= x(x^5)^3 - 2x(x^5)^2 + 6x(x^5) + 3$$

$$\Rightarrow R = x(-2)^3 - 2x(-2)^2 + 6x(-2) + 3$$

$$= -8x - 8x - 12x + 3 = \boxed{-28x + 3}$$

مثال دوم: باقیمانده عملیه تقسیم $(x^{10} + 6x^8 + 2x^5 + 15x^3 + 1) \div (x^2 - 4)$ را دریابید.

$$P(x) = (x^2)^5 + 6(x^2)^4 + 2x(x^2)^2 + 15x(x^2) + 1$$

$$R = (4)^5 + 6(4)^4 + 2x(4)^2 + 15x(4) + 1$$

$$R = 1024 + 1536 + 32x + 60x + 1 = \boxed{92x + 2561}$$

قضیه فکتور (The Factor Theorem)

اگر در پولینوم $P(x)$ قیمت $P(a) = 0$ شود در آن صورت $(x - a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ میباشد.

ثبوت: طوری که در قضیه باقی مانده نیز ذکر نمودیم که $R = P(a)$ است اگر پولینوم $P(x)$ بالای $(x - a)$ تقسیم شود و خارج قسمت آن $Q(x)$ باشد داریم که:

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R$$

اگر $R = 0$ باشد درینصورت $P(x) = Q(x)(x - a)$ میباشد مشاهده میشود که $(x - a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ است.

مثال اول: نشان دهید که $(x - 2)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28$ میباشد.
حل:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28$$

$$x - 2 = 0$$

$$P(2) = 2^3 + 3(2)^2 + 4(2) - 28$$

$$x = 2$$

$$P(2) = 8 + 12 + 8 - 28 = 0$$

چون $R = P(2) = 0$ است بناءً $(x - 2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ میباشد.

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال دوم: آیا $(x - 1)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 15$ میباشد.
حل:

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 15 \quad x - 1 = 0$$

$$P(1) = 2(1)^3 - 13(1)^2 + 26(1) - 15 \quad x = 1$$

$$P(1) = 2 - 13 + 26 - 15 \Rightarrow P(1) = 0$$

چون $R = P(1) = 0$ است بناءً $(x - 1)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ میباشد.

مثال سوم: آیا $(2x - 4)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = 10x^3 - 11x^2 - 20$ میباشد.
حل:

$$P(x) = 10x^3 - 11x^2 - 20 \quad 2x - 4 = 0$$

$$P(2) = 10(2)^3 - 11(2)^2 - 20 \quad 2x = 4$$

$$P(2) = 80 - 44 - 20 \quad x = 2$$

$$P(2) = 16$$

چون که $R = P(2) \neq 0$ است بناءً $(2x - 4)$ یک فکتور پولینوم $10x^3 - 11x^2 - 20$ نمیشود.

عکس قضیه فکتور (Converse of Factor Theorem)

اگر $(x - a)$ یک فکتور از پولینوم $P(x)$ باشد، پس $P(a) = 0$ میباشد و عدد a یک جذر از معادله پولینومی $P(x) = 0$ است.

مثال اول: اگر $(x - 2)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ باشد، در این صورت نشان دهید که $P(2) = 0$ است و 2 یک جذر معادله $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ میباشد.

حل: اگر 2 جذر معادله $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ باشد، پس $(x - 2)$ فکتور پولینوم مذکور میباشد $P(2) = 0$ است.

$$P(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

مثال دوم: نشان دهید که 3 یک جذر معادله $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ میباشد.
حل:

$$(3)^3 - 6(3)^2 + 5(3) + 12 = 0$$

$$27 - 54 + 15 + 12 = 0$$

$$54 - 54 = 0$$

$$0 = 0$$

مثال سوم: نشان دهید که عدد 2 یک جذر معادله $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ می باشد.
حل:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$2^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2 = 0$$

$$8 - 16 + 10 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

تقسیم ترکیبی (تقسیم افقی) یا طریقه هارنر (Synthetic Division)

Synthesize از *Synthetic* گرفته شده است که معنی آن ترکیب کردن است. تقسیم ترکیبی یک روش کوتاه برای دریافت خارج قسمت و باقیمانده تقسیم پولینوم $P(x)$ بالای بینوم $x \pm a$ میباشد. به طور عموم برای این اهداف از تقسیم ترکیبی کار گرفته میشود.

- 1- یافتن قیمت پولینوم برای قیمت های مختلف x
 - 2- برای یافتن جذر ناطق معادله $P(x) = 0$
 - 3- برای تجزیه افاده های الجبری
- برای اجرای عملیه تقسیم ترکیبی نکات ذیل را مد نظر میگیریم:
- پولینوم $P(x)$ باید کامل و ترتیب نزولی داشته باشد.
 - ضرایب پولینوم $P(x)$ را در یک سطر مینویسیم.
 - قیمت صفری $(x \pm a)$ را دریافت می نمائیم و آنرا به یک طرف ضرایب پولینوم $P(x)$ می نویسیم.
 - ضریب حد اول $P(x)$ را پائین خط آورده و آنرا به قیمت صفری $(x \pm a)$ ضرب می نمائیم حاصل ضرب را تحت ضریب حد دوم $P(x)$ مینویسیم. مجموعه این دو عدد را پائین آورده با قیمت صفری $(x \pm a)$ ضرب می نمائیم.
 - به همین ترتیب این عملیه را تا آخر ضریب پولینوم $P(x)$ انجام میدهم اعدادیکه در زیر خط بدست میآید عبارت از ضرایب پولینوم خارج قسمت از طرف چپ به راست میباشد، عدد آخری باقیمانده را نشان میدهد.
- بخاطر داشته باشید که درجه پولینوم خارج قسمت نظر به پولینوم مقسوم به اندازه یک واحد کمتر میباشد.

مثال اول: خارج قسمت و باقیمانده عملیه $(4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18) \div (x + 4)$ را بدست آرید.
حل:

4	12	-13	-33	18	-4
	-16	16	-12	180	
4	-4	3	-45	198	

خارج قسمت $Q(x) = 4x^3 - 4x^2 + 3x - 45 \Rightarrow$

باقیمانده $R = 198$

مثال دوم: در عملیه $(3x^5 - 3x^4 - 5x - 18x^3 - 30) \div (x + 2)$ باقیمانده و خارج قسمت را دریابید.
حل:

$$\begin{array}{r}
 P(x) = 3x^5 - 3x^4 - 18x^3 + 0x^2 - 5x - 30 \\
 \begin{array}{rrrrrr}
 3 & -3 & -18 & 0 & -5 & -30 \\
 & & -6 & 18 & 0 & 0 + 10 \\
 \hline
 3 & -9 & 0 & 0 & -5 & -20
 \end{array}
 \end{array}$$

$$Q(x) = 3x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 0x - 5 \Rightarrow \underbrace{3x^4 - 9x^3 - 5}_{\text{خارج قسمت}}$$

$$\boxed{R = -20}$$

مثال سوم: توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت و باقیمانده را دریابید.
 $(2t^3 - 7t^2 - 2t + 14) \div (2t - 3)$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrr}
 2 & -7 & -2 & 14 \\
 & 3 & -6 & -12 \\
 \hline
 2 & -4 & -8 & 2
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ 2 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$2t - 3 = 0$$

$$2t = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$2t^3 - 7t^2 - 2t + 14 = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(t - \frac{3}{2} \right) (2t^2 - 4t - 8) + 2$$

$$2t^3 - 7t^2 - 2t + 14 = (2t - 3) \left(\frac{2t^2}{2} - \frac{4t}{2} - \frac{8}{2} \right) + 2$$

$$2t^3 - 7t^2 - 2t + 14 = (2t - 3)(t^2 - 2t - 4) + 2$$

$$Q(t) = t^2 - 2t - 4 \Rightarrow \boxed{R = 2}$$

دریافت فکتور و قیمت پولینوم به کمک تقسیم ترکیبی

مثال اول: به اساس تقسیم ترکیبی دریا بید که $(x - 1)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$ است.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 2 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

قسمی که تقسیم ترکیبی باقیمانده را صفر نشان میدهد پس گفته میتوانیم که $(x - 1)$ فکتور پولینوم مذکور میباشد.

ریاضی عمومی

الجبر مقدماتی

مثال دوم: اگر $P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 25 + 5x$ باشد، اگر قیمت $x = 2$ باشد قیمت عدد پولینوم ذیل را به اساس تقسیم ترکیبی دریابید.
حل: نخست پولینوم را به شکل نزولی ترتیب می نمایم.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -12 & 5 & 25 \\ & & 6 & -12 & -14 \\ \hline & 3 & -6 & -7 & 11 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ \hline \end{array}$$

پس $P(2) = 11$ است.

دریافت جذور معادله توسط تقسیم ترکیبی

مثال: اگر عدد 1 یک جذر معادله $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ باشد جذور دیگر این معادله را توسط تقسیم ترکیبی دریابید.
حل:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

خارج قسمت $x^2 + 5x + 6$ می باشد.

$$(x - 1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

$$\boxed{x_1 = -3} \quad , \quad \boxed{x_2 = -2}$$

پس دو جذر دیگر این معادله -2 و -3 می باشند.

عملیات مشترک بالای پولینوم های الجبری

برای ساده کردن یک افاده الجبری به ترتیب زیر عمل می نمایم.

(1) توان را رفع می نمایم.

(2) در صورت موجودیت قوس، افاده الجبری را ساده می نمایم.

(3) به ترتیب از چپ به راست عملیه های ضرب و تقسیم را انجام می دهیم.

(4) به ترتیب از چپ به راست عملیه های جمع و تفریق را انجام می دهیم.

$$1) \quad x^2 + 6x^4 - 8 + 9x^2 + 2x^4 - 6x^2 = 8x^4 + 4x^2 - 8$$

$$2) \quad 3x - x - 1 + 3 - 2x = 2$$

$$3) \quad 2x^2 - x - x^2 - x - 2 = x^2 - 2x - 2$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

- 4) $2\{x^2[(x-4)(x+4) \div (x^2-16)]\}$
 $2\{x^2[(x^2-16) \div (x^2-16)]\}$
 $2\{x^2[1]\} = \boxed{2x^2}$
- 5) $(3y^2 - 5y + 3) + (-4y^2 + 5y + 2) = -y^2 + 5$
- 6) $2(7t + 4m + a) + 3(-3a - 7t + a) =$
 $14t + 8m + 2a - 9a - 21t + 3a = \boxed{-7t - 4a + 8m}$
- 7) $-3(x^2 - 2x + 4) - (4x - 5) + 2(x^2 + 2x + 3)$
 $-3x^2 + 6x - 12 - 4x + 5 + 2x^2 + 4x + 6$
 $\boxed{-x^2 + 6x - 1}$
- 8) $(2x + 3)(x + 3) - (2x - 3)(x - 4)$
 $2x^2 + 6x + 3x + 9 - (2x^2 - 8x - 3x + 12)$
 $2x^2 + 9x + 9 - (2x^2 - 11x + 12)$
 $2x^2 + 9x + 9 - 2x^2 + 11x - 12$
 $\boxed{20x - 3}$
- 9) $4x + [4x^2 + (1 - 2x)(1 + 2x)]$
 $4x + [4x^2 + 1 + 2x - 2x - 4x^2]$
 $4x + [1] \Rightarrow \boxed{4x + 1}$
- 10) $(ax^2 + ax) \div (-ax) + (bx^2 + bx) \div (bx)$
 $\frac{ax^2}{-ax} + \frac{ax}{-ax} + \frac{bx^2}{bx} + \frac{bx}{bx}$
 $-x - 1 + x + 1 = \boxed{0}$
- 11) $\frac{1}{2}m - 3\left\{5\left(m - \frac{1}{2} - m\right)\right\} - m - 6 \div 2 = ?$
 $= \frac{1}{2}m - 3\left\{5m - \frac{5}{2} - 5m - m - 6\right\} \div 2$
 $= \frac{1}{2}m - 3\left\{-m - \frac{17}{2}\right\} \div 2$
 $= \frac{1}{2}m + \left(3m + \frac{51}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}m + \frac{3}{2}m + \frac{51}{4}$
 $= \frac{m+3m}{2} + \frac{51}{4} = \frac{4m}{2} + \frac{51}{4} = \boxed{2m + \frac{51}{4}}$
- 12) $2x - 1 - \{-2(x + 2)\} + 2x \div 2 \cdot 5x$
 $= 2x - 1 - (-2x - 4) + 2x \div 2 \cdot 5x$
 $= 2x - 1 + 2x + 4 + x \cdot 5x$
 $= 2x - 1 + 2x + 4 + 5x^2 = \boxed{4x + 5x^2 + 3}$

مسائل تطبیقی پولینوم

(1) در پولینوم $P(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 - 1$ ، قیمت $a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ را دریابید.

حل:

$$P(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 0x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = -1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = \frac{1}{2} + (-2) + 0 + (-1) = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

(2) اگر در پولینوم $P(x) = kx^3 - x^2 + 3x - 1$ قیمت $P(2) = 17$ باشد قیمت k را دریابید.

حل:

$$P(x) = kx^3 - x^2 + 3x - 1$$

$$P(2) = k(2)^3 - (2)^2 + 3(2) - 1$$

$$P(2) = 8k - 4 + 6 - 1$$

$$P(2) = 8k + 1$$

$$8k + 1 = 17$$

$$8k = 17 - 1$$

$$8k = 16$$

$$\boxed{k = 2}$$

(3) اگر مجموعه ضرایب $mx^2 - 2x + 1$ عبارت از 18 باشد قیمت m را دریابید.

حل:

$$P(x) = mx^2 - 2x + 1$$

$$P(1) = m(1)^2 - 2(1) + 1$$

$$P(1) = m - 2 + 1$$

$$P(1) = m - 1$$

$$m - 1 = 18$$

$$\boxed{m = 19}$$

(4) اگر $(2m - 4)x^2 + (5 - n)x + 13$ یک پولینوم ثابت باشد قیمت های m و n را دریابید.

حل: چون یک پولینوم ثابت می باشد، پس ضریب هر حد متحول صفر می باشد.

$$2m - 4 = 0$$

$$5 - n = 0$$

$$2m = 4$$

$$-n = -5$$

$$\boxed{m = 2}$$

$$\boxed{n = 5}$$

5) قیمت های a ، b و c را دریابید اگر $(b-4)x^3 - (2c+6)x + (a-b+c)$ یک پولینوم صفری باشد.

حل: در پولینوم صفری هر حد صفر می باشد.

$$b - 4 = 0$$

$$2c + 6 = 0$$

$$a - b + c = 0$$

$$\boxed{b = 4}$$

$$2c = -6$$

$$a - (+4) + (-3) = 0$$

$$\boxed{c = -3}$$

$$a - 4 - 3 = 0$$

$$\boxed{a = 7}$$

6) قیمت های a ، b و c را دریابید اگر: $P(x) = 7x^4 - (2a-3)x^3 + 5x - (c-3)$ و $Q(x) = (3b+4)x^4 + 2x^3 + 5x$ پولینوم های معادل باشند.

حل: چون در پولینوم های معادل ضرایب حدود مشابه با هم مساوی می باشد.

$$3b + 4 = 7$$

$$-(2a - 3) = 2$$

$$-(c - 3) = 0$$

$$3b = 7 - 4$$

$$-2a + 3 = 2$$

$$-c + 3 = 0$$

$$3b = 3$$

$$-2a = -1$$

$$-c = -3$$

$$\boxed{b = 1}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{c = 3}$$

7) اگر پولینوم $x^2 + 3x + 2$ با پولینوم $m(x-1)^2 + n(x-1) + p$ معادل باشد، قیمت های m ، n و p را دریابید.

حل:

$$m(x-1)^2 + n(x-1) + p = x^2 + 3x + 2$$

$$m(x^2 - 2x + 1) + nx - n + p = x^2 + 3x + 2$$

$$mx^2 - 2mx + 1 + nx - n + p = x^2 + 3x + 2$$

$$mx^2 + (-2m + n)x + (m - n + p) = x^2 + 3x + 2$$

$$\boxed{m = 1}$$

$$-2m + n = 3$$

$$m - n + p = 2$$

$$-2 \cdot 1 + n = 3$$

$$1 - 5 + p = 2$$

$$n = 3 + 2$$

$$p = 2 + 4$$

$$\boxed{n = 5}$$

$$\boxed{p = 6}$$

(8) اگر $P(x-1)^2 + n(x+3) + c = 2x^2 - x + 22$ باشد قیمت های p ، n و c را دریابید.

حل:

$$P(x-1)^2 + n(x+3) + c = 2x^2 - x + 22$$

$$P(x^2 - 2x + 1) + nx + 3n + c = 2x^2 - x + 22$$

$$Px^2 - 2Px + P + nx + 3n + c = 2x^2 - x + 22$$

$$Px^2 + (n - 2P)x + (P + 3n + c) = 2x^2 - x + 22$$

$$\boxed{P=2} \quad n - 2P = -1 \quad P + 3n + c = 22$$

$$n - 2 \cdot 2 = -1 \quad 2 + 3 \cdot 3 + c = 22$$

$$n - 4 = -1 \quad 2 + 9 + c = 22$$

$$\boxed{n=3} \quad \boxed{c=11}$$

(9) اگر پولینوم $3x^2y + 5x^mz - 7y^{n-3}z^2$ متجانس باشد قیمت های m و n را دریابید.

حل:

$$m + 1 = 2 + 1 \quad n - 3 + 2 = m + 1$$

$$\boxed{m=2} \quad n - 1 = 2 + 1$$

$$\boxed{n=4}$$

(10) با پولینوم $a^4 + 2a^3b - 3ab^3 + a^2b^2$ کدام پولینوم را جمع نمائیم تا حاصل جمع

$$2a^4 - 3a^3b - 3ab^3 - b^4 + a^2b^2$$

حل:

$$a^4 + 2a^3b - 3ab^3 + a^2b^2 + A = 2a^4 - 3a^3b - 3ab^3 - b^4 + a^2b^2$$

$$A = 2a^4 - 3a^3b - 3ab^3 - b^4 + a^2b^2 - (a^4 + 2a^3b - 3ab^3 + a^2b^2)$$

$$\boxed{A = a^4 - 5a^3b - b^4}$$

(11) مجموعه دو پولینوم $x^2 + 2x - y^2$ است اگر یک پولینوم $x^2 - 2xy + 3$ باشد، پولینوم

دیگری را دریابید.

حل:

$$x^2 - 2xy + 3 + A = x^2 + 2x - y^2$$

$$A = x^2 + 2x - y^2 - (x^2 - 2xy + 3)$$

$$A = x^2 + 2x - y^2 - x^2 + 2xy - 3$$

$$\boxed{A = 2x + 2xy - y^2 - 3}$$

(12) اگر دو طیاره از یک میدان هوایی در جهت مقابل همدیگر پرواز کنند، در صورتی که 2

ساعت بعد فاصله یک طیاره از میدان هوایی $x^2 + 2x + 400$ میل و فاصله طیاره دیگر از

همین میدان هوایی $3x^2 - 50x + 100$ میل باشد فاصله بین این دو طیاره را دریابید.

حل:

$$(x^2 + 2x + 400) + (3x^2 - 50x + 100) \Rightarrow \boxed{4x^2 - 48x + 500}$$

فاصله بین دو طیاره

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

(13) چهار سمت یک حوض مستطیل شکل، راه سمنت شده حوض می باشد که عرض راه x متر و طول و عرض حوض به ترتیب $50m$ و $25m$ می باشد مساحت راه را دریابید.
حل:

$$A = (25 + 2x)(50 + 2x) = 1250 + 150x + 4x^2 \quad \text{مساحت مجموعی راه و حوض}$$

$$(25m)(50m) = 1250m^2 \quad \text{مساحت حوض}$$

$$1250 + 150x + 4x^2 - 1250 = \boxed{4x^2 + 150x} \quad \text{پس مساحت راه می باشد.}$$

(14) ارتفاع یک بکس x انچ، طول آن $(x + 1)$ انچ و عرض آن $2x - 4$ می باشد، اگر ارتفاع بکس 3 انچ باشد حجم این بکس مساوی است به:

$$\text{عرض} \times \text{طول} \times \text{ارتفاع} = \text{حجم بکس}$$

$$\text{حجم بکس} = (x)(x + 1)(2x - 4)$$

$$\text{حجم بکس} = (3)(3 + 1)(2 \cdot 3 - 4) \quad \text{ارتفاع بکس} = x \text{ in} = 3 \text{ in}$$

$$\text{حجم بکس} = \boxed{24 \text{ in}^3}$$

(15) حاصل ضرب $\left(\frac{a^p}{a^{-q}}\right)^{p-q} \left(\frac{a^q}{a^{-r}}\right)^{q-r} \left(\frac{a^r}{a^{-p}}\right)^{r-p}$ مساوی است به:

حل:

$$\left(\frac{a^p}{a^{-q}}\right)^{p-q} \left(\frac{a^q}{a^{-r}}\right)^{q-r} \left(\frac{a^r}{a^{-p}}\right)^{r-p} = (a^{p+q})^{p-q} (a^{q+r})^{q-r} (a^{r+p})^{r-p}$$

$$= a^{p^2-q^2} \cdot a^{q^2-r^2} \cdot a^{r^2-p^2} = a^0 = \boxed{1}$$

(16) حاصل ضرب دو پولینوم $6y^3 - 11y^2 + 6y - 1$ می باشد. اگر یک پولینوم $3y^2 - 4y + 1$ باشد پولینوم دیگری را دریابید.

حل:

$$(3y^2 - 4y + 1)(A) = 6y^3 - 11y^2 + 6y - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{6y^3 - 11y^2 + 6y - 1}{3y^2 - 4y + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} 6y^3 - 11y^2 + 6y - 1 & 3y^2 - 4y + 1 \\ \pm 6y^3 \mp 8y^2 \pm 2y & 2y - 1 \\ \hline -3y^2 + 4y - 1 & \\ \mp 3y^2 \pm 4y \pm 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\boxed{A = 2y - 1}$$

(17) با پولینوم $4x^3 - 10x^2 + 12x + 6$ کدام عدد جمع شود تا بر $2x + 1$ پوره تقسیم شود؟

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 - 10x^2 + 12x + 6 & 2x + 1 \\
 \pm 4x^3 \pm 2x^2 & 2x^2 - 6x + 9 \\
 \hline
 -12x^2 + 12x & \\
 \mp 12x^2 \mp 6x & \\
 \hline
 18x + 6 & \\
 \pm 18x \pm 9 & \\
 \hline
 -3 &
 \end{array}$$

در نتیجه اگر با پولینوم فوق عدد 3 جمع شود به $(2x + 1)$ پوره تقسیم می شود.

(18) به کدام قیمت x پولینوم $12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5$ بر $3x^2 - 1$ پوره تقسیم می شود.

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5 & 3x^2 + 0x - 1 \\
 \pm 12x^4 \pm 0x^3 \pm 4x^2 & 4x^2 + x - 3 \\
 \hline
 3x^3 - 9x^2 + x & \\
 \pm 3x^3 \pm 0x^2 \mp x & \\
 \hline
 -9x^2 + 2x + 5 & \\
 \mp 9x^2 \mp 0x \pm 3 & \\
 \hline
 2x + 2 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2x + 2 &= 0 \\
 2x &= -2 \\
 \boxed{x = -1}
 \end{aligned}$$

پس برای $x = -1$ پولینوم فوق بر $3x^2 - 1$ پوره تقسیم می شود.

(19) به کدام قیمت P پولینوم $3x^3 - 7x^2 - 9x + P$ بر $x - 13$ پوره تقسیم می شود؟

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 - 7x^2 - 9x + P & x - 13 \\
 3x^3 \mp 39x^2 & 3x^2 + 32x + 281 \\
 \hline
 +32x^2 - 9x + P & \\
 \pm 32x^2 \mp 288x & \\
 \hline
 +281x + P & \\
 \pm 281x \mp 3653 & \\
 \hline
 P + 3653 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 P + 3653 &= 0 \\
 \boxed{P = -3653}
 \end{aligned}$$

پس برای $P = -3653$ پولینوم فوق بر $x - 13$ پوره قابل تقسیم است.

(20) اگر پوینوم $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ بر $x + 2$ تقسیم شود به کمک قضیه باقی مانده بگوئید که به کدام قیمت k باقیمانده -44 خواهد شد؟

حل:

$$\begin{aligned} P(x) &= 5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6 \\ P(-2) &= 5(-2)^3 - k^2(-2)^2 + 3k(-2) - 6 \\ P(-2) &= -40 - 4k^2 - 6k - 6 \\ P(-2) &= -4k^2 - 6k - 46 \\ -4k^2 - 6k - 46 &= -44 \\ -4k^2 - 6k - 2 &= 0 \\ 2k^2 + 3k + 1 &= 0 \Rightarrow (2k + 1)(k - 1) = 0 \\ \boxed{k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = 1} \end{aligned}$$

(21) اگر پوینوم $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ بالای $(y - \frac{1}{2})$ تقسیم شود به کدام قیمت k عدد 2 باقی

می ماند؟

حل:

$$\begin{aligned} P(y) &= 2k^2y^4 - ky^2 + 1 \\ P\left(\frac{1}{2}\right) &= 2k^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 - k\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ P\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{4}k + 1 \\ \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{4}k + 1 &= 2 \\ \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{4}k - 1 &= 0 \\ k^2 - 2k - 8 &= 0 \\ (k + 2)(k - 4) &= 0 \\ \boxed{k_1 = -2, k_2 = 4} \end{aligned}$$

(22) اگر پوینوم $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ بالای $(x - 1)$ تقسیم شود به کدام قیمت m باقیمانده آن 17 می شود؟

حل:

$$\begin{aligned} P(x) &= m^2x^4 - 10x^2 + 2 \\ P(1) &= m^2(1)^4 - 10(1)^2 + 2 \\ P(1) &= m^2 - 10 + 2 \\ P(1) &= m^2 - 8 \\ m^2 - 8 &= 17 \\ m^2 &= 25 \Rightarrow \boxed{m = \pm 5} \end{aligned}$$

(23) به کدام قیمت k ، $(x - 1)$ یک فکتور پوینوم $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ می باشد؟

حل:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 - 3x^3 - x - 2k \\ P(1) &= 2(1)^4 - 3(1)^3 - (1) - 2k = -2 - 2k \\ -2 - 2k &= 0 \\ -2k &= 2 \Rightarrow \boxed{k = -1} \end{aligned}$$

(24) به کدام قیمت k ، $(x - 2)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = 2x^4 - x^3 + kx^2 + kx$ می باشد.

حل:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 - x^3 + kx^2 + kx \\ P(2) &= 2(2)^4 - (2)^3 + k(2)^2 + k(2) & 6k + 24 &= 0 \\ P(2) &= 32 - 8 + 4k + 2k & 6k &= -24 \\ P(2) &= 6k + 24 & \boxed{k = -4} \end{aligned}$$

(25) اگر $(x - 1)$ و $(x + 1)$ فکتور های پولینوم $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ باشند قیمت های a و b را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^3 + a(1)^2 + b(1) + 2 & a + b &= -3 \\ P(1) &= a + b + 3 \Rightarrow a + b + 3 = 0 & a - b &= -1 \\ P(-1) &= (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 2 & 2a &= -4 \\ P(-1) &= a - b + 1 \Rightarrow a - b + 1 = 0 & \boxed{a = -2} \\ & & -2 + b &= -3 \Rightarrow \boxed{b = -1} \end{aligned}$$

(26) اگر عدد -2 یک جذر معادله $x^3 + 4x^2 + kx + 8 = 0$ باشد قیمت k را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + kx + 8 &= 0 \\ (-2)^3 + 4(-2)^2 + k(-2) + 8 &= 0 \\ -8 + 16 - 2k + 8 &= 0 \\ -2k &= 16 \Rightarrow \boxed{k = 8} \end{aligned}$$

(27) به کدام قیمت k عدد 3 یک جذر معادله $2x^4 - 6x^3 - 7x^2 + kx - 15 = 0$ می باشد؟

حل:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 6x^3 - 7x^2 + kx - 15 &= 0 \\ 2(3)^4 - 6(3)^3 - 7(3)^2 + k(3) - 15 &= 0 \\ 162 - 162 - 63 + 3k - 15 &= 0 \\ 3k &= 78 \Rightarrow \boxed{k = 26} \end{aligned}$$

(28) قیمت های b و c را در صورتی دریابید که اگر پولینوم $P(x) = x^4 + 6x^3 - 20x^2 + bx + c$ بر $x^2 - 3x + 2$ تقسیم نمائیم و باقیمانده صفر شود.

حل:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

$$P(1) = x^4 + 6x^3 - 20x^2 + bx + c$$

$$P(1) = (1)^4 + 6(1)^3 - 20(1)^2 + b(1) + c$$

$$P(1) = b + c - 13 \Rightarrow b + c - 13 = 0$$

$$P(2) = (2)^4 + 6(2)^3 - 20(2)^2 + b(2) + c$$

$$P(2) = 2b + c - 16 \Rightarrow 2b + c - 16 = 0$$

$$b + c = 13 \dots\dots I$$

$$\pm 2b \pm c = \pm 16 \dots\dots I$$

$$\hline -b = -3 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

$$b + c = 13$$

$$3 + c = 13 \Rightarrow \boxed{c = 10}$$

(29) اگر $K = 3a(x - 1)^2 - a(x - 1) - 4$ و $L = 16 + b(x - 1) - 3b(x - 1)^2$ باشد $Kb + La$ را دریابید.
حل:

$$Kb = b[3a(x - 1)^2 - a(x - 1) - 4]$$

$$Kb = b[3a(x^2 - 2x + 1) - ax + a - 4]$$

$$Kb = b[3ax^2 - 6ax + 3a - ax + a - 4]$$

$$Kb = 3abx^2 - 6abx + 3ab - abx + ab - 4b$$

$$Kb = 3abx^2 - 7abx + 4ab - 4b \dots\dots I$$

$$La = a[16 + b(x - 1) - 3b(x - 1)^2]$$

$$La = a[16 + bx - b - 3b(x^2 - 2x + 1)]$$

$$La = a[16 + bx - b - 3bx^2 + 6bx - 3b]$$

$$La = 16a + abx - ab - 3abx^2 + 6abx - 3ab$$

$$La = -3abx^2 + 7abx - 4ab + 16a \dots\dots II$$

رابطه اول و دوم را طرف به طرف جمع نموده داریم که:

$$Kb = 3abx^2 - 7abx + 4ab - 4b$$

$$La = -3abx^2 + 7abx - 4ab + 16a$$

$$\boxed{Kb + La = 16a - 4b}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

(30) قیمت m را دریابید، در صورتی که اگر پولینوم $k(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 4$ بالای $(x^2 + 2x + 1)$ تقسیم شود باقیمانده صفر شود.

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x_{1,2} = -1$$

$$k(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 4$$

$$k(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 - m(-1) + 4$$

$$k(-1) = m + 7$$

$$m + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -7}$$

(31) قیمت m را در صورتی دریابید که اگر پولینوم $P(x) = 5x^2 + 6x - 7$ بر $(x + m)$ تقسیم شود باقیمانده (1) باشد؟

$$P(x) = 5x^2 + 6x - 7$$

$$P(-m) = 5(-m)^2 + 6(-m) - 7$$

$$P(-m) = 5m^2 - 6m - 7$$

$$5m^2 - 6m - 7 = 1$$

$$5m^2 - 6m - 8 = 0$$

$$(5m + 4)(m - 2) = 0$$

$$5m + 4 = 0 \quad m - 2 = 0$$

$$5m = -4 \quad \boxed{m_2 = 2}$$

$$\boxed{m_1 = -\frac{4}{5}}$$

(32) اگر $(x - 1)^3$ و $x^3 + ax^2 + bx + c$ پولینوم های معادل باشند قیمت های a ، b و c را دریابید.

$$(x - 1)^3 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\boxed{a = -3}, \quad \boxed{b = 3}, \quad \boxed{c = -1}$$

(33) اگر $P(x)$ یک پولینوم باشد

$$x^3 \cdot P(x) = ax^8 + (b - 2)x^5 + (a - 4)x + b - 5, \quad P(x) = ?$$

حل:

$$\frac{x^3 \cdot P(x)}{x^3} = \frac{ax^8}{x^3} + \frac{(b-2)x^5}{x^3} + \frac{(a-4)x}{x^3} + \frac{b-5}{x^3}$$

$$P(x) = ax^5 + (b - 2)x^2 + (a - 4)x^{-2} + (b - 5)x^{-5}$$

$$a - 4 = 0 \quad b - 5 = 0$$

$$a = 4 \quad b = 5$$

$$P(x) = 4x^5 + (5 - 2)x^2 + (4 - 4)x^{-2} + (5 - 5)x^{-5}$$

$$\boxed{P(x) = 4x^5 + 3x^2}$$

(34) اگر $P(x^2) = (a - 2)x^5 + ax^4 + (b - 4)x^3 + 2bx^2 + 3b$ یک پولینوم باشد
 قیمت $P(x)$ را دریابید.

حل:

$$x^2 = y$$

$$x = \sqrt{y}$$

$$P(x^2) = (a - 2)x^5 + ax^4 + (b - 4)x^3 + 2bx^2 + 3b$$

$$P(\sqrt{y})^2 = (a - 2)(\sqrt{y})^5 + a(\sqrt{y})^4 + (b - 4)(\sqrt{y})^3 + 2b(\sqrt{y})^2 + 3b$$

$$P(y) = (a - 2)\sqrt{y}^5 + ay^2 + (b - 4)\sqrt{y}^3 + 2by + 3b$$

$$a - 2 = 0$$

$$b - 4 = 0$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$\boxed{b = 4}$$

$$P(y) = 2y^2 + 8y + 12$$

حال y را به x تعویض می نمایم.

$$\boxed{P(x) = 2x^2 + 8x + 12}$$

(35) اگر $P(x)$ پولینوم باشد.

$$P(x) = ax^6 + (a - b + 3)x^{-3} + (a + b - 9)x^{-2} + bx, \quad P(x) = ?$$

$$a - b + 3 = 0$$

$$a - b + 3 = 0$$

$$a + b - 9 = 0$$

$$3 - b + 3 = 0$$

$$2a - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$\boxed{b = 6}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = 3x^6 + 6x}$$

(36) اگر $n \in \mathbb{Z}^+$ باشد $P(1) = ?$

حل:

$$P(x) = 5(x - 2)^{2n} - 7(2 - x)^{2n-1}$$

$$P(1) = 5(1 - 2)^{2n} - 7(2 - 1)^{2n-1}$$

$$P(1) = 5(-1)^{2n} - 7(1)^{2n-1}$$

$$P(1) = 5 - 7 \Rightarrow \boxed{P(1) = -2}$$

(37) اگر $P(x^3 + 8) = x^6 - 2x^3 + 1$ باشد حد ثابت پولینوم $P(x)$ کدام است؟

حل:

$$x^3 + 8 = 0$$

$$P(0) = (-2)^6 - 2(-2)^3 + 1$$

$$x^3 = -8$$

$$P(0) = 64 + 16 + 1$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-8} \Rightarrow x = -2$$

$$\boxed{P(0) = 81}$$

(38)

$$\left. \begin{array}{l} P(x) \mid x-3 \\ \hline - \\ \hline 4 \\ Q(x) \mid x+3 \\ \hline - \\ \hline 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(x) \mid x^2 - 9 \\ \hline - \\ \hline ? \end{array}$$

حل:

$$\begin{array}{l} P(x) \mid x-3 \\ \hline - \\ \hline 4 \end{array} \quad P(x) = (x-3) \cdot Q(x) + 4 \dots \dots I$$

$$\begin{array}{l} Q(x) \mid x+3 \\ \hline - \\ \hline 2 \end{array} \quad Q(x) = (x+3) \cdot T(x) + 2 \dots \dots II$$

قیمت $Q(x)$ را در رابطه اول وضع می نمایم داریم که:

$$P(x) = (x-3) \cdot [(x+3) \cdot T(x) + 2] + 4$$

$$P(x) = (x^2 - 9) \cdot T(x) + 2x - 6 + 4$$

$$P(x) = (x^2 - 9) \cdot T(x) + 2x - 2$$

پس باقی مانده $2x - 2$ است.

(39)

$$P(3x+4) = x^3 + x^2 - x + 9$$

$$x+2=0$$

$$\begin{array}{l} P(x) \mid x+2 \\ \hline - \\ \hline ? \end{array}$$

$$x = -2$$

$$3x+4 = -2$$

$$3x = -6 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$P(3x+4) = x^3 + x^2 - x + 9$$

$$P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 9$$

$$P(-2) = -8 + 4 + 2 + 9$$

$$\boxed{P(-2) = 7}$$

(40)

$$(x-2) \cdot P(x) = x^4 - ax^2 + 2x + 8$$

$$\begin{array}{l} P(x) \mid x-1 \\ \hline - \\ \hline ? \end{array}$$

حل:

$$(x - 2) \cdot P(x) = x^4 - ax^2 + 2x + 8$$

$$(2 - 2) \cdot P(2) = (2)^4 - a(2)^2 + 2(2) + 8$$

$$0 = 16 - 4a + 4 + 8$$

$$\Rightarrow a = 7$$

$$(x - 2) \cdot P(x) = x^4 - 7x^2 + 2x + 8$$

$$(1 - 2) \cdot P(x) = x^4 - 7x^2 + 2x + 8$$

$$(-1) \cdot P(x) = x^4 - 7x^2 + 2x + 8$$

$$P(x) = -x^4 + 7x^2 - 2x - 8$$

$$P(1) = -(1)^4 + 7(1)^2 - 2(1) - 8$$

$$\boxed{P(1) = 2}$$

(41) اگر $P(x - 1) = x^3 - 4x + 5$ باشد $P(2)$ را دریابید.

حل:

$$P(3 - 1) = 3^3 - 4 \cdot 3 + 5$$

$$x - 1 = 2$$

$$P(2) = 27 - 12 + 5$$

$$x = 2 + 1$$

$$\boxed{P(2) = 20}$$

$$x = 3$$

(42) اگر در پولینوم $P(x) = x^5 + 8x^3 + (4p + 3)x - 20$ ، $a_1 = 15$ باشد قیمت P را دریابید.

حل:

$$a_1 = 15$$

$$4p + 3 = 15$$

$$4p = 12 \Rightarrow \boxed{p = 4}$$

(43) اگر $P(x) = 6x^2 + 4x + 3 + b$ و $P(x) = (x - 1) \cdot Q(x) + 27$ باشد، آنگاه قیمت b عبارت است از:

حل:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - 1 \\ \hline -Q(x) & \\ \hline 27 & \end{array}$$

$$6x^2 + 4x + 3 + b = (x - 1) \cdot Q(x) + 27$$

$$6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 3 + b = (1 - 1) \cdot Q(1) + 27$$

$$6 + 4 + 3 + b = 0 \cdot Q(1) + 27$$

$$13 + b = 27$$

$$b = 27 - 13$$

$$\boxed{b = 14}$$

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x) + 27$$

(44) اگر $P(x) = ax^4 + bx^2 - 9x + 12$ بالای $x^2 - 2x + 1$ پوره تقسیم شود قیمت $a + b$ عبارت است از:

حل: چون پولینوم $P(x)$ بالای $x^2 - 2x + 1$ پوره قابل تقسیم است بناءً باقیمانده را محاسبه می‌نمائیم.

$$\begin{array}{ll} P(x) = ax^4 + bx^2 - 9x + 12 & x^2 - 2x + 1 = 0 \\ P(1) = a(1)^4 + b(1)^2 - 9(1) + 12 & (x - 1)^2 = 0 \\ P(1) = a + b - 9 + 12 & x - 1 = 0 \\ a + b + 3 = 0 \Rightarrow a + b = -3 & x = 1 \end{array}$$

(45) هرگاه پولینوم $(4a - b)x^7 + (2b - c)x^6 + 4x^{23-6a} - 1$ یک پولینوم درجه 5 باشد، آنگاه قیمت های a ، b و c را دریابید.

حل:

$$\begin{array}{lll} 23 - 6a = 5 & 4a - b = 0 & 2b - c = 0 \\ -6a = -18 & 4 \cdot 3 - b = 0 & 2 \cdot 12 - c = 0 \\ \boxed{a = 3} & \boxed{b = 12} & \boxed{c = 24} \end{array}$$

مساوات (Equalities)

برابری قیمت های عددی دو افاده را مساوات گویند.
به صورت عموم مساوات به دو نوع است:

(1) مساوات مطلق یا مطابقت ها یا عینیت ها (2) مساوات شرطیه یا معادلات

مطابقت ها (عینیت ها) Quantities or Identities

مطابقت یا عینیت به مساوات گفته میشود که برای تمام قیمت های مجهول دو طرف آن با هم مساوی شود.
مثلاً:

$$(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2 \dots \dots \dots I$$

اگر در رابطه I به عوض x و y هر قیمت را از اعداد حقیقی را وضع کنیم دو طرف مساوات با هم مساوی میشود. بطور مثال اگر در رابطه اول به عوض $x = 1$ و $y = 2$ را وضع کنیم چنین بدست میآید.

$$\begin{aligned} (3x + 2y)^2 &= 9x^2 + 12xy + 4y^2 \\ (3 \cdot 1 + 2 \cdot 2)^2 &= 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 \\ 9 + 24 + 4 \cdot 4 & \\ \Rightarrow (3 + 4)^2 &= 9 + 24 + 16 \\ 7^2 = 49 &\Rightarrow 49 = 49 \end{aligned}$$

نوت: علامه مطابقت سه خط موازی ($\equiv$) میباشد.

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مطابقت های مشهور الجبری

مطابقت های گروپ اول:

شکل عمومی این نوع مطابقت ها $(a \pm b)^n$ میباشد.
 طور نمونه چند مطابقت این گروپ را انکشاف میدهیم.

$$1) (a + b)^0 = 1$$

$$2) (a - b)^0 = 1$$

$$3) (a + b)^1 = a + b$$

$$4) (a - b)^1 = a - b$$

$$5) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ثبوت: نظر به قانون طاقت و ضرب افاده های الجبری میتوانیم که بنویسیم:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\ \Rightarrow \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$6) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ثبوت: نظر به قانون طاقت و ضرب افاده های الجبری میتوانیم که بنویسیم:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 \\ \Rightarrow \boxed{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$7) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

ثبوت: نظر به قانون طاقت و ضرب افاده های الجبری میتوانیم که بنویسیم:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 \\ = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \Rightarrow \boxed{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$8) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

ثبوت: نظر به قانون طاقت و ضرب افاده های الجبری میتوانیم که بنویسیم:

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) \\ = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \Rightarrow \boxed{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

به همین ترتیب تمام مطابقت های که شکل فوق و دارای طاقت بزرگتر باشد نظر به قوانین طاقت و ضرب افاده های الجبری ثبوت میشود.

انکشاف عمومی مطابقت های $(a \pm b)^n$:

- برای انکشاف عمومی این نوع مطابقت ها نکات ذیل را در نظر بگیرید:
- (1) حد اول را a^n و حد آخر را b^n بگیرید.
 - (2) برای حدود ما بعد ضریب حد قبلی آنرا ضرب توان a نموده و تقسیم تعداد حدود می نمائیم.
 - (3) در حدود پی در پی از توان a یک را کم نموده و به توان b علاوه می نمائیم. طوریکه مجموعه توان های آن در هر حد n گردد.
 - (4) عملیه های مربوط (2) و (3) را تا زمانی ادامه میدهم که توان a صفر و توان b مساوی به n شود.
 - (5) در انکشاف بینوم های $(a + b)^n$ علایم تمامی حدود انکشاف یافته مثبت و در انکشاف $(a - b)^n$ علامه حدی منفی است که توان b در آن حد طاق باشد.

فکتوریل (Factorial)

فکتوریل عبارت از حاصل ضرب اعداد مسلسل طبیعی است که علامه آن (!) میباشد. مثلاً:

3! به این معنی است که اعداد از 1 الی 3 ضرب میشوند یا 10! به این معنی است که اعداد از 1 الی 10 با هم ضرب میشوند.

$$1! = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

$$8! = 5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$15! = 13! \cdot 14 \cdot 15$$

بصورت عموم اگر n یک عدد طبیعی باشد پس $n!$ قرار ذیل تعریف شده است:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n$$

نوت: ناگفته نماند که 0! مساوی به یک است.

ثبوت:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1)n$$

اطراف رابطه فوق را ضرب $(n+1)$ نموده داریم که:

$$(n+1) \cdot n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1)n \cdot (n+1)$$

چون دو طرف مساوات فوق $(n+1)!$ است بناءً:

$$(n+1)n! = (n+1)!$$

در نتیجه

$$\frac{(n+1)n!}{n+1} = \frac{(n+1)!}{n+1} \Rightarrow n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال اول: $1!$ را محاسبه کنید.

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1} = 1! = \frac{(1+1)!}{1+1} = 1! = \frac{2!}{2} \Rightarrow 1! = 1$$

مثال دوم: $0!$ را محاسبه کنید.

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1} = 0! = \frac{(0+1)!}{0+1} = 0! = \frac{1!}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

مثال سوم: $2!$ را محاسبه کنید.

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1} = 2! = \frac{(2+1)!}{2+1} = 2! = \frac{3!}{3} = 2! = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} \Rightarrow 2! = 2$$

مسائل مربوط فکتوریل

$$1) \quad 4! + 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 + 6 = \boxed{30}$$

$$2) \quad \frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = \boxed{90}$$

$$3) \quad \frac{6!+7!+8!}{64 \cdot (4!+5!)} = \frac{6!(1+7+7 \cdot 8)}{64 \cdot (4!+5!)} = \frac{6! \cdot 64}{64 \cdot [4!(1+5)]} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 6} = \boxed{5}$$

$$4) \quad \frac{15!+14!}{15!-14!} = \frac{14!(15+1)}{14!(15-1)} = \frac{16}{14} = \boxed{\frac{8}{7}}$$

$$5) \quad \frac{10!-5 \cdot 9!}{45 \cdot 8!} = \frac{8!(9 \cdot 10 - 5 \cdot 9)}{45 \cdot 8!} = \frac{45}{45} = \boxed{1}$$

$$6) \quad \frac{(n+2)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)(n+2)}{(n-1)! \cdot n} = \boxed{(n+1)(n+2)}$$

$$7) \quad \frac{(n+1)!}{(n+2)!} : \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(n+1)! \cdot (n+2)} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \boxed{\frac{n+1}{n+2}}$$

$$8) \quad \frac{12!+3 \cdot 10!}{4 \cdot 9!-9 \cdot 8!} = \frac{9!(10 \cdot 11 \cdot 12 + 3 \cdot 10)}{4 \cdot 9!-9!} = \frac{9!(1320+30)}{9!(4-1)} = \frac{1350}{3} = \boxed{450}$$

$$9) \quad \frac{6 \cdot (6!+5!)}{7!-6!} = \frac{6 \cdot 6!+6 \cdot 5!}{6!(7-1)} = \frac{6 \cdot 6!+6!}{6! \cdot 6} = \frac{6!(6+1)}{6! \cdot 6} = \boxed{\frac{7}{6}}$$

ترکیب (Combination)

هرگاه تعداد حالات مختلف را که r شی متمایز با در نظر داشت n شی به خود میگیرد بنام ترکیب n شی نظر به r شی گفته میشود و توسط فرمول ذیل بدست میآید:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}, \quad n \geq r$$

$$1) \quad \binom{8}{6} = \frac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{2! \cdot 6!} = \frac{56}{2} = \boxed{28}$$

$$2) \quad C_7^{10} = \frac{10!}{(10-7)! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9}{3! \cdot 7!} = \frac{72}{6} = \boxed{12}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

حال با استفاده از رابطه فوق ترکیب های ذیل را چنین دریافت می نمائیم.

$$\begin{array}{ll} 1) \binom{n}{0} = 1 & \binom{7}{0} = 1 \\ 2) \binom{n}{1} = n & \binom{9}{1} = 9 \\ 3) \binom{n}{n-1} = n & \binom{12}{11} = 12 \\ 4) \binom{n}{n} = 1 & \binom{20}{20} = 1 \end{array}$$

حال با استفاده از فورمول ترکیب بینوم $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ را بیان مینمائیم.

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + C_3^n a^{n-3}b^3 \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(a-b)^n = C_0^n a^n - C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 - C_3^n a^{n-3}b^3 + \dots + (-1)^n C_n^n b^n$$

مثال: مطابقت $(a+b)^5$ را توسط ترکیب بینوم بیان نمائید.

$$(a+b)^5 = C_0^5 a^5 + C_1^5 a^4b + C_2^5 a^3b^2 + C_3^5 a^2b^3 + C_4^5 ab^4 + C_5^5 b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

قضیه پاسکال: برای اعداد طبیعی r و n در حالیکه $0 \leq r \leq n$ باشد، داریم که:

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

ثبوت: مطابق تعریف داریم که:

$$\begin{aligned} \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{r(n!)+(n-r+1)n!}{(n-r+1)(n-r)!r(r-1)!} = \frac{n!(r+n-r+1)}{(n-r+1)!r!} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r} \end{aligned}$$

مثال: حاصل افاده ترکیبی $\binom{150}{45} + \binom{150}{46}$ را دریابید.

$$\binom{150}{45} + \binom{150}{46} = \binom{150+1}{46} = \binom{151}{46}$$

نوت: به یاد داشته باشید زمانی که $\binom{n}{x} = \binom{n}{y}$ باشد در آن صورت $x = y$ و یا هم $x + y = n$ میشود.

مثال: هرگاه $\binom{60}{20} = \binom{60}{5y}$ باشد آنگاه قیمت y را دریابید.

$$5y = 20 \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

دریافت حد خواسته شده در بینوم نیوتن

با استفاده از فرمول ترکیب میتوانیم در مطابقت های که شکل $(a \pm b)^n$ را دارند، یک حد دلخواه خواسته شده را طور ذیل بدست آوریم:

$$T_k = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} a^{n-r} \cdot b^r$$

طوری که $k = r + 1$ عبارت از حد خواسته می باشد.

مثال اول: حد پنجم مطابقت $(a + b)^7$ را بدست آورید.

$$k = 5$$

$$r + 1 = 5 \Rightarrow r = 4$$

$$T_5 = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} a^{7-4} b^4 = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!} a^3 b^4 = \boxed{35a^3 b^4}$$

مثال دوم: حد سوم مطابقت $(a - b)^{10}$ را بدست آورید.

$$k = 3$$

$$r + 1 = 3 \Rightarrow r = 2$$

$$T_3 = \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} a^{10-2} (-b)^2 = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 1 \cdot 2} a^8 b^2 = \boxed{45a^8 b^2}$$

مثال سوم: حد چهارم مطابقت $(1 - 2x)^6$ را دریابید.

$$k = 4$$

$$r + 1 = 4 \Rightarrow r = 3$$

$$T_4 = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} (1)^{6-3} (-2x)^3 = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 6} (1)^3 (-8x^3) = \boxed{-160x^3}$$

مثال چهارم: در مطابقت $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ حد پنجم را دریابید.

$$k = 5$$

$$r + 1 = 5 \Rightarrow r = 4$$

$$T_5 = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} (x)^{8-4} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^4 = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4! \cdot 24} \cdot x^4 \cdot \frac{1}{16x^2} = \boxed{\frac{35}{8} x^2}$$

مثال پنجم: حد درجه دوم بینوم $(1 + 3x)^5$ را دریابید.

حل: در بینوم فوق a^0 است بناءً حد b^2 را دریافت می نمایم.

$$n = 5$$

$$r = 2$$

$$\frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} (1)^{5-2} (3x)^2 = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} (1)^3 9x^2 = \boxed{90x^2}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

فرمول عمومی بینوم

به همین ترتیب باینوم های $(a \pm b)^n$ را میتوان با استفاده از فکتوریل، توسط فرمول فزیکدان و ریاضی دان انگلیسی ایزاک نیوتن (*Issac – Newton*) نیز انکشاف داد.

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

$$(a + b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots + \frac{1.2.3\dots n}{n!}b^n$$

$$(a + b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + C_3^n a^{n-3}b^3 \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

خواص مطابقت های $(a \pm b)^n$

- (1) حد اول آن a^n و حد اخیر آن b^n میباشد.
- (2) ضریب حد اول و آخر آن یک (1) میباشد.
- (3) ضریب حد دوم و ماقبل آخر آن عدد (n) میباشد.
- (4) به اندازه $(n + 1)$ حد دارد.
- (5) در حدود متعاقب از توان a یک کم و به توان b علاوه میشود.
- (6) مجموعه ضرایب مطابقت $(a + b)^n$ عبارت از 2^n است.
- (7) مجموعه ضرایب مطابقت $(a - b)^n$ عبارت از صفر است.
- (8) هرگاه مطابقت به شکل $(a^p \pm b^q)^n$ باشد مجموعه توان های حدود آن $\left(\frac{n(n+1)(p+q)}{2}\right)$ است.
- (9) درجه هر حد آن عبارت از n است.
- (10) مجموعه توان های حدود آن $n(n + 1)$ و یا $n^2 + n$ است.

مثال اول: حالت انکشاف یافته مطابقت $(a + b)^9$ دارای چند حد میباشد؟

حل:

چون میدانیم این نوع مطابقت ها دارای $n + 1$ حد میباشد پس:

$$n + 1 \Rightarrow 9 + 1 = \boxed{10}$$

حالت انکشاف یافته مطابقت مذکور دارای 10 حد میباشد.

مثال دوم: هرگاه تعداد حدود حالت انکشاف یافته مطابقت $(a + b)^n$ عبارت از 13 باشد، قیمت n را دریابید.

حل:

میدانیم که مطابقت $(a + b)^n$ دارای $n + 1$ حد میباشد لذا داریم که:

$$n + 1 = 13$$

$$n = 13 - 1 \Rightarrow \boxed{n = 12}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال سوم: مجموعه ضرایب حالت انکشاف یافته مطابقت $(a + b)^9$ چند میشود؟
حل:

چون میدانیم مجموعه ضرایب آن 2^n میباشد پس:

$$2^n \Rightarrow 2^9 = \boxed{512}$$

مجموعه ضرایب حالت انکشاف یافته مطابقت مذکور 512 میباشد.

مثال چهارم: هرگاه مجموعه ضرایب مطابقت $(a + b)^n$ عبارت از 64 باشد، قیمت n را دریابید.
حل:

میدانیم که مجموعه ضرایب مطابقت $(a + b)^n$ از رابطه 2^n دریافت میگردد.

$$2^n = 64$$

$$2^n = 2^6 \Rightarrow \boxed{n = 6}$$

مثال پنجم: مجموعه ضرایب حالت انکشاف یافته مطابقت $(a - b)^{16}$ را دریابید.

حل: میدانیم که مجموعه ضرایب مطابقت $(a - b)^n$ عبارت از صفر است، لذا مجموعه ضرایب مطابقت $(a - b)^{16}$ عبارت از صفر میباشد.

مثال ششم: در مطابقت ذیل قیمت های عدد m و n را دریابید.

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^m + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

حل:

چون میدانیم که درجه هر حد آن مساوی به n میباشد، پس:

$$n + 2 = 6 \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

$$3 + m = 6 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

مثال هفتم: مجموعه توان های حدود، حالت انکشاف یافته مطابقت $(a + b)^6$ را دریابید.
حل:

چون میدانیم که مجموعه توان های این نوع مطابقت ها $n(n + 1)$ میباشد، پس:

$$n(n + 1) \Rightarrow 6(6 + 1) = 6 \cdot 7 = \boxed{42}$$

پس مجموعه توان های حدود انکشاف یافته مطابقت مذکور عبارت از 42 میباشد.

مثال هشتم: هرگاه مجموعه توان های حدود، حالت انکشاف یافته مطابقت $(a + b)^n$ عبارت از 20 باشد، قیمت n را دریابید.

حل:

چون میدانیم که مجموعه توان های این نوع مطابقت ها $n(n + 1)$ میباشد، پس:

$$n(n + 1) = 20$$

$$n^2 + n = 20$$

$$n^2 + n - 20 = 0$$

$$(n-4)(n+5) = 0$$

$$n_1 = 4, \quad n_2 = -5$$

چونکه قیمت منفی آن قابل قبول نه میباشد بناءً قیمت n عبارت از 4 میباشد.

مثال نهم: مجموعه توان های حدود، حالت انکشاف یافته مطابقت $(a^3 + b^5)^4$ را دریابید.

حل: چون میدانیم که مجموعه توان های این شکل مطابقت از فورمول $\frac{n(n+1)(p+q)}{2}$ بدست می آید.

$$\frac{n(n+1)(p+q)}{2} = \frac{4(4+1)(3+5)}{2} = \boxed{80}$$

مثال دهم: ثابت نمائید که $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ است.

حل:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$a = b = 1$$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} (1)^n + \binom{n}{1} (1)^{n-1}(1) + \binom{n}{2} (1)^{n-2}(1)^2 + \dots + \binom{n}{n} (1)^n$$

$$\Rightarrow 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

مثال یازدهم: ثابت نمائید که $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ است.

حل:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

$$a = b = 1$$

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} (1)^n - \binom{n}{1} (1)^{n-1}(1) + \binom{n}{2} (1)^{n-2}(1)^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} (1)^n$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

مثال دوازدهم: قیمت افاده ترکیبی $\binom{40}{0} + \binom{40}{1} + \binom{40}{2} + \dots + \binom{40}{40}$ را دریابید.

حل: چون میدانیم که $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ است بناءً داریم که:

$$\binom{40}{0} + \binom{40}{1} + \binom{40}{2} + \dots + \binom{40}{40} = 2^{40}$$

مطابقت های گروپ دوم:

مطابقت هایکه شکل $a^n - b^n$ را دارد. تمام مطابقت های این گروپ به حاصل ضرب دو قوس برای تمام نمای n (جفت یا طاق) چنین عمل می نمائیم.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1})$$

مثالها:

- $a^0 - b^0 = 0$
 - $a^1 - b^1 = a - b$
 - $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 - $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 - $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
 - $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
 - $a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
 - $a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$
 - $a^8 - b^8 = (a - b)(a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7)$
- مطابقت های که دارای درجه بلند تر اند به همین صورت انکشاف داده میشوند.

علاوئاً اگر n به عوامل ضربی خویش تجزیه گردد، تعداد این نوع تجزیه ها نیز متعدد می گردد.
 بطور مثال: بینوهای ذیل را به شکل حاصل ضرب دو قوس چنین انکشاف میدهیم:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
 $(a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$
- $a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
 $(a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$
 $(a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$
- $a^8 - b^8 = (a - b)(a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7)$
 $(a^4)^2 - (b^4)^2 = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4)$
 $(a^2)^4 - (b^2)^4 = (a^2 - b^2)(a^6 + a^2b^4 + b^6)$

یادداشت: هرگاه در این نوع بینوم های $a^n - b^n$ اگر n یک عدد جفت باشد. میتوان بینوم های مذکور را طوری ذیل نیز به دو قوس انکشاف داد.

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1})$$

مثلاً:

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
- $a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
- $a^8 - b^8 = (a + b)(a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + a^3b^4 - a^2b^5 + ab^6 - b^7)$

ثبوت مطابقت های $a^n - b^n$:

به صورت عموم برای ثبوت این مطابقت ها دو حالت را در نظر میگیریم:
الف) در صورتیکه n یک عدد جفت بوده و علامه بین a^n و b^n منفی باشد، از رابطه زیر برای اثبات مطابقت های استفاده میکنیم.

$$a^n - b^n = a^n - (ab)^{\frac{n}{2}} + (ab)^{\frac{n}{2}} - b^n$$

ب) در صورتیکه n یک عدد طاق بوده و علامه بین a^n و b^n منفی باشد، از رابطه زیر برای اثبات مطابقت ها استفاده میکنیم.

$$a^n - b^n = (a - b)^n + (\text{حدودیکه دو طرف را برابر سازد})$$

ثبوت مطابقت $a^2 - b^2$:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Proof:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= a^2 - (ab)^{\frac{2}{2}} + (ab)^{\frac{2}{2}} - b^2 \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= (a - b)(a + b) \end{aligned}$$

ثبوت مطابقت $a^3 - b^3$:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Proof:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a - b)^3 + 3ab(a - b) \\ &= (a - b)[(a - b)^2 + 3ab] \\ &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

ثبوت مطابقت $a^4 - b^4$:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Proof:

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= a^4 - (ab)^{\frac{4}{2}} + (ab)^{\frac{4}{2}} - b^4 \\ &= a^4 - a^2b^2 + a^2b^2 - b^4 \\ &= a^2(a^2 - b^2) + b^2(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\ &= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \\ &= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \end{aligned}$$

مسائل مطابقت $a^n - b^n$

1) $4x^2 - 9 = ?$

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$$

2) $16x^6 - 25y^4 = ?$

$$16x^6 - 25y^4 = (4x^3)^2 - (5y^2)^2 = (4x^3 - 5y^2)(4x^3 + 5y^2)$$

(3) فرق بین مربع اعداد 19 و 49 چند است.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$49^2 - 19^2 = (49 - 19)(49 + 19) \Rightarrow (30)(68) = 2040$$

(4) فرق بین مکعب اعداد 9 و 5 چند است.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$9^3 - 5^3 = (9 - 5)(9^2 + 9 \cdot 5 + 5^2)$$

$$729 - 125 = (4)(81 + 45 + 25) \Rightarrow (4)(151) = 604$$

(5) حاصل تفاضل 5^4 و 3^4 چند است.

$$5^4 - 3^4 = (5 - 3)(5^3 + 5^2 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 3^3)$$

$$(2)(125 + 75 + 45 + 27) \Rightarrow (2)(272) = 544$$

6) $8x^3 - y^3 = ?$

$$8x^3 - y^3 = (2x)^3 - (y)^3 = (2x - y)[(2x)^2 + (2x) \cdot y + (y)^2]$$

$$\Rightarrow (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

7) $16x^4 - \frac{1}{4}y^4 = ?$ $(2x)^4 - \left(\frac{1}{2}y\right)^4$

$$16x^4 - \frac{1}{4}y^4 = (2x)^4 - \left(\frac{1}{2}y\right)^4$$

$$\left(2x - \frac{1}{2}y\right) \left[(2x)^3 + (2x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) + (2x) \cdot \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^3 \right]$$

$$\Rightarrow \left(2x - \frac{1}{2}y\right) \left(8x^3 + 2x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{8}y^3\right)$$

8) $x^4 - y^4 = ?$

$$x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

9) $m^6 - n^6 = ?$

$$m^6 - n^6 = (m + n)(m^5 - m^4n + m^3n^2 - m^2n^3 + mn^4 - n^5)$$

10) $x^4 - 16 = ?$

$$x^4 - 16 = x^4 - 2^4 = (x + 2)(x^3 - x^2 \cdot 2 + x \cdot 2^2 - 2^3)$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$$

11) $4x^2 - a^2 = ?$

$$4x^2 - a^2 = (2x)^2 - a^2 = (2x - a)(2x + a)$$

$$12) \quad p^2 - \frac{1}{25} = ?$$

$$p^2 - \frac{1}{25} = p^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(p - \frac{1}{5}\right)\left(p + \frac{1}{5}\right)$$

$$13) \quad x^3 - a = ?$$

$$x^3 - a = x^3 - (\sqrt[3]{a})^3 = (x - \sqrt[3]{a})(x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})$$

$$14) \quad y^2 - 169 = ?$$

$$y^2 - 169 = y^2 - 13^2 = (y - 13)(y + 13)$$

$$15) \quad 16x^4 - \frac{y^2}{81} = ?$$

$$16x^4 - \frac{y^2}{81} = (4x^2)^2 - \left(\frac{y}{9}\right)^2 = \left(4x^2 - \frac{y}{9}\right)\left(4x^2 + \frac{y}{9}\right)$$

مطابقت های گروپ سوم:

انکشاف مطابقت هائیکه شکل $a^n + b^n$ را دارا میباشد. در انکشاف این نوع مطابقت ها دو حالت ذیل موجود میباشد.

حالت اول: در صورتیکه n یک عدد طاق بوده و علامه بین a^n و b^n مثبت باشد، از رابطه ذیل برای انکشاف این مطابقت ها استفاده می نمائیم.

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

حالت دوم: در صورتیکه n یک عدد جفت بوده و علامه بین a^n و b^n مثبت باشد، از رابطه ذیل برای انکشاف این مطابقت ها استفاده می نمائیم.

$$a^n + b^n = \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}}\right)\left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}}\right)$$

$$1) \quad a^0 + b^0 = 2$$

$$2) \quad a^1 + b^1 = a + b$$

$$3) \quad a^2 + b^2 = (a + b + \sqrt{2ab})(a + b - \sqrt{2ab}) = (a + b \pm \sqrt{2ab})$$

$$a^2 + b^2 = a^2 - 1b^2 = a^2 - (ib)^2 \Rightarrow (a - ib)(a + ib) \quad \text{و یا هم}$$

$$4) \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$5) \quad a^4 + b^4 = \left(a^{\frac{4}{2}} + b^{\frac{4}{2}} + \sqrt{2a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{4}{2}}}\right)\left(a^{\frac{4}{2}} + b^{\frac{4}{2}} - \sqrt{2a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{4}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}) = (a^2 + b^2 \pm \sqrt{2a^2b^2})$$

$$a^4 + b^4 = a^4 - 1b^4 = (a^2)^2 - (ib^2)^2 \Rightarrow (a^2 - ib^2)(a^2 + ib^2) \quad \text{و یا هم}$$

$$6) a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$7) a^6 + b^6 = \left(a^{\frac{6}{2}} + b^{\frac{6}{2}} + \sqrt{2a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{6}{2}}} \right) \left(a^{\frac{6}{2}} + b^{\frac{6}{2}} - \sqrt{2a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{6}{2}}} \right)$$

$$\Rightarrow (a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3}) = (a^3 + b^3 \pm \sqrt{2a^3b^3})$$

$$a^6 + b^6 = a^6 - 1b^6 = (a^3)^2 - (ib^3)^2 = (a^3 - ib^3)(a^3 + ib^3) \quad \text{و یا هم}$$

$$a^6 + b^6 = a^6 - (-1b^6) = (a^2)^3 - (ib^2)^3$$

$$= (a^2 - ib^2)[(a^2)^2 + (a^2)(ib^2) + (ib^2)^2]$$

$$\Rightarrow (a^2 - ib^2)(a^4 + a^2b^2i + i^2b^2) \quad \text{و یا هم}$$

ثبوت مطابقت های $a^n + b^n$

بصورت عموم برای ثبوت این مطابقت ها دو حالت در نظر میگیریم.
حالت اول: در صورتیکه n یک عدد جفت بوده و علایم بین a^n و b^n مثبت باشد، از رابطه زیر برای اثبات مطابقت ها استفاده میکنیم.

$$a^n + b^n = \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} \right)^2 - 2(ab)^{\frac{n}{2}}$$

حالت دوم: در صورتیکه n یک عدد طاق بوده و علامه بین a^n و b^n مثبت باشد، از رابطه زیر برای اثبات مطابقت ها استفاده میکنیم.

$$a^n + b^n = (a + b)^n - (\text{حدودیکه دو طرف را برابر سازد})$$

ثبوت مطابقت $a^2 + b^2$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \left(a^{\frac{2}{2}} + b^{\frac{2}{2}} \right)^2 - 2(ab)^{\frac{2}{2}} \\ &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= (a + b)^2 - (\sqrt{2ab})^2 \\ &= (a + b + \sqrt{2ab})(a + b - \sqrt{2ab}) \end{aligned}$$

ثبوت مطابقت $a^3 + b^3$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

ثبوت مطابقت $a^4 + b^4$

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= \left(a^{\frac{4}{2}} + b^{\frac{4}{2}}\right)^2 - 2(ab)^{\frac{4}{2}} \\ &= (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - \left[\sqrt{2(ab)^2}\right]^2 \\ &= \left[a^2 + b^2 + \sqrt{2(ab)^2}\right] \left[a^2 + b^2 - \sqrt{2(ab)^2}\right] \\ &= (a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab) \end{aligned}$$

ثبوت مطابقت $a^5 + b^5$

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= (a + b)^5 - 5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4 \\ &= (a + b)^5 - 5a^4b - 5a^3b^2 - 5a^3b^2 - 5a^2b^3 - 5a^2b^3 - 5ab^4 \\ &= (a + b)^5 - 5a^3b(a + b) - 5a^2b^2(a + b) - 5ab^3(a + b) \\ &= (a + b)[(a + b)^4 - 5a^3b - 5a^2b^2 - 5ab^3] \\ &= (a + b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - 5a^3b - 5a^2b^2 - 5ab^3) \\ &= (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \end{aligned}$$

یادداشت: جهت اجرای عملیات الجبری مطابقت های مشهور ذیل را به شکل نتیجه همیشه به حافظه بسپارید:

1. مربع کامل (تام):

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

2. تفاضل مربعات:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

3. مجموعه مربعات:

$$a^2 + b^2 = (a + b + \sqrt{2ab})(a + b - \sqrt{2ab})$$

4. تفاضل مربعات دو قوس مزدوج:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \quad \text{Or} \quad (a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$$

5. مجموعه مربعات دو قوس مزدوج:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \quad \text{Or} \quad (a - b)^2 + (a + b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

6. تفاضل مکعبات:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

7. مجموعه مکعبات:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

مطابقت های فرعی

$$1) (a + b + c)^2 = ?$$

$$\begin{aligned} [a + (b + c)]^2 &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ \Rightarrow (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

$$2) (a + b + c + d)^2 = ?$$

$$\begin{aligned} [(a + b) + (c + d)]^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac + ad + bc + bd) + c^2 + 2cd + d^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &+ 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \end{aligned}$$

$$3) (a + b + c)^3 = ?$$

$$\begin{aligned} [a + (b + c)]^3 &= a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a(b^2 + 2bc + c^2) + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \\ \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 &+ 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc \end{aligned}$$

$$4) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$5) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

$$6) a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \left[\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{b-c}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{c-a}{\sqrt{2}}\right]^2$$

مسائل تطبیقی مطابقت ها

1) هرگاه $ab = 20$ و $a + b = 9$ باشد پس قیمت $a - b$ را دریابید؟

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \Rightarrow 9^2 - (a - b)^2 = 4 \cdot 20$$

$$81 - (a - b)^2 = 80 \Rightarrow -(a - b)^2 = -1$$

$$(a - b)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a - b = \pm 1}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

(2) اگر $x + \frac{1}{x} = 6$ باشد پس قیمت افاده $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

$$x + \frac{1}{x} = 6$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 36 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 36$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 36 - 2 \Rightarrow \boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = 34}$$

(3) اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$ باشد قیمت افاده $x^4 + \frac{1}{x^4}$ مساوی است به؟

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 34 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 34^2$$

$$= x^4 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 1156$$

$$= x^4 + \frac{1}{x^4} = 1156 - 2 \Rightarrow \boxed{x^4 + \frac{1}{x^4} = 1154}$$

(4) اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 27$ باشد قیمت افاده $x + \frac{1}{x}$ کدام است؟

$$x + \frac{1}{x} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 27 + 2 \Rightarrow \boxed{x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{29}}$$

(5) اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 27$ باشد قیمت افاده $x - \frac{1}{x}$ کدام است؟

$$x - \frac{1}{x} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 27 - 2 \Rightarrow \boxed{x - \frac{1}{x} = \pm 5}$$

(6) اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 20$ و $a + b + c = 0$ باشد قیمت $ab + bc + ac$ را دریافت نمائید؟

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$0^2 = 20 + 2(ab + ac + bc)$$

$$2(ab + ac + bc) = -20 \Rightarrow \boxed{ab + ac + bc = -10}$$

(7) اگر $a + b + c = 9$ و $ab + bc + ac = 40$ باشد قیمت افاده $a^2 + b^2 + c^2$ را دریافت نمائید؟

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$9^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(40)$$

$$81 = a^2 + b^2 + c^2 + 80 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1}$$

(8) اگر $x + y = 12$ و $xy = 27$ باشد قیمت افاده $x^3 + y^3$ را دریابید؟

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$12^3 = x^3 + y^3 + 3 \cdot 27 \cdot 12$$

$$1728 = x^3 + y^3 + 972$$

$$x^3 + y^3 = 1728 - 972 \Rightarrow \boxed{x^3 + y^3 = 756}$$

(9) هر گاه $x - y = 4$ و $xy = 27$ باشد پس قیمت افاده $x^3 - y^3$ را دریابید؟

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

$$4^3 = x^3 - y^3 - 3(27)(4)$$

$$64 = x^3 - y^3 - 81 \cdot 4$$

$$x^3 - y^3 = 64 + 324 \Rightarrow \boxed{x^3 - y^3 = 388}$$

(10) اگر $x + \frac{1}{x} = 7$ باشد قیمت افاده $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را دریابید؟

$$x + \frac{1}{x}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$7^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(7)$$

$$343 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 21 \Rightarrow \boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = 322}$$

(11) اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ باشد قیمت افاده $x^3 - \frac{1}{x^3}$ را دریابید؟

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$3^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(3)$$

$$27 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 9 \Rightarrow \boxed{x^3 - \frac{1}{x^3} = 36}$$

(12) هرگاه $a + b + c = 15$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ باشد قیمت افاده $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ را دریافت نمایند؟

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac))$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$15^2 = 83 + 2(ab + ac + bc)$$

$$225 = 83 + 2(ab + ac + bc)$$

$$2(ab + ac + bc) = 142$$

$$(ab + ac + bc) = 71$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 15(83 - 71)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 15 \cdot 12 \Rightarrow \boxed{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 180}$$

(13) قیمت $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ را دریابید اگر $b - c = 2$ ، $c - a = 1$ و $a - b = 1$ باشد؟

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 = \boxed{3}$$

(14) قیمت افاده $x + \frac{1}{x} = 3$ است پس قیمت افاده $x^8 + \frac{1}{x^8}$ چند خواهد بود؟

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 7^2$$

$$x^4 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 49 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 = 47^2$$

$$x^8 + 2x^4 \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8} = 2209 \Rightarrow x^8 + \frac{1}{x^8} = 2209 - 2 \Rightarrow \boxed{x^8 + \frac{1}{x^8} = 2207}$$

(15) اگر قیمت $a + b = 7$ باشد و قیمت $a - b = 1$ باشد آنگاه قیمت $a^2 + b^2$ چند خواهد بود؟

$$\begin{array}{l|l} a + b = 7 & (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ a - b = 1 & + \\ & (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline a^2 + b^2 = ? & (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \end{array}$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$7^2 + 1^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$50 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = 25}$$

(16) هر گاه قیمت $x + y = 4$ و $x - y = 6$ باشد، قیمت $x^2 - y^2$ را دریابید؟

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \Rightarrow x^2 - y^2 = 4 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = 24}$$

(17) هرگاه قیمت $a + b = 2$ و $a - b = 4$ باشد پس قیمت $a^3 - b^3$ چند خواهد بود؟

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \quad (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(2)^2 - (4)^2 = 4ab \quad 4^3 = a^3 - b^3 - 3 \cdot (-3)(4)$$

$$4 - 16 = 4ab \Rightarrow ab = -3 \quad 64 = a^3 - b^3 + 36$$

$$a^3 - b^3 = 64 - 36 \Rightarrow \boxed{a^3 - b^3 = 28}$$

(18) اگر $a^2 + b^2 = 12$ باشد و $ab = 2$ باشد قیمت $a + b$ را دریابید؟

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a + b)^2 = 12 + 2 \cdot 2 \Rightarrow (a + b)^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a + b = \pm 4}$$

(19) هر گاه قیمت $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 6$ باشد قیمت $x + \frac{1}{x}$ را دریابید؟

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 36$$

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 36 \Rightarrow \boxed{x + \frac{1}{x} = 34}$$

(20) هر گاه $x^{0,25} + x^{-0,25} = 10$ باشد قیمت $x^{0,5} + x^{-0,5}$ را دریافت نمائید.

$$x^{0,25} + x^{-0,25} = 10 \Rightarrow x^{\frac{25}{100}} + x^{-\frac{25}{100}} = 10$$

$$x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} = 10 \Rightarrow x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = 10$$

$$\left(x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow x^{1/2} + 2 + \frac{1}{x^{1/2}} = 100 \Rightarrow \boxed{x^{0,5} + x^{-0,5} = 98}$$

(21) اگر قیمت $a + b + c = 20$ و $ab + ac + bc = 40$ باشد، آنگاه قیمت عددی $a^2 + b^2 + c^2$ چند خواهد بود.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$20^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow 400 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(40)$$

$$400 = a^2 + b^2 + c^2 + 80 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 320}$$

(22) تعداد جملات مطابقت $(a + b + c)^{12}$ چند است.

تعداد جملات $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n$ از فورمول $N = \frac{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}{n!}$ بدست می آید.

$$n = 12, k = 3, k + n - 1 = 3 + 12 - 1 = 14$$

$$N = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{12!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = 91$$

(23) تعداد جملات مطابقت $(a + b + c + d)^7$ چند است.

تعداد جملات $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n$ از فورمول $N = \frac{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}{n!}$ بدست می آید.

$$n = 7, \quad k = 4, \quad k + n - 1 = 4 + 7 - 1 = 10$$

$$N = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \boxed{360}$$

(24) در حالت انکشاف یافته مطابقت $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ عدد ثابت کدام است؟

حل: منظور از عدد ثابت حدی است که در آن x موجود نباشد و لذا باید توان x صفر باشد. جمله $(P + 1)$ ام در انکشاف $(a + b)^n$ عبارت است از:

$$T_{P+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p, \quad T_{P+1} = \binom{8}{P} x^{8-P} \frac{1}{x^P} = \binom{8}{P} x^{8-2P}$$

چون توان x باید صفر باشد بناءً $8 - 2P = 0$ می شود.

$$8 - 2P = 0 \Rightarrow -2P = -8 \Rightarrow P = 4$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4! \cdot 4!} = \boxed{70}$$

(25) ضریب حد x^4 در حالت انکشاف یافته مطابقت $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^8$ کدام است؟

حل: جمله $(P + 1)$ ام در انکشاف $(a + b)^n$ عبارت است از:

$$T_{P+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p, \quad T_{P+1} = \binom{8}{P} (2x)^{8-P} \left(-\frac{1}{4}\right)^P = \binom{8}{P} 2^{8-P} x^{8-P} (-1)^P 2^{-2P}$$

توان x را مساوی به 4 قرار میدهیم داریم:

$$8 - P = 4 \Rightarrow P = 4$$

$$\begin{aligned} x^4 \text{ ضریب حد} &= \binom{8}{4} 2^{8-4} (-1)^4 2^{-2 \cdot 4} \\ &= \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} \cdot 2^4 \cdot 1 \cdot 2^{-8} \\ &= \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4! \cdot 4!} \cdot 2^{-4} = 70 \cdot \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{\frac{35}{8}} \end{aligned}$$

(26) حد هفتم مطابقت $(2x - 3)^9$ را دریابید.

حل: برای دریافت حد خواسته شده بینوم از فورمول ذیل استفاده می نمائیم.

$$\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} a^{n-r} b^r, \quad n = 9, \quad r = 6, \quad a = 2x, \quad b = -3$$

$$\frac{9!}{(9-6)! \cdot 6!} (2x)^{9-6} (-3)^6 = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{3! \cdot 6!} (2x)^3 (-3)^6$$

$$= 84 \cdot (8x^3) \cdot 729 = \boxed{489888x^3}$$

(27) حد سوم بینوم $(x + 1)^8$ مساوی به $56mx^6$ است، قیمت m کدام است؟

حل: نخست حد سوم بینوم $(x + 1)^8$ را دریافت می نمائیم.

$$\frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} x^{8-2} (1)^2 = 28x^6$$

$$28x^6 = 56mx^6 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

(28) در انکشاف مطابقت $\left(\frac{a}{x} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}$ حد وسطی کدام است؟

حل: جمله مورد نظر T_9 است.

$$T_9 = \binom{16}{8} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^8 \cdot \left(-x^{\frac{1}{2}}\right)^8 \Rightarrow T_9 = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{8! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{a^8}{x^8} \cdot x^4$$

$$\Rightarrow \boxed{T_9 = 12870 \frac{a^8}{x^4}}$$

(29) هرگاه مجموعه توان های حالت انکشاف یافته مطابقت $(a+b)^m$ عبارت از 72 باشد آنگاه قیمت m چند است.

حل: میدانیم که مجموعه توان های مطابقت $(a+b)^m$ عبارت از $m^2 + m$ میباشد.

$$m^2 + m = 72$$

$$m^2 + m - 72 = 0 \Rightarrow m_1 = 8, \quad m_2 = -9$$

قیمت مورد نظر $m = 8$ میباشد.

(30) حدی را در انکشاف $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^{21}$ دریابید که توان a و b مساوی باشد.

حل: حد $n+1$ ام را دریافت می نمایم.

$$T_{n+1} = \binom{21}{n} \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^{21-n} \cdot \left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^n = \binom{21}{n} \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}}\right)^{21-n} \cdot \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^n$$

$$\binom{21}{n} \left(\frac{a^{\frac{21-n}{3}}}{b^{\frac{21-n}{6}}}\right) \left(\frac{b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{6}}}\right) = \binom{21}{n} a^{\frac{21-n}{3} - \frac{n}{6}} \cdot b^{\frac{n}{2} - \frac{21-n}{6}}$$

چون در حد خواسته شده توان های a و b مساوی خواسته شده است بناءً داریم که:

$$\frac{21-n}{3} - \frac{n}{6} = \frac{n}{2} - \frac{21-n}{6} \Rightarrow \frac{42-3n}{6} = \frac{4n-21}{6}$$

$$42 - 3n = 4n - 21 \Rightarrow \boxed{n = 9}$$

تجزیه افاده های الجبری

تجزیه یک افاده الجبری عبارت از دریافت چند افاده دیگر به شکل عوامل ضربی است طوریکه حاصل ضرب شان افاده اولی را بدهد.

چون افاده های الجبری به اشکال مختلف وجود دارند لذا برای تجزیه نمودن آنها به فکتور ها کدام طریقه عمومی وجود ندارد. بلکه هر افاده قابل تجزیه به فکتور ها به روش خاص تجزیه می گردد. براینکه یک افاده الجبری را تجزیه نمائیم انواع تجزیه را مورد بحث قرار میدهم.

تجزیه نوع اول: این تجزیه به اساس مشترک گرفتن است یعنی هرگاه در یک افاده الجبری یک عامل مشترک بین تمام حدود آن موجود شده بتواند میتوان آنرا مشترک گرفت و پولینوم مذکور را تجزیه کرد.

- 1) $ab + ac - ad = a(b + c - d)$
- 2) $x^4 - x^3y + x^2y^2 = x^2(x^2 - xy + y^2)$
- 3) $\frac{1}{2}m^2 - 2m = \frac{1}{2}m(m - 4)$
- 4) $3xy - 6x^2 = 3x(y - 2x)$
- 5) $x^4 - x^3y + x^2x = x^3(x - y + 1)$
- 6) $x(2x - 3y)^2 + 8(2x - 3y) = (2x - 3y)[x(2x - 3y) + 8]$
 $= (2x - 3y)(2x^2 - 3xy + 8)$
- 7) $10ab - 15ac = 5a(2b - 3c)$
- 8) $32x^2y - 4xy^2 = 4xy(8x - y)$
- 9) $\sqrt{2}x^3y^2 - \sqrt{8}xy = \sqrt{2}xy(x^2y - 2)$
- 10) $a(x + y + z) + b(x + y + z) + c(x + y + z)$
 $= (x + y + z)(a + b + c)$
- 11) $ab + b + b = b(a + 1 + 1) = b(a + 2)$
- 12) $\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{m^2} + \frac{c^2}{m^2} = \frac{1}{m^2}(a^2 + b^2 + c^2)$
- 13) $4a - 5a^2 = a(4 - 5a)$
- 14) $2x^4 - 6x^3 + 8x^2 = 2x^2(x^2 - 3x + 4)$
- 15) $48x^2y^2 - 24x^2y^3 + 36x^3y^4 - 12x^4y^5 = 12x^2y^2(4 - 2y + 3xy^2 - x^2y^3)$
- 16) $4x + 8y - 12t = 4(x + 2y - 3t)$
- 17) $2x^2 - 3xy = x(2x - 3y)$
- 18) $3x^2 + 6x^3 + 18x^4 = 3x^2(1 + 2x + 6x^2)$
- 19) $9a^3b + 15a^2b^3 - 3s^2a^2 = 3a^2(3ab + 5b^3 - s^2)$
- 20) $10a^2b^3c^4 - 15a^3b^2c^4 + 30a^4b^3c^2 = 5a^2b^2c^2(2bc^2 - 3ac^2 + 6a^2b)$

تجزیه نوع دوم: این تجزیه به اساس مطابقت $(a^2 - b^2)$ استوار است.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

- 1) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 \Rightarrow x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$
- 2) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 \Rightarrow (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$
- 3) $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$
 $= 3(x^2 - 2^2) = 3(x + 2)(x - 2)$
- 4) $1 - m^2n^4 = 1^2 - (mn^2)^2 = (1 + mn^2)(1 - mn^2)$
- 5) $25x^2 - 4y^2 = (5x)^2 - (2y)^2 = (5x + 2y)(5x - 2y)$
- 6) $1 - x^8 = 1^2 - (x^4)^2 = (1 + x^4)(1 - x^4)$
 $= (1 + x^4)(1^2 - (x^2)^2)$
 $= (1 + x^4)(1 + x^2)(1 - x^2)$
 $= (1 + x^4)(1 + x^2)(1 + x)(1 - x)$
- 7) $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
 $= (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$
- 8) $9x^2y^2 - 16a^2 = (3xy)^2 - (4a)^2 = (3xy + 4a)(3xy - 4a)$
- 9) $32a^4b - 162b^5 = 2b(16a^4 - 81b^4)$
 $= 2b[(4a)^2 - (9b)^2] = 2b(4a^2 - 9b^2)(4a^2 + 9b^2)$
 $= 2b(2a - 3b)(2a + 3b)(4a^2 + 9b^2)$
- 10) $(x + 1)^2 - 36y^2 = (x + 1)^2 - (6y)^2$
 $= (x + 1 + 6y)(x + 1 - 6y)$

تجزیه نوع سوم: این تجزیه به اساس مطابقت های $(a^3 - b^3)$ و $(a^3 + b^3)$ استوار است.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

- 1) $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
- 2) $8x^3y^3 - 1 = (2xy)^3 - (1)^3 = (2xy - 1)(4x^2y^2 + 2xy + 1)$
- 3) $m^9 + n^9 = (m^3)^3 + (n^3)^3 = (m^3 + n^3)(m^6 - m^3n^3 + n^6)$
 $= (m + n)(m^2 - mn + n^2)(m^6 - m^3n^3 + n^6)$
- 4) $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$
 $= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$5) \quad 125x^3 - 64y^3 = (5x)^3 - (4y)^3 = (5x - 4y)(25x^2 + 20xy + 16y^2)$$

$$6) \quad 8m^3 + x^6 = (2m)^3 + (x^2)^3 = (2m + x^2)(4m^2 - 2mx^2 + x^4)$$

$$7) \quad x^{12} - y^{12} = (x^4)^3 - (y^4)^3 = (x^4 - y^4)(x^8 + x^4y^4 + y^8)$$

$$= [(x^2)^2 - (y^2)^2](x^8 + x^4y^4 + y^8)$$

$$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^8 + x^4y^4 + y^8)$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^8 + x^4y^4 + y^8)$$

$$8) \quad t^6 + e^6 = (t^2)^3 + (e^2)^3 = (t^2 + e^2)(t^4 - t^2e^2 + e^4)$$

$$9) \quad (x - 2)^3 + 8y^3 = (x - 2)^3 + (2y)^3$$

$$= (x - 2 + 2y)[(x - 2)^2 + (x - 2)(2y) + (2y)^2]$$

$$= (x - 2 + 2y)(x^2 - 4x + 4 + 2yx - 4y + 4y^2)$$

$$10) \quad 3x^4 - 81x = 3x(x^3 - 27)$$

$$= 3x(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

تجزیه نوع چهارم: این تجزیه به اساس مطابقت های $(a - b)^2$ و $(a + b)^2$ استوار است.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$1) \quad x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x + 3)^2$$

$$= (x + 3)(x + 3)$$

$$2) \quad 9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x + (2y)^2 = (3x - 2y)^2$$

$$= (3x - 2y)(3x - 2y)$$

$$3) \quad x^4 + 36y^4 + 12x^2y^2 = x^4 + 12x^2y^2 + 36y^4$$

$$= (x^2)^2 + 2 \cdot 6 \cdot y^2 + (6y^2)^2 = (x^2 + 6y^2)^2$$

$$= (x^2 + 6y^2)(x^2 + 6y^2)$$

$$4) \quad 4m^6n^6 - 32m^4n^4 + 64m^2n^2 = 4m^2n^2(m^4n^4 - 8m^2n^2 + 16)$$

$$= 4m^2n^2[(m^2n^2)^2 - 2 \cdot m^2n^2 \cdot 4 + 4^2]$$

$$= 4m^2n^2(m^2n^2 - 4)^2 = 4m^2n^2(m^2n^2 - 4)(m^2n^2 - 4)$$

$$5) \quad 1 + 4y + 4y^2 = 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + (2y)^2$$

$$= (1 + 2y)^2 = (1 + 2y)(1 + 2y)$$

$$6) \quad x^2 - 16xy + 64 = x^2 - 2 \cdot 8 \cdot xy + 8^2 = (x - 8)^2 = (x - 8)(x - 8)$$

$$7) \quad 16x^4 + 72x^2 + 81y^2 = (4x^2)^2 + 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot xy + (9y)^2$$

$$= (4x^2 + 9y)^2 = (4x^2 + 9y)(4x^2 + 9y)$$

$$8) \quad 2x^3y^3 + 16x^2y^4 + 32xy^5 = 2xy^3(x^2 + 8xy + 16y^2) \\ = 2xy^3(x + 4y)^2 = 2xy^3(x + 4y)(x + 4y)$$

$$9) \quad 16m^2 - 40mn + 25n^2 = (4m)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot m \cdot n + (5n)^2 \\ = (4m - 5n)^2 = (4m - 5n)(4m - 5n)$$

$$10) \quad a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (ax - by)(ax - by)$$

تجزیه نوع پنجم: (تجزیه افاده سه حده)

برای تجزیه ترینوم های شکل $(ax^2 + bx + c)$ حالات ذیل را در نظر میگیریم:

1) حل به طریق دو شاخه

هرگاه $a = 1$ باشد درینصورت سه جمله فوق شکل $x^2 + bx + c$ را بخود می گیرد.

برای تجزیه نمودن این نوع افاده ها دو عدد را طوری به دست می آوریم که حاصل جمع آنها مساوی به b و حاصل ضرب آنها مساوی به c گردد.

$$x^2 + bx + c, \quad b = (m + n), \quad c = (m \cdot n)$$

$$x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + (m \cdot n)$$

$$= \underbrace{x^2 + mx}_x + \underbrace{nx + mn}_n$$

$$= \underbrace{x(x + m) + n(x + m)}_{(x+m)} \Rightarrow (x + m)(x + n)$$

مثال اول: افاده $x^2 + 5x + 6$ را تجزیه می نمایم.

حل: دیده میشود که $b = 5$ و $c = 6$ است و دو عددیکه حاصل جمع آنها 5 و حاصل ضرب آنها 6 شود عبارت از 2 و 3 می باشند.

$$b = 2 + 3 = 5, \quad c = 2 \cdot 3 = 6$$

$$x^2 + 5x + 6$$

$$x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3$$

$$\underbrace{x^2 + 2x}_x + \underbrace{3x + 2 \cdot 3}_3 = \underbrace{x(x + 2) + 3(x + 2)}_{(x+2)} \Rightarrow \boxed{(x + 2)(x + 3)}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال دوم: افاده $x^2 - 12x + 20$ را تجزیه می‌نمائیم.

حل: دیده میشود که $b = -12$ و $c = +20$ است و دو عددیکه حاصل جمع آنها -12 و حاصل ضرب آنها $+20$ شود عبارت از -2 و -10 می‌باشند.

$$x^2 - 12x + 20$$

$$x^2 - (2 + 10)x + (-2)(-10)$$

$$\underbrace{x^2 - 2x}_x - \underbrace{10x + (-2)(-10)}_{-10} = x(x - 2) - 10(x - 2) \Rightarrow \boxed{(x - 2)(x - 10)}$$

مثال سوم: می‌خواهیم افاده $m^2 - 6m - 7$ را تجزیه نمائیم.

$$m^2 - 6m - 7$$

حل: دیده میشود که $b = -6$ و $c = -7$ است و دو عددیکه حاصل جمع آنها -6 و حاصل ضرب آنها -7 شود عبارت از $+1$ و -7 می‌باشند.

$$m^2 - 6m - 7$$

$$m^2 + (-7 + 1)m + (1)(-7)$$

$$\underbrace{m^2 + m}_m - \underbrace{7m + (+1)(-7)}_{-7} = \underbrace{m(m + 1) - 7(m + 1)}_{(m+1)} \Rightarrow \boxed{(m + 1)(m - 7)}$$

مثال چهارم: سه جمله یی $m^2n^2 + 6mn + 8$ را تجزیه نمائید.

حل: میدانیم که $2 + 4 = 6$ و $2 \cdot 4 = 8$ است پس نوشته کرده می‌توانیم که:

$$m^2n^2 + 6mn + 8 = (mn + 4)(mn + 2)$$

مثال پنجم: می‌خواهیم سه جمله یی $c^2 - \frac{1}{6}c - \frac{1}{6}$ را تجزیه نمائیم:

حل: می‌دانیم که $\frac{1}{3} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}$ و $(\frac{1}{3})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}$ است در نتیجه نوشته کرده می‌توانیم که:

$$c^2 - \frac{1}{6}c - \frac{1}{6} = \left(c - \frac{1}{2}\right)\left(c + \frac{1}{3}\right)$$

(2) حل به طریقه ac : در این طریقه a را با c ضرب می‌نمائیم عددی به مانند p حاصل میشود. p را طوری به دو عدد تجزیه می‌نمائیم که حاصل ضرب این دو عدد p و حاصل جمع آنها b گردد.

مثال اول: می خواهیم که سه حده یی $2x^2 + 5x - 3$ را تجزیه نمائیم.

حل: به مشاهده میرسد که $a = 2$ ، $c = -3$ است بنا بر آن $ac = 2(-3) = -6$ و همچنان $b = 5$ می باشد، چون $(-1)(6) = -6$ ، $-1 + 6 = 5$ است لذا نوشته کرده میتوانیم که:

$$2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + (6 - 1)x - 3$$

$$2x^2 + 5x - 3 = \underbrace{2x^2 + 6x}_{2x} - x - 3$$

$$2x^2 + 5x - 3 = \underbrace{2x(x + 3) - (x + 3)}_{(x+3)}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = \boxed{(x + 3)(2x - 1)}$$

مثال دوم: سه جمله یی $12x^2 - 17x + 6$ را به فکتور ها تجزیه نمائید.

حل: چون $a = 12$ ، $b = -17$ ، $c = 6$ و $ac = 12 \cdot 6 = 72$ است. دو عددیکه حاصل جمع آنها (-17) و حاصل ضرب شان 72 باشد عبارت از (-8) و (-9) می باشند یعنی:

$$(-8) + (-9) = -17 \quad , \quad (-8)(-9) = 72$$

بناء سه حده فوق را طور ذیل می نویسیم:

$$12x^2 - 17x + 6 = 12x^2 + (-8 - 9)x + 6$$

$$\underbrace{12x^2 - 8x}_{4x} \underbrace{-9x + 6}_{-3}$$

$$\underbrace{4x(3x - 2) - 3(3x - 2)}_{(3x-2)} \Rightarrow \boxed{(3x - 2)(4x - 3)}$$

مثال سوم: می خواهیم سه حده یی $3x^2 + 5x + 2$ را به فکتور ها تجزیه نمائیم.

حل: چون $a = 3$ ، $b = 5$ ، $c = 2$ ، $ac = 6$ است پس دو عددی که حاصل جمع آن 5 و حاصل ضرب شان 6 باشد عبارت از اعداد 2 و 3 می باشد، ازین جا می توانیم بنویسیم که:

$$3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + (2 + 3)x + 2$$

$$3x^2 + 5x + 2 = \underbrace{3x^2 + 3x}_{3x} + \underbrace{2x + 2}_2$$

$$3x^2 + 5x + 2 = \underbrace{3x(x + 1) + 2(x + 1)}_{(x+1)}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = \boxed{(x + 1)(3x + 2)}$$

(3) حل به طریق چلیپا:

برای تجزیه افاده $ax^2 + bx + c$ به طریق چلیپا دیا گرام ذیل را در نظر میگیریم:

$$ax^2 + bx + c$$

$$(tx) \cdot (qx) = ax^2 \left[\begin{array}{c} tx \quad \cancel{mtx} \quad m \\ + \quad \cancel{nqx} \quad n \\ qx \quad \quad \quad \end{array} \right] m \cdot n = c$$

1) $6x^2 - 19ax + 15a^2$

$$\begin{array}{ccc} 2x & -10ax & -5a \\ & \times & \\ 3x & -9ax & -3a \end{array} \Rightarrow (2x - 3a)(3x - 5a)$$

$$(-10ax) + (-9ax) = -19ax$$

2) $2x^2 + 5ax - 3a^2$

$$\begin{array}{ccc} 2x & 6ax & 3a \\ & \times & \\ x & -ax & -a \end{array} \Rightarrow (2x - a)(x - 3a)$$

$$(6ax) + (-ax) = 5ax$$

3) $6x^2 - 19x + 10$

$$\begin{array}{ccc} 2x & -4x & -2 \\ & \times & \\ 3x & -15x & -5 \end{array} \Rightarrow (2x - 5)(3x - 2)$$

$$(-4x) + (-15x) = -19x$$

4) $10x^4 + 41x^2 + 40$

$$\begin{array}{ccc} 5x^2 & 25x^2 & 5 \\ & \times & \\ 2x^2 & 16x^2 & 8 \end{array} \Rightarrow (5x^2 + 8)(2x^2 + 5)$$

$$25x^2 + 16x^2 = 41x^2$$

$$5) \quad 3x^4 - 7x^2y^2 - 20y^4$$

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 & \begin{array}{c} -12x^2y^2 \\ +5x^2y^2 \end{array} & -4y^2 \\ x^2 & & +5y^2 \end{array} \Rightarrow (3x^2 + 5y^2)(x^2 - 4y^2) \Rightarrow \boxed{(3x^2 + 5y^2)(x - 2y)(x + 2y)}$$

$$(-12x^2y^2) + (5x^2y^2) = -7x^2y^2$$

4) حل به طریقه تکمیل مربع: در این طریقه مراحل ذیل را در نظر میگیریم:
مرحله اول: ضریب x^2 باید یک شود.

مرحله دوم: ضریب x را تقسیم (2) نموده بعداً آنرا مربع می نمائیم و حاصل مربع را با افاده یک بار جمع و یک بار از آن تفریق می نمائیم به همین ترتیب پیش میرویم تا که افاده شکل $(a^2 - b^2)$ را به خود اختیار نمائید.

مثال اول: می خواهیم سه حده یی $2x^2 + 3x + 1$ را تجزیه نمائیم.

حل: اولاً ضریب x^2 را توسط مشترک گرفتن 2 یک میسازیم یعنی:

$$2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

حالا ضریب x یعنی $\frac{3}{2}$ را تقسیم 2 می نمائیم آنرا مربع می نمائیم و حاصل مربع را با افاده داخل قوس یک بار جمع و یک بار تفریق می نمائیم.

$$\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

حالا حاصل مربع یعنی $\frac{9}{16}$ را با افاده داخل قوس یک بار جمع و یک بار تفریق می نمائیم داریم که:

$$2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right)$$

$$2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right)$$

$$2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

به ملاحظه میرسد که افاده داخل قوس شکل مشابه با مطابقت $a^2 - b^2$ را دارد لذا نظر به آن تحریر کرده می توانیم که:

$$2\left[\left(x + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\right] = 2\left[\left(x + \frac{2}{4}\right)\left(x + \frac{4}{4}\right)\right]$$

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1) = \boxed{(2x + 1)(x + 1)}$$

مثال دوم: سه حده یی $3x^2 + 8x + 5$ را تجزیه می نمائیم.

حل: اولاً ضریب x^2 را توسط مشترک گرفتن عدد 3 یک میسازیم یعنی:

$$3x^2 + 8x + 5 = 3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{5}{3}\right)$$

حالا ضریب x یعنی $\frac{8}{3}$ را تقسیم 2 می نمائیم آنرا مربع می نمائیم و حاصل مربع را با افاده

داخل قوس یک بار جمع و یک بار تفریق می نمائیم.

$$\frac{8}{3} \Rightarrow \frac{\frac{8}{3}}{2} \Rightarrow \frac{8}{6} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

حالا حاصل مربع یعنی $\frac{16}{9}$ را با افاده داخل قوس یک بار جمع و یک بار تفریق می نمائیم

داریم که:

$$3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{5}{3}\right) = 3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} + \frac{16}{9} - \frac{16}{9}\right)$$

$$3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} - \frac{16}{9} + \frac{5}{3}\right)$$

$$3\left[\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] = 3\left[\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

به ملاحظه میرسد که افاده داخل قوس شکل مشابه با مطابقت $a^2 - b^2$ را دارد لذا نظر به

آن تحریر کرده می توانیم که:

$$3\left[\left(x + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)\right] = 3\left[\left(x + \frac{3}{3}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right)\right]$$

$$3(x+1)\left(x + \frac{5}{3}\right) = \boxed{(3x+5)(x+1)}$$

مثال سوم: میخواهیم سه جمله یی $x^2 - 7x + 12$ را تجزیه نمائیم.

حل: ضریب x یعنی -7 را تقسیم 2 می نمائیم آنرا مربع می نمائیم و حاصل مربع را با

افاده یک بار جمع و یک بار تفریق می نمائیم.

$$-7 \Rightarrow \frac{-7}{2} \Rightarrow -\frac{7}{2} \Rightarrow \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

حالا حاصل مربع یعنی $\frac{49}{4}$ را با افاده یک بار جمع و یک بار تفریق می نمائیم داریم که:

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 7x + 12 + \frac{49}{4} - \frac{49}{4}$$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 12$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(x - \frac{7+1}{2}\right)\left(x - \frac{7-1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{(x-3)(x-4)}$$

(5) حل به طریقه فورمول محمد ابن موسی خوارزمی

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\
 a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] \\
 a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] \\
 a \left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \\
 a \left[\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \\
 \Rightarrow ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right]
 \end{aligned}$$

مثال اول: سه جمله یی $2x^2 + 3x + 1$ را می‌خواهیم توسط فورمول تجزیه نماییم.

حل: چون در افاده فوق $a = 2$ ، $b = 3$ و $c = 1$ میباشد لذا داریم که:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \\
 2x^2 + 3x + 1 &= 2 \left[\left(x + \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \right) \right] \\
 2 \left[\left(x + \frac{3 + \sqrt{9 - 8}}{4} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{9 - 8}}{4} \right) \right] &= 2 \left[\left(x + \frac{3 + 1}{4} \right) \left(x + \frac{3 - 1}{4} \right) \right] \\
 2 \left[(x + 1) \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] &\Rightarrow \boxed{(2x + 1)(x + 1)}
 \end{aligned}$$

مثال دوم: می‌خواهیم که سه حده یی $3x^2 + 8x + 5$ را توسط فورمول تجزیه نماییم.

حل: چون در افاده فوق $a = 3$ ، $b = 8$ و $c = 5$ میباشد لذا داریم که:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \\
 3x^2 + 8x + 5 &= 3 \left[\left(x + \frac{8 + \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} \right) \left(x + \frac{8 - \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} \right) \right] \\
 3 \left[\left(x + \frac{8 + \sqrt{64 - 60}}{6} \right) \left(x + \frac{8 - \sqrt{64 - 60}}{6} \right) \right] &= 3 \left[\left(x + \frac{8 + 2}{6} \right) \left(x + \frac{8 - 2}{6} \right) \right] \\
 3 \left[\left(x + \frac{5}{3} \right) (x + 1) \right] &\Rightarrow \boxed{(3x + 5)(x + 1)}
 \end{aligned}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال سوم: میخواهیم که سه جمله یی $x^2 - 7x + 12$ را توسط فورمول تجزیه نمائیم.

حل: چون در افاده فوق $a = 1$ ، $b = -7$ و $c = 12$ میباشد لذا داریم که:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right]$$

$$x^2 - 7x + 12 = \left[\left(x + \frac{-7 + \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \right) \left(x + \frac{-7 - \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \right) \right]$$

$$\left[\left(x + \frac{-7 + \sqrt{49 - 48}}{2} \right) \left(x + \frac{-7 - \sqrt{49 - 48}}{2} \right) \right] = \left[\left(x + \frac{-7 + 1}{2} \right) \left(x + \frac{-7 - 1}{2} \right) \right]$$

$$x^2 - 7x + 12 \Rightarrow \boxed{(x - 3)(x - 4)}$$

تجزیه نوع ششم: تجزیه به اساس جمع و تفریق حدود مناسب

در صورتیکه افاده های الجبری که با مطابقت ها مشابهت نداشته باشند و به اثر جمع و تفریق نمودن یک حد مناسب شکل مشابه با کدام مطابقت را بخود بگیرند و قابلیت تجزیه به فکتور ها را حاصل نمایند درین صورت حدود مناسب را با افاده های داده شده هم جمع و هم تفریق می نمائیم.

مثال اول: میخواهیم که افاده $x^4 + 4$ را تجزیه نمائیم.

حل: دیده می شود که افاده فوق شکل مشابه با کدام مطابقت را ندارد لذا اگر $4x^2$ را به آن جمع و هم تفریق نمائیم به آسانی تجزیه میگردد.

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 \Rightarrow x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

مثال دوم: افاده $a^4 + a^2b^2 + b^4$ را تجزیه نمائید.

حل: چون افاده فوق با کدام مطابقت مشابهت ندارد اگر حد a^2b^2 را به آن جمع و هم تفریق نمائیم در این صورت افاده فوق قابل تجزیه می گردد.

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^2b^2 - a^2b^2$$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - (ab)^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

مثال سوم: می خواهیم که افاده $36x^4 + 15x^2 + 4$ را تجزیه نمائیم.

حل: می توانیم $9x^2$ را با افاده فوق جمع و هم تفریق نمائیم.

$$36x^4 + 15x^2 + 4 = 36x^4 + 15x^2 + 4 + 9x^2 - 9x^2$$

$$= 36x^4 + 24x^2 + 4 - 9x^2$$

$$= (6x^2 + 2)^2 - (3x)^2 = (6x^2 + 2 + 3x)(6x^2 + 2 - 3x)$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال چهارم: می خواهیم که افاده $64x^4 + y^4$ را تجزیه نمائیم.

حل: می توانیم $16x^2y^2$ را با افاده فوق جمع و هم تفریق نمائیم.

$$\begin{aligned} 64x^4 + y^4 &= 64x^4 + y^4 + 8x^2y^2 - 8x^2y^2 \\ &= 64x^4 + 16x^2y^2 + y^4 - 16x^2y^2 \\ &= (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 = (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy) \end{aligned}$$

مثال پنجم: می خواهیم که افاده $25x^8 + x^4 + 1$ را تجزیه نمائیم.

حل: می توانیم $10x^4$ را با افاده جمع و هم تفریق نمائیم.

$$\begin{aligned} 25x^8 + x^4 + 1 &= 25x^8 + x^4 + 1 + 10x^4 - 10x^4 \\ &= 25x^8 + 10x^4 + 1 - 10x^4 + x^4 \\ &= (5x^4 + 1)^2 - (3x^2)^2 \\ &= (5x^4 + 1 - 3x^2)(5x^4 + 1 + 3x^2) \end{aligned}$$

تجزیه نوع هفتم: تجزیه به اساس گروپ بندی

هرگاه بین تمام حدود یک پولینوم الجبری نتوانیم کدام حد مشترک را دریابیم و امکان طوری مشاهده گردد که بین حدود پولینوم مذکور به شکل گروپ ها، حد مشترک دریافت شده بتواند، به شرطیکه در مرحله بعدی یک عامل مشترک در پولینوم مذکور موجود گردد، میتوان طوری ذیل آنرا تجزیه نمود، که این عمل تجزیه را به نام تجزیه گروپی نیز می نامند.

$$1) \quad \underbrace{Ax + Bx}_x + \underbrace{Ay + By}_y = \underbrace{x(A + B) + y(A + B)}_{(A+B)} = \boxed{(A + B)(x + y)}$$

$$2) \quad x^2 - 4y^2 + x + 2y = ?$$

$$\underbrace{(x - 2y)(x + 2y) + (x + 2y)}_{(x+2y)} = \boxed{(x + 2y)(x - 2y + 1)}$$

$$3) \quad \underbrace{2x^2 + 2xy}_{2x} + \underbrace{3x + 3y}_3 = \underbrace{2x(x + y) + 3(x + y)}_{(x+y)} = \boxed{(x + y)(2x + 3)}$$

$$4) \quad 1 + 2ab - (a^2 + b^2) = 1 + 2ab - a^2 - b^2$$

$$= 1 - a^2 + 2ab - b^2 = 1 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 1 - (a - b)^2 = \boxed{(1 - a + b)(1 + a - b)}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$5) \quad \underbrace{ac + bc}_c + \underbrace{ad + bd}_d = \underbrace{c(a + b) + d(a + b)}_{(a+b)} = \boxed{(a + b)(c + d)}$$

$$6) \quad \underbrace{mab + my}_m + \underbrace{ny + nab}_n = \underbrace{m(ab + y) + n(y + ab)}_{(ab+y)} = \boxed{(ab + y)(m + n)}$$

$$7) \quad \begin{aligned} & ab(b + a + c) + ac(a + b + c) + bc(c + b + a) \\ & \underbrace{ab(a + b + c) + ac(a + b + c) + bc(a + b + c)}_{(a+b+c)} \\ & = \boxed{(a + b + c)(ab + ac + bc)} \end{aligned}$$

$$8) \quad \underbrace{2ax - 4bx}_x + \underbrace{ay - 2by}_y = \underbrace{2x(a - 2b) + y(a - 2b)}_{(a-2b)} \\ \Rightarrow \boxed{(a - 2b)(2x + y)}$$

$$9) \quad \underbrace{x^3 + ax^2}_{x^2} + \underbrace{bx^2 + abx}_{bx} + \underbrace{cx^2 + acx}_{cx} + \underbrace{bcx + abc}_{bc} \\ \underbrace{x^2(x + a) + bx(x + a) + cx(x + a) + bc(x + a)}_{(x+a)} \\ (x + a) \left(\underbrace{x^2 + bx}_x + \underbrace{cx + bc}_c \right) \\ (x + a) \left[\underbrace{x(x + b) + c(x + b)}_{(x+b)} \right] \Rightarrow \boxed{(x + a)(x + b)(x + c)}$$

$$10) \quad \begin{aligned} & a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 3abc \\ & = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + abc + abc + abc \\ & = \underbrace{a^2(b + c) + abc}_a + \underbrace{b^2(c + a) + abc}_b + \underbrace{c^2(a + b) + abc}_c \\ & = a[a(b + c) + bc] + b[b(c + a) + ac] + c[c(a + b) + ab] \\ & = \underbrace{a[ab + ac + bc] + b[bc + ab + ac] + c[ac + bc + ab]}_{(ab+bc+ac)} \\ & \Rightarrow \boxed{(ab + bc + ac)(a + b + c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & -b^2a + b^2c - a^2c + a^2b + c^2a - c^2b \\
 & = \underbrace{c^2a - c^2b}_{c^2} + \underbrace{b^2c - a^2c}_c + \underbrace{a^2b - b^2a}_{ab} \\
 & = c^2(a - b) + c(b^2 - a^2) + ab(a - b) \\
 & = c^2(a - b) - c(a^2 - b^2) + ab(a - b) \\
 & = \underbrace{c^2(a - b) - c(a - b)(a + b) + ab(a - b)}_{(a-b)} \\
 & = (a - b)[c^2 - c(a + b) + ab] = (a - b) \left[\underbrace{c^2 - ac}_c - \underbrace{bc + ab}_b \right] \\
 & = (a - b) \left[\underbrace{c(c - a) - b(c - a)}_{(c-a)} \right] \Rightarrow \boxed{(a - b)(c - a)(c - b)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) \quad & \underbrace{6x^2 - 4ax}_{2x} - \underbrace{9bx + 6ab}_{-3b} = \underbrace{2x(3x - 2a) - 3b(3x - 2a)}_{(3x-2a)} \\
 & \Rightarrow \boxed{(3x - 2a)(2x - 3b)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad & \underbrace{x^3 + x^3y}_{x^3} + \underbrace{xy^2 + y^3x}_{xy^2} = \underbrace{x^3(1 + y) + xy^2(1 + y)}_{(1+y)} \\
 & \Rightarrow \boxed{(1 + y)(x^3 + xy^2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \quad & \underbrace{x^3y^3 - y^3}_{y^3} + \underbrace{8x^3 - 8}_8 = \underbrace{y^3(x^3 - 1) + 8(x^3 - 1)}_{(x^3-1)} \\
 & = (x^3 - 1)(y^3 + 8) \\
 & \Rightarrow \boxed{(x - 1)(x^2 + x + 1)(y + 2)(y^2 - 2y + 4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \quad & x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc \\
 &= x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + bcx + acx - abc \\
 &= \underbrace{x^3 - ax^2}_{x^2} \underbrace{-bx^2 + abx}_{-bx} \underbrace{-cx^2 + acx}_{-cx} + \underbrace{bcx - abc}_{bc} \\
 &= \underbrace{x^2(x - a) - bx(x - a) - cx(x - a) + bc(x - a)}_{(x-a)} \\
 &= (x - a)(x^2 - bx - cx + bc) \\
 &= (x - a) \left(\underbrace{x^2 - cx}_x \underbrace{-bx + bc}_{-b} \right) \\
 &= (x - a) \left[\underbrace{x(x - c) - b(x - c)}_{(x-c)} \right] \\
 &= (x - a)(x - c)(x - b) \Rightarrow \boxed{(x - a)(x - b)(x - c)}
 \end{aligned}$$

تجزیه نوع هشتم: تجزیه به اساس مطابقت $a^{3n} + b^{3n} + c^{3n} - 3(abc)^n$

$$a^{3n} + b^{3n} + c^{3n} - 3(abc)^n = (a^n + b^n + c^n)(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} - a^n b^n - a^n c^n - b^n c^n)$$

مثال اول: افاده $x^3 + 8y^3 + z^3 - 6xyz$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{aligned}
 x^3 + 8y^3 + z^3 - 6xyz &= x^3 + (2y)^3 + z^3 - 3 \cdot x(2y)(z) \\
 &= (x + 2y + z)(x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xy - xz - 2yz)
 \end{aligned}$$

مثال دوم: افاده $27a^3 - b^3 + 125c^3 + 45abc$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{aligned}
 27a^3 - b^3 + 125c^3 + 45abc &= (3a)^3 + (-b)^3 + (5c)^3 - 3(3a)(-b)(5c) \\
 &= (3a - b + 5c)(9a^2 + b^2 + 25c^2 + 3ab - 15ac + 5bc)
 \end{aligned}$$

مثال سوم: افاده $a^6 - 125b^6 - c^6 - 15a^2b^2c^2$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{aligned}
 a^6 - 125b^6 - c^6 - 15a^2b^2c^2 &= (a^2)^3 + (-5b^2)^3 + (-c^2)^3 - 3(a^2)(-5b^2)(-c^2) \\
 &= (a^2 - 5b^2 - c^2)(a^4 + 25b^4 + c^4 + 5a^2b^2 + a^2c^2 - 5b^2c^2)
 \end{aligned}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

تجزیه نوع نهم: تجزیه به اساس شرط $a + b + c = 0$

اگر $a + b + c = 0$ باشد در آنصورت $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ است.

ثبوت:

$$a + b + c = 0$$

$$a + b = -c$$

$$(a + b)^3 = (-c)^3$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(-c) \Rightarrow \boxed{a^3 + b^3 + c^3 = 3abc}$$

مثال اول: افاده $(2x - y)^3 + (3 - 2x)^3 + (y - 3)^3$ را تجزیه نمائید.

$$\left(\underbrace{2x - y}_a\right)^3 + \left(\underbrace{3 - 2x}_b\right)^3 + \left(\underbrace{y - 3}_c\right)^3$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2x - y \\ b = 3 - 2x \\ c = y - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$(2x - y)^3 + (3 - 2x)^3 + (y - 3)^3 = 3(2x - y)(3 - 2x)(y - 3)$$

مثال دوم: افاده $(x + y + z)^3 + (5 - x - 2y)^3 + (y - 5)^3$ را تجزیه نمائید.

$$(x + y + z)^3 + (5 - x - 2y)^3 + (y - 5)^3$$

$$\left. \begin{array}{l} a = x + y + z \\ b = 5 - x - 2y \\ c = y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$(x + y + z)^3 + (5 - x - 2y)^3 + (y - 5)^3 = 3(x + y + z)(5 - x - 2y)(y - 5)$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

تجزیه نوع دهم: تجزیه به اساس فکتور ضربی

این تجزیه به اساس قضیه باقیمانده استوار است.

مثال اول: افاده $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ را تجزیه نمائید.

حل: عددی را دریافت می نمائیم که اگر در افاده وضع شود افاده را صفر نمائید که این عدد از مضرب های عدد ثابت افاده بدست می آید.

$$-6 = (-1)(6) = (1)(-6)$$

$$-6 = (-2)(3) = (2)(-3)$$

در مضرب های عدد (-6) عددیکه افاده را صفر می نمائید اعداد 1، 2 و 3 است.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & +11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

مثال دوم: افاده $6x^4 + 17x^3 + 15x^2 + 4x$ را تجزیه نمائید.

حل: ابتدا x را مشترک می گیریم داریم که:

$$6x^4 + 17x^3 + 15x^2 + 4x = x(6x^3 + 17x^2 + 15x + 4)$$

حالا عددی را دریافت می نمائیم که اگر در افاده $6x^3 + 17x^2 + 15x + 4$ وضع شود افاده را صفر نمائید که این عدد از مضرب های عدد ثابت افاده بدست می آید.

میدانیم که افاده $6x^3 + 17x^2 + 15x + 4$ را عدد -1 صفر می نمائید.

$$6x^3 + 17x^2 + 15x + 4$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 17 & 15 & 4 \\ & & -6 & -11 & -4 \\ \hline & 6 & 11 & 4 & 0 \end{array}$$

$$(6x^2 + 11x + 4)(x + 1)$$

$$(3x + 4)(2x + 1)(x + 1)$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال سوم: افاده $x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x - 20$ را تجزیه نمائید.

قیمت صفری افاده مذکور عدد 2 میباشد.

$$x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x - 20$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 6 & 1 & -24 & -20 & \\ & 2 & 16 & 34 & 20 & \\ \hline 1 & 8 & 17 & 10 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x - 20 = (x - 2)(x^3 + 8x^2 + 17x + 10)$$

حال قیمت صفری افاده $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$ را دریافت می نمائیم.

میدانیم که افاده مذکور عدد -1 صفر می نمائید.

$$x^3 + 8x^2 + 17x + 10$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 8 & 17 & 10 & \\ & -1 & -7 & -10 & \\ \hline 1 & 7 & 10 & 0 & \end{array}$$

$$(x + 1)(x^2 + 7x + 10) = (x + 1)(x + 2)(x + 5)$$

در نتیجه داریم که:

$$x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x - 20 = \boxed{(x - 2)(x + 1)(x + 2)(x + 5)}$$

تجزیه نوع دوازدهم: تجزیه به اساس جذر مربع

هرگاه قیمت عددی یک افاده جذر مربع کامل داشته باشد آن افاده طور ذیل تجزیه میشود:

مثال اول: افاده $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ را تجزیه می نمائیم.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ x^2 \overline{) x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1} \\ \underline{+x^4} \\ 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ \underline{\pm 4x^3 \pm 4x^2} \\ 2x^2 + 4x + 1 \\ \underline{\pm 2x^2 \pm 4x \pm 1} \\ 0 \end{array}$$

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 2x + 1)^2 = ((x + 1)^2)^2 = \boxed{(x + 1)^4}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال دوم: افاده $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x + 1 \\
 \hline
 x^2 \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{\pm x^4} \\
 2x^3 + 3x^2 \\
 \underline{\pm 2x^3 \pm 2x^2} \\
 2x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{\pm 2x^2 \pm 2x \pm 1} \\
 0
 \end{array}$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = \boxed{(x^2 + x + 1)^2}$$

تجزیه افاده های معکوسه (Reciprocal):

افاده های معکوسه به آن افاده های گفته میشود که ضرایب دو طرف حد متوسط متناظر یکدیگر باشد.

مثال اول: میخواهیم که افاده $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ را تجزیه نمائیم.

$$\overbrace{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}^{\text{حد وسطی}}$$

حل:

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = x^2 \left(x^2 + 4x + 6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 6 \right) \quad x + \frac{1}{x} = u, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$$

$$x^2(u^2 - 2 + 4u + 6) = x^2(u^2 + 4u + 4) = x^2(u + 2)^2 = x^2(u + 2)(u + 2)$$

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = \boxed{x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 2 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 2 \right)}$$

مثال دوم: افاده $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2$ را تجزیه نمائید.

$$2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = x^2 \left(2x^2 - 3x - 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$$

$$x^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^2} - 3x - \frac{3}{x} - 1 \right) = x^2 \left[2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right]$$

$$x^2(2(u^2 - 2) - 3u - 1) = x^2(2u^2 - 3u - 5) = x^2(u + 1)(2u - 5)$$

$$2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = \boxed{x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(2x + \frac{2}{x} + 5 \right)}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال سوم: افاده $x^4 - 6x^2 + 10 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ را تجزیه نمایید.

حل:

$$x^4 - 6x^2 + 10 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} - 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10 \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = u$$

$$u^2 - 2 - 6u + 10 = u^2 - 6u + 8 \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = u^2 - 2$$

$$= (u - 2)(u - 4)$$

$$x^4 - 6x^2 + 10 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\right)$$

مسائل عمومی تجزیه الجبری

(1) تجزیه شده افاده $y^2 - 3x^2$ عبارت است از:

حل:

$$y^2 - 3x^2 = y^2 - (\sqrt{3}x)^2 = (y - \sqrt{3}x)(y + \sqrt{3}x)$$

(2) افاده $x^{16} - 1$ بصورت تجزیه شده عبارت است از:

حل:

$$\begin{aligned} x^{16} - 1 &= (x^8)^2 - 1 = (x^8 - 1)(x^8 + 1) \\ &= ((x^4)^2 - 1)(x^8 + 1) = (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) \\ &= ((x^2)^2 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) \\ &= \boxed{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)} \end{aligned}$$

(3) تجزیه افاده $a^4 + a^2b^2 + b^4$ عبارت است از:

حل:

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = \boxed{(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)} \end{aligned}$$

(4) افاده الجبری $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$ را تجزیه نمایید.

حل:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 - x^2 \\ = (a + b)^2 - x^2 \Rightarrow \boxed{(a + b + x)(a + b - x)} \end{aligned}$$

(5) افاده الجبری $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = ?$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} & (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz - x^3 - y^3 - z^3 \\ &= 3(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz) \\ &= 3[z(x^2 + 2xy + y^2) + xy(x + y) + z^2(x + y)] \\ &= 3[z(x + y)^2 + xy(x + y) + z^2(x + y)] \\ &= 3[(x + y)(zx + 2y + xy + z^2)] \\ &= 3[(x + y)(z(x + z) + y(x + z))] \\ &\Rightarrow \boxed{3(x + y)(x + z)(y + z)} \end{aligned}$$

(6) افاده الجبری $y^4 + x^2y^2 + x^2z^2 - z^4$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} & y^4 + x^2y^2 + x^2z^2 - z^4 \\ &= y^4 - z^4 + x^2(y^2 + z^2) \\ &= (y^2 - z^2)(y^2 + z^2) + x^2(y^2 + z^2) \\ &\Rightarrow \boxed{(y^2 + z^2)[y^2 - z^2 + x^2]} \end{aligned}$$

(7) افاده الجبری $(a + b)^2 + (a - b)^2 - 2(a^2 - b^2) - (x - y)^2$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} & (a + b)^2 + (a - b)^2 - 2(a^2 - b^2) - (x - y)^2 \\ &= (a + b - a + b)^2 - (x - y)^2 \\ &= (2b)^2 - (x - y)^2 \Rightarrow \boxed{(2b + x - y)(2b - x + y)} \end{aligned}$$

(8) افاده $\frac{ax - ay - bx + by}{ax - ay}$ را ساده سازید.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{ax - ay - bx + by}{ax - ay} &= \frac{a(x - y) - b(x - y)}{a(x - y)} \\ &= \frac{(x - y)(a - b)}{a(x - y)} = \frac{a - b}{a} \Rightarrow \boxed{a^{-1}(a - b)} \end{aligned}$$

(9) افاده الجبری $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - a^4 - 2$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - a^4 - 2 \\ &= \frac{a^2}{b^2} - 2 + \frac{b^2}{a^2} - a^4 \\ &= \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 - (a^2)^2 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} - a^2\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} + a^2\right)} \end{aligned}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

(10) افاده الجبری $b^2 - a^2 - c^2 - 2ac$ را تجزیه نمائید.
حل:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 - c^2 - 2ac \\ &= b^2 - (a^2 + 2ac + c^2) \\ &= b^2 - (a + c)^2 \Rightarrow \boxed{(b - a - c)(b + a + c)} \end{aligned}$$

(11) افاده الجبری $x^{2n} - y^{2n}$ را تجزیه نمائید.
حل:

$$\begin{aligned} x^{2n} - y^{2n} \\ (x^n)^2 - (y^n)^2 \Rightarrow \boxed{(x^n - y^n)(x^n + y^n)} \end{aligned}$$

(12) افاده الجبری $x^4 - 13x^2 + 36$ را تجزیه نمائید.
حل:

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 \\ &= (x^2 - 4)(x^2 - 9) \Rightarrow \boxed{(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)} \end{aligned}$$

(13) افاده الجبری $x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz$ را تجزیه نمائید.
حل:

$$\begin{aligned} x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz \\ \Rightarrow (x + 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 2xz - 6yz) \end{aligned}$$

(14) افاده الجبری $8x^3 + 4x^2y + 2xy^2 + y^3$ را تجزیه نمائید.
حل:

$$\begin{aligned} 8x^3 + 4x^2y + 2xy^2 + y^3 &= 4x^2(2x + y) + y^2(2x + y) \\ &\Rightarrow \boxed{(2x + y)(4x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

(15) افاده الجبری $4x^2 - 6x + 3y - y^2$ را تجزیه نمائید.
حل:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 6x + 3y - y^2 &= 4x^2 - y^2 - 6x + 3y \\ &= (2x - y)(2x + y) - 3(2x - y) \\ &\Rightarrow \boxed{(2x - y)(2x + y - 3)} \end{aligned}$$

(16) افاده الجبری $x^5 + x + 2$ را تجزیه نمائید.
حل:

$$\begin{aligned} x^5 + x + 2 &= x^5 + x + 1 + 1 \\ x^5 + 1 + x + 1 &= (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \\ &\Rightarrow \boxed{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 2)} \end{aligned}$$

(17) افاده الجبری $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 4) - 6$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 4) - 6 \quad x^2 + 2x = u$$

$$(u + 3)(u + 4) - 6$$

$$u^2 + 7u + 12 - 6 = u^2 + 7u + 6$$

$$(u + 1)(u + 6) \Rightarrow \boxed{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 6)}$$

(18) افاده $a^3 - 5a^2 - a + 5$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} a^3 - 5a^2 - a + 5 &= a^3 - a - 5a^2 + 5 \\ &= a(a^2 - 1) - 5(a^2 - 1) \end{aligned}$$

$$= (a^2 - 1)(a - 5)$$

$$\Rightarrow \boxed{(a - 1)(a + 1)(a - 5)}$$

(19) افاده $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6 &= a^6 - b^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 \\ &= (a^2)^3 - (b^2)^3 + a^4 + a^2b^2 + b^4 \\ &= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) + (a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ &\Rightarrow \boxed{(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^2 - b^2 - 1)} \end{aligned}$$

(20) افاده $4x^2z^2 - (y^2 + z^2 - x^2)^2$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} 4x^2z^2 - (y^2 + z^2 - x^2)^2 &= (2xz)^2 - (y^2 + z^2 - x^2)^2 \\ &\Rightarrow \boxed{(2xz - y^2 - z^2 + x^2)(2xz + y^2 + z^2 - x^2)} \end{aligned}$$

(21) افاده $100x^4 - 21x^2y^2 + y^4$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{array}{ccc} 100x^4 & - & 21x^2y^2 + y^4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 10x^2 & \rightarrow 2 \leftarrow & y^2 \\ & 20x^2y^2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 100x^4 - 21x^2y^2 + y^4 = 100x^4 - 21x^2y^2 + y^4 + 20x^2y^2 - 20x^2y^2 \\ &= 100x^4 - 20x^2y^2 + y^4 + 20x^2y^2 - 21x^2y^2 \\ &= (10x^2 + y^2)^2 - x^2x^2 \\ &\Rightarrow \boxed{(10x^2 + y^2 - xy)(10x^2 + y^2 + xy)} \end{aligned}$$

(22) افاده $b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} & \underbrace{b^5 + b^4 + b^3}_{b^3} + b^2 + b + 1 \\ &= b^3(b^2 + b + 1) + (b^2 + b + 1) \\ &= (b^2 + b + 1)(b^3 + 1) \\ &\Rightarrow \boxed{(b^2 + b + 1)(b + 1)(b^2 - b + 1)} \end{aligned}$$

(23) افاده $a^3(a^2 - 7)^2 - 36a$ را تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} & a^3(a^2 - 7)^2 - 36a \\ &= a[a^2(a^2 - 7)^2 - 36] \\ &= a\{[a(a^2 - 7)]^2 - 6^2\} \\ &= a\{[a^3 - 7a]^2 - 6^2\} \\ &\Rightarrow \boxed{a(a^3 - 7a - 6)(a^3 - 7a + 6)} \end{aligned}$$

موارد استعمال تجزیه الجبری

تجزیه الجبری در تمام ساحات ریاضیات کاربرد زیادی دارد بخصوص برای دریافت بزرگترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک و در لیست شکل $\frac{0}{0}$ نیز بیشتر استفاده میشود.

بزرگترین قاسم مشترک افاده های الجبری (H.C.F)

بزرگترین قاسم مشترک دو و یا چند افاده الجبری عبارت از بزرگترین افاده است که تمام افاده های داده شده بالای آن پوره تقسیمگردد.

برای پیدا کردن بزرگترین قاسم مشترک افاده های الجبری مراحل ذیل را در نظر میگیریم:

- (1) اولاً افاده های داده شده را به اجزای ضربی آنها تجزیه می نمائیم.
- (2) از جمله همان اجزای ضربی را که در تمام افاده ها مشترک بوده و نظر به دیگران دارای طاقت های کوچکتر باشند در نظر میگیریم.
- (3) آنها را با هم ضرب می نمائیم که این حاصل ضرب عبارت از بزرگترین قاسم مشترک افاده های داده شده میباشد.

مثال اول: می خواهیم بزرگترین قاسم مشترک افاده های a^3b^3 ، a^2b^4c و $a^4b^3c^2$ را به دست آریم.

حل: چون در تمام افاده ها a یک عامل ضربی مشترک است که کوچکترین توان آن 2 میباشد به همین ترتیب b نیز در تمام افاده ها مشترک است که کوچکترین توان آن 3 است، چون c در تمام افاده ها مشترک نیست لذا از آن صرف نظر می نمائیم. در نتیجه a^2b^3 عبارت از بزرگترین قاسم مشترک افاده های مذکور می باشد.

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

مثال دوم: بزرگترین قاسم مشترک افاده های $28a^3x$ ، $35a^2x^4$ ، $49a^4x^3$ را به دست آرید.
حل: اولاً افاده های داده شده را تجزیه می نماییم.

$$\left. \begin{array}{l} 49a^4x^3 \\ 35a^2x^4 \\ 28a^3x \end{array} \right\} \Rightarrow 7a^2x = H.C.F$$

مثال سوم: می خواهیم که بزرگترین قاسم مشترک افاده های $2ax^2 -$ ، $ax^2 + 2a^2x + a^3$ و $4a^2x - 6a^3$ را به دست آریم.
حل: افاده های داده شده را تجزیه می نماییم.

$$\begin{aligned} ax^2 + 2a^2x + a^3 &= a(x^2 + 2ax + a^2) = a(x + a)^2 \\ 2ax^2 - 4a^2x - 6a^3 &= 2a(x^2 - 2ax - 3a^2) = 2a(x + a)(x - 3a) \\ 4a^2x - 6a^3 &= 2a^2(x - 3a) \end{aligned}$$

به ملاحظه می رسد که در تمام افاده ها قوس $(x + a)$ مشترک و دارای توان کوچکتر می باشد.
در نتیجه $a(x + a)$ عبارت از بزرگترین قاسم مشترک افاده های مذکور میباشد.

مثال چهارم: $H.C.F$ افاده های الجبری $y^2 - 3y + 2$ و $y^2 - 4y + 4$ ، $y^2 - y - 2$ دریابید.
حل: افاده های داده شده را تجزیه می نماییم.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1) \\ y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2 \\ y^2 - 3y + 2 = (y - 2)(y - 1) \end{array} \right\} H.C.F \Rightarrow (y - 2)$$

مثال پنجم: بزرگترین قاسم مشترک افاده های الجبری $x^2 + 6xy + 9y^2$ و $x^2 - 9y^2$ دریابید.
حل: اولاً افاده های داده شده را تجزیه می نماییم.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 9y^2 = (x - 3y)(x + 3y) \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2 \end{array} \right\} H.C.F \Rightarrow (x + 3y)$$

کوچکترین مضرب مشترک افاده های الجبری (L.C.M)

کوچکترین مضرب مشترک دو و یا چند افاده الجبری عبارت از کوچکترین افاده است که بالای تمام افاده های داده شده پوره قابل تقسیم باشد.

برای دریافت کوچکترین مضرب مشترک افاده های الجبری مراحل ذیل را در نظر میگیریم:

- 1) اولاً افاده های داده شده را تجزیه می نماییم.
- 2) بعداً از جمله اجزای ضربی مشترک افاده ها، همان را انتخاب می نمایم که دارای توان بلند تر باشند.
- 3) آنها را بین هم و با عوامل ضربی غیر مشترک تمام افاده ها ضرب می نمایم که در نتیجه کوچکترین مضرب مشترک افاده های داده شده به دست می آید.

مثال اول: کوچکترین مضرب مشترک افاده های ذیل را به دست آرید.

$$48a^2b, 72ab^3x, 120a^3x^2y$$

حل: اولاً افاده های فوق را تجزیه می نمائیم.

$$48a^2b = 2^4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b$$

$$72ab^3x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot a \cdot b^3 \cdot x$$

$$120a^3x^2y = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot x^2 \cdot y$$

در نتیجه کوچکترین مضرب مشترک افاده های فوق عبارت است از:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot a^3 \cdot 5 \cdot b^3 \cdot x^2 \cdot y = 720a^3b^3x^2y$$

مثال دوم: $L.C.M$ افاده های $(x^2 + 2x)^2$ ، $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$ و $2x^3 - 3x^2 - 14x$ را به دست آرید.

حل: اولاً افاده های فوق را تجزیه می نمائیم.

$$(x^2 + 2x)^2 = [x(x + 2)]^2 = x^2(x + 2)^2$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(2x - 1)(x + 2)$$

$$2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(2x - 7)(x + 2)$$

در نتیجه $L.C.M$ افاده های فوق عبارت از $x^2(x + 2)^2(2x - 1)(2x - 7)$ است.

مثال سوم: افاده های ذیل را در نظر بگیرید و ذواضعاف اقل آنها را به دست آرید.

$$2x^2 + 9x + 4, x^2 + x - 12, 2x^2 - 5x - 3$$

حل: اولاً افاده های داده شده را تجزیه می نمائیم:

$$2x^2 + 9x + 4 = (2x + 1)(x + 4)$$

$$x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$$

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$$

به ملاحظه میرسد که ذواضعاف اقل افاده های فوق عبارت از $(2x + 1)(x + 4)(x - 3)$ می باشد.

مثال چهارم: کوچکترین مضرب مشترک افاده های $4x^2$ ، $2x + 2$ و $x - 1$ را به دست بیاورید.

حل: ابتدا افاده ها را به طور جداگانه تجزیه می نمائیم.

$$4x^2 = 2^2x^2$$

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

دیده میشود عامل مشترکی که بزرگترین توان را دارد $(x + 1)$ و 2^2 است که حاصل ضرب آنها با عوامل غیر مشترک مساوی به $4x^2(x^2 - 1)(x - 1)(x + 1)$ بوده که به نام کوچکترین مضرب مشترک یا $L.C.M$ افاده های مذکور یاد می شود.

مثال پنجم: کوچکترین مضرب مشترک افاده های $4x^2 + 6x^2 - 6$ ، $8x^2 + 40x + 32$ و $12x - 16$ را بدست آرید.

$$8x^2 + 40x + 32 = 8(x^2 + 5x + 4) = 2^3(x + 4)(x + 1)$$

$$6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x - 1)(x + 1)$$

$$4x^2 + 12x - 16 = 4(x^2 + 3x - 4) = 2^2(x + 1)(x - 1)$$

در نتیجه کوچکترین مضرب مشترک افاده های مذکور عبارت است از:

$$2^3 \cdot 3(x + 1)(x + 4)(x - 1)$$

کسور الجبری

کسور الجبری از نسبت افاده های الجبری به وجود می آیند. عموماً یک کسر را به شکل $\frac{P}{Q}$ طوریکه $Q \neq 0$ باشد نمایش میدهند که P را صورت و Q را مخرج کسر می نامند.

کسر ناطق

کسریکه از نسبت دو پولینوم تشکیل شده باشد بنام کسر ناطق یاد می شود. مثلاً کسر ذیل نمونه هایی از کسور ناطق می باشند.

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{5x-3}{2x^2+4x-10} & 2) \frac{9m^2-4n^2}{3m-2n} & 5) \frac{y^3+27}{y-3} & 7) \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+2} \\ 2) \frac{x^3+2y^3}{x^4-3xy-2y^2} & 4) \frac{3x-4}{x^2-6x+8} & 6) \frac{m+n}{m-n} & 8) \frac{2x^2+5x+3}{x^2-1} \end{array}$$

کسر غیر ناطق

هرگاه صورت یا مخرج یک کسر و یا هر دوی آنها تحت جذر قرار داشته باشد بنام کسر غیر ناطق یاد میشود. (اگر یک حد در صورت یا مخرج نیز تحت جذر قرار داشته باشد بنام کسر غیر ناطق یاد میشود).

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} & 2) \frac{m-3}{\sqrt{2m+5}} & 3) \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x-y}} & 4) \frac{\sqrt{a-b}}{3ab} \end{array}$$

کسر واقعی

هرگاه درجه صورت یک کسر نسبت به مخرج کوچکتر باشد آنرا بنام کسر واقعی یاد می کنند.

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{a^2+1}{a^3+6a^2+12a+8} & 2) \frac{5}{x+3} & 3) \frac{3y}{y^2+1} \end{array}$$

کسر غیر واقعی

هرگاه درجه صورت یک کسر نسبت به مخرج بزرگتر یا مساوی باشد آنرا بنام کسر غیر واقعی یاد می کنند.

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{a^3+6a^2+12a+8}{a^2+1} & 2) \frac{x+3}{5} & 3) \frac{y^2+1}{3y} \end{array}$$

خواص کسور الجبری

1) هرگاه صورت و مخرج یک کسر را به یک عدد یا افاده خلاف صفر ضرب و یا تقسیم نمائیم در قیمت کسر کدام تغییر وارد نه میشود.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}, \quad k \neq 0} \quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}, \quad k \neq 0}$$

مثال: اگر صورت و مخرج کسر $\frac{x+2}{x-3}$ را با $(x-1)$ طوریکه $x \neq 1$ باشد ضرب نمائیم کسر جدید که به دست می آید معادل به کسر اولی است.

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$$

در نتیجه کسر $\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ با کسر $\frac{x+2}{x-3}$ معادل است.

مثال: اگر صورت و مخرج کسر $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ را بالای $(x+1)$ طوریکه $x \neq -1$ باشد تقسیم نمائیم کسر جدید که به دست می آید معادل به کسر اولی است.

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \frac{\frac{x^2+3x+2}{x+1}}{\frac{x^2+4x+3}{x+1}} = \frac{\frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)}}{\frac{(x+3)(x+1)}{(x+1)}} = \frac{x+2}{x+3}$$

در نتیجه کسر $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ با کسر $\frac{x+2}{x+3}$ معادل است.

2) یک کسر به صورت عموم دارای 3 علامه می باشد.

a. علامه صورت b. علامه مخرج c. علامه کلی کسر

اگر در یک کسر دو علامه آن تبدیل شود در قیمت کسر کدام تغییر وارد نه میشود.

$$1) \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad 2) \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad 3) -\left(\frac{-a}{-b}\right) = -\frac{a}{b}$$

3) یک کسر وقتی مساوی به صفر میشود که صورت آن مساوی به صفر بوده و مخرج آن خلاف صفر باشد (در صورت صفر بودن مخرج، کسر معنی ندارد)

$$1) \frac{0}{7} = 0 \quad 2) \frac{0}{-3} = 0 \quad 3) \frac{0}{0} \neq 0$$

اختصار کسور الجبری

عملیه تقسیم کسر به وسیله عامل مشترک آنها عبارت از اختصار کسور نامیده میشود که برای اختصار نموده کسور الجبری صورت و مخرج را با استفاده از تجزیه پولینوم ها به دو قوس تجزیه نموده عامل مشترک صورت و مخرج را اختصار می نمائیم.

$$1) \frac{4a+20}{a+5} = \frac{4(a+5)}{a+5} = \boxed{4}$$

$$2) \frac{a^2-9}{a-3} = \frac{(a-3)(a+3)}{a-3} = \boxed{a+3}$$

$$3) \frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+4)(x+3)} = \boxed{\frac{x+2}{x+4}}$$

$$4) \frac{a^3-b^3}{a-b} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b} = \boxed{a^2+ab+b^2}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{m^2-10m+16}{m-4} &= \frac{(m-4)(m-8)}{m-4} = \boxed{m-8} \\
 6) \quad \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} &= \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)} = \boxed{\frac{a-b}{a+b}} \\
 7) \quad \frac{5x^3+40}{(x^2-4)(x^2-2x+4)} &= \frac{5(x^3+8)}{(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{5(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)} = \boxed{\frac{5}{(x-2)}} \\
 8) \quad \frac{24x^3y^2}{18xy^3} &= \boxed{\frac{4x^2}{3y}} \\
 9) \quad \frac{4x^2-16}{x^2-2x} &= \frac{4(x^2-4)}{x(x-2)} = \frac{4(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \boxed{\frac{4(x+2)}{x}} \\
 10) \quad \frac{m^3n+3m^2n+9mn}{m^3-27} &= \frac{mn(m^2+3m+9)}{m^3-3^3} = \frac{mn(m^2+3m+9)}{(m-3)(m^2+3m+9)} = \boxed{\frac{mn}{m-3}} \\
 11) \quad \frac{ax^4-a^2x^3-6a^3x^2}{9a^4x-a^2x^3} &= \frac{ax^2(x^2-ax-6a^2)}{(a^2x)(9a^2-x^2)} = \frac{ax^2(x-3a)(x+2a)}{a^2x(3a-x)(3a+x)} = \frac{x(x-3a)(x+2a)}{-a(x-3a)(3a+x)} \\
 &= \frac{x(x+2a)}{-a(3a+x)} = \boxed{-\frac{x(x+2a)}{a(3a+x)}}
 \end{aligned}$$

عملیات اساسی بالای کسور الجبری

عملیه های جمع و تفریق کسور الجبری

برای جمع و تفریق نمودن دو و یا چندین کسر الجبری مراحل ذیل را در نظر میگیریم:

- 1) اولاً مخرج مشترک کسرهای مذکور را دریافته و آنرا بحیث مخرج عمومی کسر قرار میدهیم.
- 2) این مخرج عمومی را تقسیم هر مخرج نموده، حاصل تقسیم را با صورت ضرب نموده و بر مخرج مشترک آنرا می نویسیم به همین ترتیب عملیه را بالای تمام کسور اجرا و در نتیجه صورت ها را با هم جمع نموده و بر مخرج مشترک می نویسیم.

$$\begin{aligned}
 3) \quad \frac{x^2}{x+y} + \frac{2xy}{x+y} + \frac{y^2}{x+y} &= \frac{x^2+2xy+y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x+y)}{x+y} = \boxed{x+y} \\
 4) \quad \frac{2}{x^2} + \frac{3}{2x} - \frac{x}{7} &= \frac{2 \cdot 14 + 3 \cdot 7x - x \cdot 2x^2}{14x^2} = \boxed{\frac{-2x^3+21x+28}{14x^2}} \\
 5) \quad \frac{3y^2}{5} + \frac{5y}{8} + \frac{(y-3)}{10} &= \frac{24y^2+25y+4y-12}{40} = \boxed{\frac{24y^2+29y-12}{40}} \\
 6) \quad \frac{2}{x-3} - \frac{3x+4}{x-3} + \frac{x^2+5}{x-3} &= \frac{2-(3x+4)+x^2+5}{x-3} = \frac{2-3x-4+x^2+5}{x-3} = \boxed{\frac{x^2-3x+3}{x-3}} \\
 7) \quad \frac{2x+1}{x(x+2)} - \frac{3}{(x+2)(x-1)} - \frac{5}{2x^2} &= \frac{2x(x-1)(2x+1)-2x^2 \cdot 3-5(x+2)(x-1)}{2x^2(x+2)(x-1)} \\
 &= \frac{2x(2x^2-x-1)-6x^2-5(x^2+x-2)}{2x^2(x+2)(x-1)} = \frac{4x^3-2x^2-2x-6x^2-5x^2-5x+10}{2x^2(x+2)(x-1)} = \boxed{\frac{4x^3-13x^2-7x+10}{2x^2(x+2)(x-1)}}
 \end{aligned}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$8) \quad 5 + \frac{5}{x+3} + \frac{10}{x^2-9} = 5 + \frac{5}{x+3} + \frac{10}{(x-3)(x+3)} = \frac{5(x-3)(x+3) + (x-3) + 10}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{5(x^2-9) + 5x - 15 + 10}{x^2-9} = \frac{5x^2 - 45 + 5x - 5}{x^2-9} = \frac{5x^2 + 5x - 50}{x^2-9} = \boxed{\frac{5(x^2+x+10)}{x^2-9}}$$

$$9) \quad \frac{3}{y-2} - \frac{2}{y+2} - \frac{y}{4-y^2} = \frac{3}{y-2} - \frac{2}{y+2} - \frac{y}{-(y^2-4)} = \frac{3}{y-2} - \frac{2}{y+2} + \frac{y}{y^2-4}$$

$$= \frac{3(y+2) - 2(y-2) + y}{y^2-4} = \frac{3y+6-2y+4+y}{y^2-4} = \boxed{\frac{2y+10}{y^2-4}}$$

$$10) \quad \frac{b-1}{b+2} + \frac{b+1}{2-b} - \frac{12}{4-b^2} + \frac{6}{2+b} = \frac{b-1}{b+2} + \frac{b+1}{-(b-2)} - \frac{12}{-(b^2-4)} + \frac{6}{b+2}$$

$$= \frac{b-1}{b+2} - \frac{b+1}{b-2} + \frac{12}{b^2-4} + \frac{6}{b+2} = \frac{(b-1)(b-2) - (b+1)(b+2) + 12 + 6(b-2)}{b^2-4}$$

$$= \frac{b^2-3b+2 - (b^2+3b+2) + 12 + 6b-12}{b^2-4} = \frac{b^2-3b+2-b^2-3b-2+12+6b-12}{b^2-4} = \frac{0}{b^2-4} = \boxed{0}$$

$$11) \quad \frac{5}{2m+4} - \frac{3}{m^2+3m+2} + \frac{m}{m^2-m-2} = \frac{5}{2(m+2)} - \frac{3}{(m+1)(m+2)} + \frac{m}{(m-2)(m+1)}$$

$$= \frac{5(m-2)(m+1) - 6(m-2) + m \cdot 2(m+2)}{2(m+2)(m-2)(m+1)} = \frac{5(m^2-m-2) - 6m + 12 + 2m^2 + 4m}{2(m+2)(m-2)(m+1)}$$

$$= \boxed{\frac{7m^2-7m+2}{2(m+2)(m-2)(m+1)}}$$

$$12) \quad \frac{3x-6}{4x^2+12x-16} - \frac{2x-5}{6x^2-6} + \frac{3x^2+3}{8x^2+40x+32} = \frac{3x-6}{4(x^2+3x-4)} - \frac{2x-5}{6(x^2-1)} + \frac{3x^2+3}{8(x^2+5x+4)}$$

$$= \frac{3x-6}{4(x+4)(x-1)} - \frac{2x-5}{6(x+1)(x-1)} + \frac{3x^2+3}{8(x+4)(x+1)}$$

$$= \frac{6(x+1)(3x-6) - 4(x+4)(2x-5) + 3(x-1)(3x^2+3)}{24(x+1)(x-1)(x+4)}$$

$$= \frac{6(3x^2-3x-6) - 4(2x^2+3x-20) + 3(3x^3+3x-3x^2-3)}{24(x+1)(x-1)(x+4)}$$

$$= \frac{18x^2-18x-36-8x^2-12x+80+9x^3+9x-9x^2-9}{24(x+1)(x-1)(x+4)} = \boxed{\frac{9x^3+x^2-21x+35}{24(x+1)(x-1)(x+4)}}$$

ضرب کسور الجبری

هرگاه دو و یا چندین کسر در حالت ضرب باشند قبل از اجرای عملیه ضرب در صورت امکان آنرا اختصار نموده بعداً صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می نمایم.

$$1) \quad \frac{x^2-9}{x^2-6x+5} \cdot \frac{x-5}{x+3} = \frac{(x^2-9)(x-5)}{(x^2-6x+5)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+3)(x-5)}{(x-1)(x-5)(x+3)} = \boxed{\frac{x-3}{x-1}}$$

$$2) \frac{x^2-4}{xy^2} \cdot \frac{2xy}{x^2-4x+4} = \frac{2xy(x^2-4)}{xy^2(x^2-4x+4)} = \frac{2xy(x+2)(x-2)}{xy \cdot y(x-2)(x-2)} = \boxed{\frac{2(x+2)}{y(x-2)}}$$

$$3) \frac{a^3-b^3}{a^2-2ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+ab} = \frac{(a^3-b^3)(a^2-b^2)}{(a^2-2ab+b^2)(a^2+ab)} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a-b)}{(a-b)^2 \cdot a(a+b)} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{a^2+ab+b^2}{a}}$$

$$4) \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x-12} \cdot \frac{x^2-7x+6}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-6)(x+2)} \cdot \frac{(x-1)(x-6)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \boxed{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$$

تقسیم کسور الجبری

هرگاه دو و یا چندین کسر در حالت تقسیم قرار داشته باشند، کسر اول را به حالت خودش، علامه تقسیم را به ضرب تبدیل نموده و کسور بعدی را معکوس می نماییم. بعداً از عملیه ضرب کسرها استفاده می نماییم.

$$1) \frac{7}{x^2-4} \div \frac{xy}{x+2} = \frac{7}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{xy} = \frac{7(x+2)}{xy(x^2-4)} \Rightarrow \boxed{\frac{7(x+2)}{xy(x-2)(x+2)}}$$

$$2) \frac{x+2xy}{3x^2} \div \frac{2y+1}{6x} = \frac{x+2xy}{3x^2} \cdot \frac{6x}{2y+1} \Rightarrow \frac{x(1+2y)}{3x^2} \cdot \frac{6x}{2y+1} = \frac{6x^2(1+2y)}{3x^2(2y+1)} = \boxed{2}$$

$$3) \frac{9-x^2}{x^4+6x^3} \div \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2+7x+6} = \frac{9-x^2}{x^4+6x^3} \cdot \frac{x^2+7x+6}{x^3-2x^2-3x} \Rightarrow \frac{(3+x)(3-x)(x+1)(x+6)}{x^3(x+6) \cdot x(x^2-2x-3)} \\ \frac{(3+x)(3-x)(x+1)(x+6)}{x^4(x+6)(x-3)(x+1)} = \frac{(3-x)(3+x)}{x^4(x-3)} = \frac{-(x-3)(3+x)}{x^4(x-3)} = \boxed{\frac{-3-x}{x^4}}$$

$$4) (2x^2 - 5x + 2) \div \left(\frac{2x-1}{3}\right) = (2x^2 - 5x + 2) \cdot \left(\frac{3}{2x-1}\right) = (2x-1)(x-2) \cdot \frac{3}{2x-1} \\ 3(x-2) = \boxed{3x-6}$$

$$5) \frac{x^2}{y^2-1} \div \frac{x^2}{y-1} = \frac{x^2}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{y-1}{x^2} = \boxed{\frac{1}{y+1}}$$

کسر مرکب یا کسر الکسر

کسریکه صورت یا مخرج و یا هردوی آن از یک کسر و یا بیشتر از آن تشکیل شده باشد به نام کسر مرکب یا کسر الکسر یاد می شود.

برای اینکه یک کسر مرکب را ساده سازیم در این صورت مراحل ذیل را در نظر می گیریم:

1. صورت و مخرج کسر مرکب را به شکل کسر های ساده تقلیل می دهیم.

2. نتیجه صورت و مخرج را بالای یکدیگر تقسیم می نماییم.

برای اینکه طریقه ساده ساختن کسور مرکب را بدانیم مثال های ذیل را در نظر می گیریم:

$$1) \frac{\frac{x+y}{3x^2}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{x+y}{3x^2} \cdot \frac{x}{x-y} = \boxed{\frac{x+y}{3x(x-y)}}$$

$$2) \frac{2a}{\frac{a}{x+1}} = \frac{2a}{1} \cdot \frac{x+1}{a} = 2(x+1) = \boxed{2x+2}$$

$$3) \frac{\frac{2}{a-b}}{a-b} = \frac{2}{a-b} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{2}{(a-b)(a-b)} = \boxed{\frac{2}{(a-b)^2}}$$

$$4) \frac{\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}}{\frac{2x+1}{2x^2+x}} = \frac{\frac{2x+1}{4x^2}}{\frac{2x+1}{2x^2+x}} = \frac{2x+1}{4x^2} \cdot \frac{1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{4x^2} \cdot \frac{1}{x(2x+1)} = \frac{(2x+1)}{4x^3(2x+1)} = \boxed{\frac{1}{4x^3}}$$

$$5) \frac{\frac{x}{1-\frac{1}{1+\frac{x}{y}}}}{\frac{x}{1-\frac{1}{\frac{y+x}{y}}}} = \frac{x}{1-\frac{1}{1+\frac{x}{y}}} = \frac{x}{1-\frac{y}{y+x}} = \frac{x}{\frac{y+x-y}{y+x}} = \frac{x}{\frac{x}{y+x}} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y+x}{x} = \boxed{x+y}$$

$$6) \frac{y+\frac{2y}{y-2}}{1+\frac{4}{y^2-4}} = \frac{\frac{y(y-2)+2y}{y-2}}{\frac{y^2-4+4}{y^2-4}} = \frac{\frac{y^2}{y-2}}{\frac{y^2}{y^2-4}} = \frac{y^2}{y-2} \cdot \frac{y^2-4}{y^2} = \frac{y^2(y+2)(y-2)}{y^2(y-2)} = \boxed{y+2}$$

$$7) \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2a-1}{2a+1}}} &= 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{3(2a+1)-(2a-1)}{2a+1}}} = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{6a+3-2a+1}{2a+1}}} = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{4a+4}{2a+1}}} \\ &= 1 - \frac{1}{2 - \frac{2a+1}{4a+4}} = 1 - \frac{1}{\frac{2(4a+4)-(2a+1)}{4a+4}} = 1 - \frac{1}{\frac{8a+8-2a-1}{4a+4}} = 1 - \frac{1}{\frac{6a+7}{4a+4}} = 1 - \frac{4a+4}{6a+7} \\ &= \frac{6a+7-(4a+4)}{6a+7} = \frac{6a+7-4a-4}{6a+7} = \boxed{\frac{2a+3}{6a+7}} \end{aligned}$$

عملیات مشترک در کسور الجبری

برای اجرای عملیات مشترک کسور الجبری از قوانین افاده های عددی استفاده نموده و آنها را ساده سازی می نمائیم.

$$1) \frac{2}{x} \div \frac{12}{xy} \cdot \frac{3y}{5} = \frac{2}{x} \cdot \frac{xy}{12} \cdot \frac{3y}{5} = \boxed{\frac{y^2}{10}}$$

$$2) \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \div \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) \right] \cdot \frac{a^3+ax^2}{a^2-x^2} = \left[\left(\frac{a^2-x^2}{a^2} \right) \div \left(\frac{a^2+x^2}{ax} \right) \right] \cdot \frac{a(a^2+x^2)}{(a-x)(a+x)} \\ = \frac{(a-x)(a+x)}{a^2} \cdot \frac{ax}{a^2+x^2} \cdot \frac{a(a^2+x^2)}{(a-x)(a+x)} = \boxed{x}$$

$$3) \left(a \div \frac{a+1}{a-1} \right) \left(a - \frac{2}{a-1} \right) = \left(a \cdot \frac{a-1}{a+1} \right) \left(\frac{a^2-a-2}{a-1} \right) \\ = \frac{a(a-1)}{a+1} \cdot \frac{(a-2)(a+1)}{a-1} = \boxed{a(a-2)}$$

$$4) \frac{2x}{3} - \frac{4}{5x} \div \frac{3}{10x} = \frac{2x}{3} - \frac{4}{5x} \cdot \frac{10x}{3} = \frac{2x}{3} - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{2x-8}{3}}$$

$$5) \frac{a^2b^{-2}-b^2a^{-2}}{ab^{-1}-ba^{-1}} = \frac{(ab^{-1}-ba^{-1})(ab^{-1}+ba^{-1})}{ab^{-1}-ba^{-1}} = ab^{-1} + ba^{-1} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \boxed{\frac{a^2+b^2}{ab}}$$

ناطق (گویا) ساختن

هر گاه یک عدد زیر جذر باشد غیر ناطق (گنگ یا اصم) گفته میشود. در صورتیکه از جذر آنرا به تخنیک الجبری خارج نمائیم این عملیه را گویا سازی می نامند. که از اصول ذیل استفاده میکنیم:

- 1) $\sqrt{x}\sqrt{x} \longrightarrow$
- 2) $a\sqrt{x}\sqrt{x} \longrightarrow$
- 3) $\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} \longrightarrow$
- 4) $a\sqrt{b} + c\sqrt{d} \longrightarrow a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$
- 5) $\sqrt{x} - \sqrt{y}\sqrt{x} + \sqrt{y} \longrightarrow$
- 6) $\sqrt{x} + \sqrt{y}\sqrt{x} - \sqrt{y} \longrightarrow$
- 7) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} \longrightarrow$
- 8) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} \longrightarrow$
- 9) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} - \sqrt[4]{y^3} \longrightarrow$
- 10) $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3} \longrightarrow$
- 11) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\sqrt[n]{x^{n-1}} \longrightarrow \sqrt[n]{x^{n-2}y} + \dots + \sqrt[n]{xy^{n-2}} + \sqrt[n]{y^{n-1}}$
- 12) $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{a^{n-1}} \longrightarrow \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}$

برای درک خوبتر ناطق (گویا) سازی به مثال های ذیل توجه کنید:

1. $\sqrt[5]{2^3} = \frac{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}}{1 \cdot \sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2}{\sqrt[5]{2^2}}$
2. $\sqrt[7]{2^4} = \frac{\sqrt[7]{2^4} \cdot \sqrt[7]{2^3}}{1 \cdot \sqrt[7]{2^3}} = \frac{\sqrt[7]{2^7}}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{2}{\sqrt[7]{2^3}}$
3. $\sqrt[5]{2^2} = \frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}}{1 \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2}{\sqrt[5]{2^3}}$
4. $\sqrt[99]{2^{37}} = \frac{\sqrt[99]{2^{37}} \cdot \sqrt[99]{2^{62}}}{1 \cdot \sqrt[99]{2^{62}}} = \frac{\sqrt[99]{2^{99}}}{\sqrt[99]{2^{62}}} = \frac{2}{\sqrt[99]{2^{62}}}$
5. $\sqrt[27]{3^{22}} = \frac{\sqrt[27]{3^{22}} \cdot \sqrt[27]{3^5}}{1 \cdot \sqrt[27]{3^5}} = \frac{\sqrt[27]{3^{27}}}{\sqrt[27]{3^5}} = \frac{3}{\sqrt[27]{3^5}}$
6. $\frac{3}{\sqrt[5]{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$
7. $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
8. $\frac{5}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{6^3-1}}{\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{6^3-1}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{6^2}} = \frac{5 \sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{5 \sqrt[3]{36}}{6}$
9. $\frac{m}{\sqrt[5]{n^3}} = \frac{m \cdot \sqrt[5]{n^{5-3}}}{\sqrt[5]{n^3} \cdot \sqrt[5]{n^{5-3}}} = \frac{m \sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[5]{n^3} \cdot \sqrt[5]{n^2}} = \frac{m \sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[5]{n^5}} = \frac{m \sqrt[5]{n^2}}{n}$

$$10. \frac{6}{\sqrt[7]{6^4}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{6^3}}{\sqrt[7]{6^4} \cdot \sqrt[7]{6^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[7]{6^3}}{\sqrt[7]{6^7}} = \sqrt[7]{6^3} = \boxed{\sqrt[7]{216}}$$

$$11. \frac{5}{\sqrt[7]{5^5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[7]{5^2}}{\sqrt[7]{5^5} \cdot \sqrt[7]{5^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[7]{5^2}}{\sqrt[7]{5^7}} = \sqrt[7]{5^2} = \boxed{\sqrt[7]{25}}$$

$$12. \frac{2}{\sqrt[2]{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[2]{2}}{\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[2]{2}}{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[2]{2} = \boxed{1.41}$$

$$13. \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \sqrt{3} = \boxed{1.7}$$

$$14. \sqrt[2]{3} - \sqrt[2]{2} = \frac{(\sqrt[2]{3} - \sqrt[2]{2})(\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2})}{(\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2})} = \frac{\sqrt{3^2} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{2^2}}{\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2}} = \frac{3-2}{\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2})^{-1}}$$

$$15. \sqrt[2]{7} - \sqrt[2]{5} = \frac{(\sqrt[2]{7} - \sqrt[2]{5})(\sqrt[2]{7} + \sqrt[2]{5})}{(\sqrt[2]{7} + \sqrt[2]{5})} = \frac{\sqrt{49} + \sqrt{35} - \sqrt{35} - \sqrt{25}}{\sqrt[2]{7} + \sqrt[2]{5}} = \frac{7-5}{\sqrt[2]{7} + \sqrt[2]{5}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt[2]{7} + \sqrt[2]{5}}}$$

$$16. \frac{3}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{3(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)} = \frac{3(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{3(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{3(\sqrt[4]{2}+1+1)(\sqrt{2}+1)}{2-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{3(\sqrt[4]{2}+1+1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$17. \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1+\sqrt{2}}{-1} = \boxed{-(1+\sqrt{2})}$$

$$18. \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \boxed{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$19. \frac{7}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{7}{\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27}} = \frac{7(\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{27})}{(\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27})(\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{27})} = \frac{7(\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{27})}{(\sqrt[6]{2^2})^2 - (\sqrt[6]{3^3})^2} = \boxed{\frac{7(\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{27})}{\sqrt[3]{4}-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{7(\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{27})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{729})}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{27})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{729})} = \frac{7(\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{27})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{729})}{4-27}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{-7}{23}(\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{27})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{729})}$$

20. مخرج کسر ذیل را گویا سازید.

$$\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+1} = \frac{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(4\sqrt{2}-1)}{(4\sqrt{2}+1)(4\sqrt{2}-1)} = \frac{8\sqrt{6}-2\sqrt{3}-12\sqrt{4}+3\sqrt{2}}{16\sqrt{2^2}-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}-1} = \boxed{\frac{8\sqrt{6}-2\sqrt{3}-24+3\sqrt{2}}{31}}$$

21. مخرج کسر ذیل را ناطق سازید.

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3^2}+\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2}+\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{2^2}} = \frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2} = \boxed{5+2\sqrt{6}}$$

22. کسر ذیل را گویا سازید.

$$\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2} = ? \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} \Rightarrow \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

$$\frac{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{(2)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-1}{2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+2} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+2}}$$

23. می خواهیم صورت کسر $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ را گویا سازیم.

حل: صورت و مخرج کسر فوق را ضرب مزدوج صورت یعنی $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ ضرب می نماییم.

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{25}+\sqrt{15}-\sqrt{15}-\sqrt{9}}{\sqrt{25}+\sqrt{15}+\sqrt{15}+\sqrt{9}} = \frac{5-3}{8+2\sqrt{15}} = \frac{2}{2(4+\sqrt{15})} = \boxed{\frac{1}{4+\sqrt{15}}}$$

24. صورت کسر $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ را گویا سازید.

حل: صورت و مخرج کسر فوق را در مزدوج صورت یعنی $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ ضرب می نماییم.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}-\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}-\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}} = \frac{x-y}{x-2\sqrt{xy}+y} = \boxed{\frac{x-y}{x+y-2\sqrt{xy}}}$$

25. مخرج کسر $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ را گویا سازید.

حل: صورت و مخرج کسر فوق را در مزدوج مخرج یعنی $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$ ضرب می نماییم.

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{x+h-x} = \boxed{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

26. صورت کسر $\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$ را گویا سازید.

حل: صورت و مخرج کسر فوق را به مزدوج صورت یعنی $(\sqrt{x+1} - 1)$ ضرب می نماییم.

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}-1)} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}+1} = \boxed{\frac{x}{x+2-2\sqrt{x+1}}}$$

27. مخرج کسر $\frac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ را گویا سازید.

حل: صورت و مخرج کسر فوق را در مزدوج مخرج یعنی $(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})$ ضرب می نماییم.

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{25}+\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{9}+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{4}} \\ &= \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5+3+2\sqrt{15}-2} = \boxed{\frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{6+2\sqrt{15}}} \end{aligned}$$

28. مزدوج کسر ذیل را دریابید.

$$\frac{\sqrt[3]{5}-1}{3} = ? \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 1} + \sqrt[3]{1^2} \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1}$$

29. مزدوج کسر ذیل را دریابید.

$$\sqrt[3]{2} - 3 = ? \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2} \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}$$

30. مزدوج کسر ذیل را دریابید.

$$\sqrt[3]{2} + 1 = ? \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2 \cdot 1} + \sqrt[3]{1^2} \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$$

سوالات تقویتی الجبر 1

1. در روی محور اعداد در بین $+5$ و $+6$ چند عدد حقیقی وجود دارد؟
 ∞ (4) 2 (3) 1 (2) 0 (1)
2. حاصل افاده $|\sqrt{2} - 2|$ عبارت است از:
 $2 + \sqrt{2}$ (4) $2 - \sqrt{2}$ (3) $\sqrt{2} - 2$ (2) $\sqrt{2} + 2$ (1)
3. حاصل افاده $|-3 + 10| + |3 - 7| - |-5|$ عبارت است از:
 -2 (4) 16 (3) 6 (2) -6 (1)
4. حاصل افاده $|2 - 3\pi| + |1 - \pi| - 4\pi - 3$ عبارت است از:
 $6 - 8\pi$ (4) $8\pi - 6$ (3) صفر (2) -6 (1)
5. $\left| \frac{3\pi - 11}{11 - 3\pi} \right| = ?$
 3 (4) $\frac{11 - \pi}{3}$ (3) 1 (2) صفر (1)
6. حاصل افاده عددی $-5 + 3 - (-2) + (-6)$ را دریابید.
 -6 (4) $+6$ (3) -10 (2) صفر (1)
7. حاصل اعداد $4(-2) - 5(+3) - 6(-4)$ را دریابید.
 2 (4) 1 (3) 0 (2) -1 (1)
8. حاصل اعداد $\frac{+20}{+4} + \frac{-10}{-5} + \frac{+30}{-6} - \frac{-15}{+3}$ را دریابید.
 $+5$ (4) -3 (3) -7 (2) $+7$ (1)
9. حاصل افاده $6 + 1 - 10 \div (-2) \cdot (-25)$ را دریافت نمائید.
 4 (4) 10 (3) 9 (2) 15 (1)
10. حاصل افاده $-2(3 - 5) + (-4 - 6)$ را دریافت نمائید.
 14 (4) 40 (3) $+6$ (2) -6 (1)
11. حاصل افاده $5 + (-18) - [24 + (-30)] \times (-7)$ را دریافت نمائید.
 -55 (4) 55 (3) -65 (2) -5 (1)

12. حاصل افاده $6 \div [168 + 240 - (-210)] + 16 \div [(-102) + (-330)]$ را دریافت نمائید.

76 (1) 86 (2) 66 (3) 13 (4)

13. $3 - 2^4 \cdot 5 + (16 \div 4) = ?$

3 (1) 7 (2) -73 (3) 73 (4)

14. $4 \times 5 \div 2 - 3(2 + 3^2) + 2 = ?$

-21 (1) 21 (2) 20 (3) -20 (4)

15. حاصل افاده طاقت دار $3^3 + (-5)^2 - (-3)^3$ را دریافت نمائید.

79 (1) 25 (2) 33 (3) 27 (4)

16. اعداد توان دار $\left(\frac{21^5}{3^5}\right) \cdot \left(\frac{7^9}{7^4}\right)$ را محاسبه نمائید.

0 (1) 7 (2) 7⁵ (3) 7¹⁰ (4)

17. $\frac{5^9}{5^9} + \frac{2^{12}}{2^{12}} = ?$

0 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4)

18. $\frac{5^0 + 1^{35} + 0^8}{1^{40} + 7^0 - 0^4} = ?$

0 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4)

19. $(-5)^8 \cdot (5)^4 \cdot (5^6) \cdot (-5)^2 = ?$

5²⁰ (1) -(-5)²⁰ (2) -5²⁰ (3) 5⁻²⁰ (4)

20. $(-3)^5 \cdot (-3^6) \cdot (-3)^7 \cdot (-3^8) = ?$

-(-3)²⁶ (1) 3²⁶ (2) 3⁻²⁶ (3) -3²⁶ (4)

21. $\frac{(-1)^{40} \cdot (1^{29}) \cdot (-1)^{20} \cdot (-1^{10})}{(+1)^{45} \cdot (-1^{16}) \cdot (-1)^{60} \cdot (-1^5)} = ?$

+1 (1) -1 (2) 0 (3) 2 (4)

22. حاصل افاده $\left(\frac{5}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^6$ را دریافت نمائید.

$\left(\frac{21}{10}\right)^3$ (1) $\left(\frac{5}{3}\right)^3$ (2) $\left(\frac{7}{2}\right)^3$ (3) $\left(\frac{35}{6}\right)^3$ (4)

23. حاصل افاده $((3^{-2})^{-4})^{-1})^{-3}$ را دریافت نمائید.
- 3^{10} (4) 3^{-10} (3) 3^{-24} (2) 3^{24} (1)
24. حاصل افاده $7^{2^{3^0}} + 3^{2^{3^0}}$ را دریابید.
- 58 (4) 7 (3) 1 (2) 0 (1)
25. $\frac{2^7+2^8-2^6}{2^6+2^7}=?$
- $\frac{5}{3}$ (4) 2^6 (3) 3 (2) 5 (1)
26. $2^{97}+2^{97}+2^{97}+2^{97}+2^{97}+2^{97}+2^{97}+2^{97}=?$
- 2^{100} (4) 2^{99} (3) 2^{98} (2) 2^{97} (1)
27. $4^{12}+8^8+2^{24}+16^6=?$
- 2^{27} (4) 2^{26} (3) 2^{25} (2) 2^{24} (1)
28. $2^{a+1}-3 \cdot 2^{a+3}+8 \cdot 2^{a+2}=?$
- 2^{a-4} (4) 2^{a-2} (3) $5 \cdot 2^{a+1}$ (2) 2^{a+2} (1)
29. $\frac{2 \cdot 3^{n+1}+3^{n-1}-3^{n+2}}{4 \cdot 3^{n-1}}=?$
- 1 (4) 0 (3) -1 (2) -2 (1)
30. $9^5+(3^2)^5+(-3^2)^5-(-3)^5-(-3^{-5})^{-2}=?$
- $5 \cdot 3^{10}$ (4) $4 \cdot 3^{10}$ (3) $2 \cdot 3^{10}$ (2) 3^5 (1)
31. $\frac{12^3+12^3+12^3}{6^4+6^4+6^4+6^4}=?$
- 4 (4) 3 (3) 2 (2) 1 (1)
32. $\frac{2 \cdot 5^{22}-9 \cdot 5^{21}}{25^{10}}=?$
- 5 (4) 1 (3) -5 (2) $\frac{1}{5}$ (1)
33. $\frac{4^{2n+2} \cdot 3^{2n-1}}{6^{n-1} \cdot 2^{3n+1}}:3=?$
- $16 \cdot 3^n$ (4) $16 \cdot 3^{n-1}$ (3) 3^n (2) 16 (1)

34. نصف عدد 2^{100} عبارت است از:
 2^{50} (1) 2^{49} (2) 2^{99} (3) 2^{100} (4)
35. حاصل افاده $\sqrt{25} + \sqrt{64} - \sqrt{16}$ عبارت است از:
 3 (1) 6 (2) 9 (3) 12 (4)
36. حاصل افاده جذری $\sqrt{400} - \sqrt{100} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[5]{1024}$ عبارت است از:
 20 (1) 15 (2) 10 (3) 18 (4)
37. حاصل افاده جذری $\sqrt[4]{3^8} + \sqrt[7]{5^7} + \sqrt[5]{3^2} - \sqrt[3]{3^6}$ عبارت است از:
 16 (1) 9 (2) 14 (3) 7 (4)
38. قیمت افاده جذری $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{8}$ را دریابید.
 6 (1) 8 (2) 14 (3) 48 (4)
39. قیمت افاده جذری $\sqrt[3]{2^7} \cdot \sqrt[3]{2^8} \cdot \sqrt[3]{2^{10}} \cdot \sqrt[3]{4}$ را محاسبه نمائید.
 2^8 (1) 2^9 (2) 2^{10} (3) 2^{27} (4)
40. قیمت افاده جذری $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$ را محاسبه نمائید.
 5 (1) 10 (2) 15 (3) 20 (4)
41. حاصل جذور $9\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ عبارت است از:
 $\sqrt{5}$ (1) $8\sqrt{5}$ (2) $2\sqrt{5}$ (3) $8\sqrt{5}$ (4)
42. حاصل جذور $4\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}$ عبارت است از:
 $3\sqrt[3]{7}$ (1) $7\sqrt[3]{3}$ (2) $7\sqrt[3]{3}$ (3) $3\sqrt[3]{7}$ (4)
43. حاصل جذور $\sqrt{125} + \sqrt{20} + \sqrt{45} + \sqrt{80}$ عبارت است از:
 $\sqrt{5}$ (1) 14 (2) $14\sqrt{5}$ (3) $5\sqrt{14}$ (4)
44. حاصل ضرب جذور $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^{12}}$ عبارت است از:
 8 (1) 4 (2) 2 (3) 1 (4)
45. حاصل ضرب جذور $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ را دریافت نمائید.
 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

46. حاصل تقسیم جذور $\frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{3^3}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ عبارت است از:

- (1) 3 (2) 9 (3) 6 (4) 18

47. جذر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را گویا سازید.

- (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 2 (4) 1

48. جذر $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ را گویا سازید.

- (1) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

49. قیمت افاده جذری $(\sqrt{\sqrt{81}})(\sqrt[3]{\sqrt{64}})$ را دریابید.

- (1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 12

50. قیمت افاده جذری $\sqrt[3]{5^2 \sqrt{3^7 \sqrt{7^3}}}$ را دریابید.

- (1) $^{24}\sqrt{5^{16}}$ (2) $^{24}\sqrt{3^{14}}$ (3) $^3\sqrt{5^{16} \cdot 3^{14}}$ (4) $^{24}\sqrt{5^{16} \cdot 3^{28} \cdot 7^3}$

51. قیمت افاده جذری $\sqrt[2]{3^5 \sqrt[3]{3^2 \sqrt[4]{3}}}$ را دریابید.

- (1) $^{24}\sqrt{3^{69}}$ (2) $^{24}\sqrt{3^{120}}$ (3) $^{24}\sqrt{3^{10}}$ (4) $\sqrt{3^{69}}$

52. قیمت افاده جذری $\sqrt[3]{25 \sqrt{125 \sqrt[4]{5}}}$ را دریابید.

- (1) $^{24}\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{5^{29}}$ (3) $^{24}\sqrt{5^{29}}$ (4) $^{24}\sqrt{5^6}$

53. قیمت افاده جذری $\sqrt[4]{27^4 \sqrt[4]{27^4 \sqrt[4]{27} \dots}}$ را دریابید.

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

54. قیمت افاده جذری $\sqrt[3]{5^3 \sqrt[3]{5^3 \sqrt[3]{5} \dots}}$ را دریابید.

- (1) 5 (2) $\sqrt{5}$ (3) $^3\sqrt{5}$ (4) $^4\sqrt{5}$

55. قیمت افاده جذری $\sqrt[2]{64 \div \sqrt[2]{64 \div \sqrt[2]{64 \div \dots}}}$ را دریابید.

- 1 (4) 2 (3) 4 (2) 8 (1)

56. قیمت افاده جذری $\sqrt{110 + \sqrt{110 + \sqrt{110 + \dots}}}$ را دریابید.

- $\sqrt{110}$ (4) 12 (3) 11 (2) 10 (1)

57. قیمت افاده جذری $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}$ را دریابید.

- 1 (4) 2 (3) 9 (2) 8 (1)

58. حاصل افاده جذری $\sqrt{9 + \sqrt{80}}$ را دریافت نمایید.

- $\sqrt{9} - \sqrt{80}$ (4) $\sqrt{9} + \sqrt{80}$ (3) $\sqrt{5} - 2$ (2) $\sqrt{5} + 2$ (1)

59. حاصل افاده جذری $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$ را دریافت نمایید.

- $\sqrt{3} - 1$ (4) $\sqrt{3} + 1$ (3) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (1)

60. حاصل افاده جذری $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ را دریافت نمایید.

- $\sqrt{3} - \sqrt{8}$ (4) $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ (3) $\sqrt{2} - 1$ (2) $\sqrt{2} + 1$ (1)

61. حاصل افاده جذری $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ را دریافت نمایید.

- $\sqrt{3} + 1$ (4) $\sqrt{3} - 1$ (3) 1 (2) 3 (1)

62. $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = ?$

- 3 (4) 2 (3) 1 (2) 0 (1)

63. $\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{9+2\sqrt{20}})}{\sqrt{2}} = ?$

- $-\frac{3}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 1 (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (1)

64. $\frac{1}{2-3\sqrt{3}} + \frac{1}{2+3\sqrt{3}} = ?$

- $-\frac{8}{17}$ (4) $-\frac{4}{23}$ (3) $-\frac{14}{5}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (1)

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$\frac{5}{5-\sqrt{5}} \cdot (5 + \sqrt{5})^{-1} = ? \quad .65$$

$$\frac{4}{7} (4$$

$$\frac{1}{4} (3$$

$$\frac{5}{2} (2$$

$$\frac{1}{2} (1$$

$$\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = ? \quad .66$$

$$4 (4$$

$$1 (3$$

$$2\sqrt{3} (2$$

$$2 (1$$

$$\sqrt[3]{\frac{3^{-1}}{0.1}} : \frac{0.9}{10} = ? \quad .67$$

$$\frac{100}{9} (4$$

$$\frac{100}{81} (3$$

$$\frac{10}{9} (2$$

$$\frac{10}{3} (1$$

$$\sqrt{0.16} + \sqrt{0.64} = ? \quad .68$$

$$\frac{9}{10} (4$$

$$\frac{4}{5} (3$$

$$\frac{6}{5} (2$$

$$\frac{3}{2} (1$$

$$\frac{\sqrt{5.76} + \sqrt{2.89} + \sqrt{1.96}}{\sqrt{0.49} + \sqrt{0.16}} = ? \quad .69$$

$$5 (4$$

$$4 (3$$

$$3 (2$$

$$2 (1$$

$$\frac{7}{\sqrt{7} - \frac{3}{\sqrt{7} - \frac{3}{\sqrt{7}}}} = ? \quad .70$$

$$4 (4$$

$$4\sqrt{7} (3$$

$$\frac{1}{4} (2$$

$$1 (1$$

$$\frac{\sqrt{252}}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = ? \quad .71$$

$$15 (4$$

$$9 (3$$

$$6 (2$$

$$3 (1$$

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = ? \quad .72$$

$$2\sqrt{3} (4$$

$$\sqrt{5} + 1 (3$$

$$2 - \sqrt{5} (2$$

$$2 + \sqrt{5} (1$$

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = ? \quad .73$$

$$4 + \sqrt{5} (4$$

$$2 + \sqrt{2} (3$$

$$5\sqrt{2} (2$$

$$3 + \sqrt{3} (1$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{21}}} \right) (\sqrt{7} + \sqrt{3}) = ? \quad .74$$

$$\sqrt{7} (4$$

$$4 (3$$

$$4\sqrt{2} (2$$

$$4\sqrt{3} (1$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

$$2\sqrt{2000ab} - \frac{b}{a}\sqrt{180a^3b} = ? \quad .75$$

$$40 - 6ab \quad (3)$$

$$(40 - 6b)\sqrt{5ab} \quad (1)$$

$$(40 + 6ab)\sqrt{5ab} \quad (4)$$

$$\sqrt{5ab} \quad (2)$$

$$2\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \frac{1}{2}\sqrt{8x} = ? \quad .76$$

$$10\sqrt{2x} \quad (4)$$

$$9\sqrt{2x} \quad (3)$$

$$9\sqrt{2} \quad (2)$$

$$9\sqrt{x} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = ? \quad .77$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{5} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1} = ? \quad .78$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3^4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = ? \quad .79$$

$$27 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$.80 \quad \text{یکی از اعداد ذیل موهومی می باشد.}$$

$$\sqrt[3]{+5} \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{-5} \quad (3)$$

$$\sqrt{+5} \quad (2)$$

$$\sqrt{-5} \quad (1)$$

$$.81 \quad \text{حاصل افاده } i^8 + i^{34} \text{ را دریافت نمائید.}$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$.82 \quad \text{حاصل افاده } i^{17} + i^{23} \text{ را دریافت نمائید.}$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

$$.83 \quad \text{حاصل افاده جذری } \sqrt{-16} + \sqrt{-9} - \sqrt[6]{-64} \text{ عبارت است از:}$$

$$13 \quad (4)$$

$$8i \quad (3)$$

$$5i \quad (2)$$

$$13i \quad (1)$$

$$.84 \quad \text{حاصل افاده } (5 - 8i) + (-4 - 3i) \text{ را دریابید.}$$

$$1 - 11i \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$i \quad (2)$$

$$11i \quad (1)$$

$$.85 \quad \text{حاصل تفریق } (5 - i) - (7 + 3i) \text{ را دریابید.}$$

$$2 + 4i \quad (4)$$

$$-4i \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-2 - 4i \quad (1)$$

86. حاصل ضرب $(2-i)^4(2+i)^4$ را دریافت نمائید.
 81 (1) 64 (2) 625 (3) 1 (4)
87. حاصل ضرب $(3-i)^8(3+i)^{10}$ را دریافت نمائید.
 $4+3i$ (1) $10^8(4+3i)$ (2) $2 \cdot 10^8(4+3i)$ (3) 10^8 (4)
88. حاصل افاده $i + \frac{3i^{41}+i^6+i^{24}}{2-i^5+i^{26}-i^{39}}$ را دریافت نمائید.
 $\frac{3i}{5}$ (1) $\frac{8i-6}{5}$ (2) $2i$ (3) $\frac{8i+6}{5}$ (4)
89. حاصل افاده جذری $\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{3}$ عبارت است از:
 $\sqrt{3}$ (1) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (3) 3 (4)
90. حد الجبری $-4x^2yz^3$ با یکی از حدود ذیل مشابه میباشد.
 $-4xyz$ (1) $5x^2yz^2$ (2) $0.3x^2y^2z^3$ (3) $\frac{1}{2}x^2yz^3$ (4)
91. حد الجبری $3ab^2c$ با یکی از حدود ذیل مشابه نه میباشد.
 $3a^2b^2c$ (1) $-3ab^2c$ (2) $7ab^2c$ (3) $-ab^2c$ (4)
92. ضریب عددی حد الجبری $-6m^2n^5$ را دریافت نمائید.
 2 (1) 5 (2) -6 (3) 7 (4)
93. در پولینوم $4x^2 + 2x - 6$ قیمت $a_0 + a_1 + a_2$ را دریافت نمائید.
 -4 (1) 0 (2) -6 (3) 2 (4)
94. درجه مونوم $5x^3yz^4$ را تعیین نمائید.
 5 (1) 7 (2) 12 (3) 8 (4)
95. درجه پولینوم $x^2 - x^3 + 2x + 5x^5$ را تعیین نمائید.
 3 (1) 12 (2) 5 (3) 14 (4)
96. هرگاه پولینوم $(2a-12)x^2 + (a+3b)x + 15$ یک پولینوم ثابت باشد، شما قیمت $3a+2b$ را دریابید.
 14 (1) 6 (2) -6 (3) -12 (4)

97. هرگاه پولینوم $(3a + 9)x^2 + (a - b)x + (2a + 5b + c)$ یک پولینوم صفری باشد، شما قیمت $a + b + c$ را دریابید.

$$-3 \quad (1) \quad +3 \quad (2) \quad -9 \quad (3) \quad 15 \quad (4)$$

98. هرگاه پولینوم $x^2 + 7x + 12$ با پولینوم $ax^2 + (4a + b)x + (a + b + 2c)$ معادل باشد آنگاه قیمت $a + 2b + 3c$ را دریافت نمایید.

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 19 \quad (3) \quad 20 \quad (4)$$

99. هرگاه پولینوم $x^m y^n + x^4 y^7 + xy^{2n}$ یک پولینوم متجانس باشد، پس قیمت $3m + n$ را دریافت نمایید.

$$6 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 18 \quad (3) \quad 23 \quad (4)$$

100. حاصل جمع پولینوم های $3m^2 + 5m - 3$ و $2m^2 - m + 9$ را دریافت نمایید.

$$5m^2 + 6m + 12 \quad (1) \quad 5m^2 + 4m + 6 \quad (3) \quad 5m^2 - 4m + 6 \quad (2) \quad 5m^2 - 4m - 6 \quad (4)$$

101. از پولینوم $2y^2 + 3y - 6$ پولینوم $y^2 + y - 10$ را تفریق نمایید.

$$y^2 + 2y + 4 \quad (1) \quad y^2 + 4y - 16 \quad (3) \quad y^2 + 2y - 16 \quad (2) \quad y^2 + 2y + 4 \quad (4)$$

102. پولینوم $3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ را از پولینوم $4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1$ تفریق نمایید.

$$4x^3 - x^4 \quad (1) \quad 3x^4 - 4x^3 \quad (2) \quad 4x^4 + 4x^3 \quad (3) \quad x^3 - 1 \quad (4)$$

103. حاصل ضرب $2a(a - 3)$ عبارت است از:

$$2a^2 - 6 \quad (1) \quad 2a^2 - 3 \quad (2) \quad 42a^2 - 6a \quad (3) \quad 2a^2 + 6a \quad (4)$$

104. حاصل ضرب $(-3xy^2)(2x^3yz)$ عبارت است از:

$$-6x^4y^3z \quad (1) \quad -6x^3y^2 \quad (2) \quad 4 - 6x^3y^2z \quad (3) \quad -x^4y^3z \quad (4)$$

105. حاصل ضرب $(3x + 5y)(3x - 5y)$ عبارت است از:

$$9x - 25y \quad (1) \quad 9x^2 - 25y^2 \quad (2) \quad 39x + 25y \quad (3) \quad 9x^2 + 25y^2 \quad (4)$$

106. حجم مکعبی را دریابید که طول آن $2x$ ، عرض آن x و ارتفاع آن $x + 2$ باشد.

$$2x^2 \quad (1) \quad 2x^3 + 4x^2 \quad (2) \quad 32x^3 + 4x \quad (3) \quad 2x^3 - 4x^2 \quad (4)$$

107. حاصل ضرب $(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)$ را دریابید.

x^8 (4	1 (3	$1 - x^8$ (2	$1 + x^8$ (1
----------	------	--------------	--------------

108. حاصل افاده $\frac{12x^5y^4z^6}{3x^3y^3z^2} + \frac{15x^3y^3z^{10}}{5xy^2z^6} + \frac{35x^4y^3z^4}{7x^2y^2}$ را دریافت نمائید.

$-9x^2yz^4$ (4	$-12x^2yz^4$ (3	$9x^2yz^4$ (2	$12x^2yz^4$ (1
----------------	-----------------	---------------	----------------

109. حاصل تقسیم $\frac{16a^7b^5 + 10a^3b^6 - 20a^2b^3}{2a^2b^3}$ را دریافت نمائید.

$8a^5b^2 + 5ab^3 - 10$ (3	$8a^5b^2 + 5ab^3$ (1
$8a^5b^2 + 5ab^3 + 10$ (4	$8a^5b^2 + 5ab^3 - 10ab$ (2

110. هرگاه پولینوم $x^3 - x^2 - 14x + 11$ را بالای پولینوم $x - 4$ تقسیم نمائیم خارج قسمت عبارت است از:

$x^2 - 3x + 2$ (3	$x^2 + 3x - 2$ (1
$x^2 + 3x + 2$ (4	$x^2 - 3x - 2$ (2

111. هرگاه پولینوم $5x^3 - 3x + 7$ را بالای پولینوم $x + 4$ تقسیم نمائیم باقیمانده عبارت است از:

-301 (4	-302 (3	302 (2	301 (1
-----------	-----------	----------	----------

112. پولینوم $P(x) = x^2 - 7x + 12$ به قیمت $x = -2$ مساوی است به:

60 (4	45 (3	30 (2	15 (1
---------	---------	---------	---------

113. هرگاه $Q(x - 1) = 3x^2 + 5x - 1$ قیمت $Q(2)$ مساوی است به:

43 (4	42 (3	41 (2	40 (1
---------	---------	---------	---------

114. حاصل افاده $2x - 2\{3x - (2 + x) - 1\} \div 2$ را دریابید.

$3x$ (4	$2x$ (3	3 (2	2 (1
---------	---------	--------	--------

115. افاده $\frac{1}{2}y - 15 \left\{ -2 \left[6 \left(y - \frac{1}{3} - y \right) \right] \right\} \div 3$ را ساده سازید.

3 (4	60 (3	$\frac{y-40}{2}$ (2	$\frac{y+60}{3}$ (1
--------	---------	---------------------	---------------------

116. مجموعه ضرایب پولینوم $P(x) = 6x^2 + 2x - 4$ را بدست آورید.

12 (4	8 (3	4 (2	2 (1
---------	--------	--------	--------

117. مجموعه ضرایب پولینوم $(5x - 3y)^4 + (3x + 2y - 6z)^{106} - (5x - 6y)^{251}$ را بدست آورید.

8 (4	18 (3	17 (2	16 (1
--------	---------	---------	---------

118. هرگاه پولینوم $3x^2 + 5x - 2$ بالای بینوم $x - 1$ تقسیم گردد، باقیمانده را دریافت نمایید.

- 3 (1) 6 (2) 9 (3) 12 (4)

119. $3x^2 - 4x(2 + x) = ?$

- $4x^3$ (1) $-x^2 - 8x$ (2) $-8x$ (3) $-8x^2$ (4)

120. $2x - 3\{-2(x + 1)(x + 2)\} + 6x \div 2 = ?$

- $6x^2 + 23x + 12$ (1) $6x^2 + 12x + 1$ (3)
 $x^2 + 23x + 9$ (2) $6x^2 + 23x - 12$ (4)

121. $10\{-[-(x^2 - 1) + 5] - x(x - 2)\} = ?$

- $20x$ (1) -60 (2) $20(x - 3)$ (3) $x - 3$ (4)

122. $[-4(a - b) - 5] + [(2a + b) - (a - b)] = ?$

- $3(2b - a)$ (1) $6b - 3a - 5$ (2) $-3a$ (3) $2b - a$ (4)

123. در عملیه $(x^3 - 3x^2 + 4x + k) \div (x - 5)$ قیمت k را طوری تعیین کنید که باقیمانده 40 گردد.

- -10 (1) -20 (2) -30 (3) -40 (4)

124. اگر مجموعه ضرایب پولینوم $mx^3 - 8x^2 + 4x + 2m - 1$ عبارت از 10 باشد قیمت m را دریابید.

- 5 (1) 10 (2) 15 (3) 20 (4)

125. به کدام قیمت m باقیمانده عملیه $(m^2x^2 - 5x^2 - 2x + 3) \div (x - 1)$ عدد 12 میشود؟

- 1 (1) 2 (2) 4 (3) 8 (4)

126. به کدام قیمت k پولینوم $(x - 3)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 6k$ میشود؟

- 0 (1) -1 (2) -2 (3) -3 (4)

127. اگر $x - 2$ یک فکتور پولینوم $P(x) = 5x^{2n+3} - 2x^{2n+2} - 4x^{2n+1} - 8x^{2n}$ باشد در آن صورت درجه پولینوم را تعیین نمایید؟

- 1 (1) 3 (2) 5 (3) 6 (4)

128. قیمت افاده $0! + 1! + 2! + 3!$ عبارت است از:

- 6 (1) 6! (2) 10 (3) 10! (4)

129. حاصل افاده $\frac{9!}{7!}$ عبارت است از:

- 72 (1) 63 (2) 54 (3) 45 (4)

130. حاصل افاده $\frac{12!-11!}{12!+11!}$ عبارت است از:

- 11 (1) 13 (2) $\frac{13}{11}$ (3) $\frac{11}{13}$ (4)

131. حاصل افاده ترکیبی $C\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ عبارت است از:

- 10 (1) $\frac{5}{3}$ (2) 5 (3) 1 (4)

132. قیمت افاده ترکیبی $\binom{21}{0} + \binom{21}{1} + \binom{21}{20} + \binom{21}{21}$ عبارت است از:

- 40 (1) 41 (2) 42 (3) 44 (4)

133. حاصل افاده $\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{19}{18} + \binom{20}{19}$ را دریابید.

- 20 (1) 1 (2) 210 (3) 21 (4)

134. حاصل افاده ترکیبی $\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} + \dots + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}$ را دریافت نمایید.

- 20 (1) 0 (2) 1 (3) 2^{20} (4)

135. قیمت ترکیب $\binom{35}{7} + \binom{35}{8}$ کدام است؟

- $\binom{35}{7}$ (1) $\binom{36}{8}$ (2) $\binom{35}{15}$ (3) $\binom{70}{15}$ (4)

136. ترکیب $\binom{52}{28}$ با کدام یک از ترکیب های ذیل مساوی است:

- $\binom{52}{24}$ (1) $\binom{52}{8}$ (2) $\binom{50}{0}$ (3) $\binom{50}{1}$ (4)

137. حاصل افاده ترکیبی $\binom{8}{5} - \binom{8}{3}$ عبارت است از:

- 0 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4)

138. در مطابقت $(x+2)^8$ ضریب حد ششم آنرا دریابید.

- 17 (1) 92 (2) 1792 (3) 1493 (4)

139. حد هشتم مطابقت $(2x - 1)^9$ را دریافت نمائید.

$$-144 \quad (1) \quad -144x^2 \quad (2) \quad 144x^2 \quad (3) \quad 144 \quad (4)$$

140. حالت انکشاف یافته مطابقت $(5x + y^2)^{16}$ دارای چند حد میباشد.

$$14 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 17 \quad (4)$$

141. مجموعه توان های حدود، حالت انکشاف یافته مطابقت $(a + b)^9$ را دریابید.

$$9 \quad (1) \quad 10 \quad (2) \quad 19 \quad (3) \quad 90 \quad (4)$$

142. مجموعه توان های حدود، حالت انکشاف یافته مطابقت $(x^4 + y^7)^3$ را دریابید.

$$12 \quad (1) \quad 11 \quad (2) \quad 132 \quad (2) \quad 66 \quad (4)$$

143. اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد پس قیمت افاده $x^2 + \frac{1}{x^2}$ را دریابید.

$$25 \quad (1) \quad 23 \quad (2) \quad 20 \quad (3) \quad 15 \quad (4)$$

144. اگر $x - \frac{1}{x} = -2$ باشد پس قیمت افاده $x^3 - \frac{1}{x^3}$ را دریابید.

$$-14 \quad (1) \quad -12 \quad (2) \quad 14 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

145. اگر $6x + \frac{1}{3x} = 5$ باشد پس قیمت افاده $36x^2 + \frac{1}{9x^2}$ را دریابید.

$$3 \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad 21 \quad (3) \quad 10 \quad (4)$$

146. اگر $a + b = 8$ و $a - b = 4$ باشد پس قیمت افاده $a^3 - b^3$ را دریابید.

$$208 \quad (1) \quad 108 \quad (2) \quad 308 \quad (3) \quad 216 \quad (4)$$

147. اگر $ab + ac + bc = 26$ و $a + b + c = 9$ باشد پس قیمت افاده

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

$$3 \quad (1) \quad 6 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

148. اگر $m - \frac{1}{m} = 3$ باشد قیمت $m^6 + \frac{1}{m^6}$ را دریابید.

$$919 \quad (1) \quad 1298 \quad (2) \quad 1255 \quad (3) \quad 3456 \quad (4)$$

149. اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد قیمت $x - \frac{1}{x}$ را دریابید.

$$\pm 2\sqrt{2} \quad (1) \quad \pm 2\sqrt{3} \quad (2) \quad \pm 2\sqrt{13} \quad (3) \quad \pm 2\sqrt{5} \quad (4)$$

150. در مطابقت $(1 + mx)^5$ قیمت m را طوری تعیین نمائید که ضریب حد چهارم و پنجم آن با هم مساوی باشد.

1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

151. هرگاه $a + b + c = 10$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 30$ باشد، انگاه قیمت $ab + ac + bc$ چند خواهد بود؟

11 (1) 22 (2) 33 (3) 44 (4)

152. هرگاه $a + b + c = 9$ و $ab + ac + bc = 24$ باشد، قیمت $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ را دریابید.

81 (1) 27 (2) 9 (3) 3 (4)

153. اگر $a + b = 3$ باشد و $a^2 + b^2 = 29$ باشد، شما قیمت $a^3 + b^3$ را دریابید.

117 (1) 120 (2) 128 (3) 111 (4)

154. هرگاه $x + y = 7$ و $x - y = 1$ باشد قیمت $x^4 + y^4$ را دریابید.

256 (1) 81 (2) 337 (3) 335 (4)

155. حاصل افاده $\frac{2^{50}-1}{(1-2^{25})(1+2^{25})}$ را دریابید.

1 (1) -1 (2) -2 (3) 50 (4)

156. ضریب x^2 در انکشاف $\left(x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ کدام است؟

1 (1) $2^4 \cdot \binom{10}{4}$ (2) $2^6 \cdot \binom{10}{4}$ (3) $2^6 \cdot \binom{10}{3}$ (4) $2^7 \cdot \binom{10}{2}$

157. در انکشاف دو جمله یی $(x - \sqrt{x})^{16}$ ضریب جمله x^9 کدام است؟

-189 (1) -120 (2) 120 (3) 189 (4)

158. جمله مستقل از x در انکشاف $\left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)^6$ برابر کدام است؟

12 (1) 15 (2) 18 (3) 25 (4)

159. چند جمله ناطق در انکشاف دو جمله یی $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}$ وجود دارد؟

15 (1) 16 (2) 17 (3) 18 (4)

160. تجزیه افاده الجبری $4x^3 - 10x^2 + 6x$ عبارت است از:

$$\begin{array}{ll} (2x-3)(x-1) & (3) \quad 2x(2x-3) & (1) \\ (2x+3)(x+1) & (4) \quad 2x(2x-3)(x-1) & (2) \end{array}$$

161. تجزیه افاده الجبری $75m^3 - 12m$ عبارت است از:

$$\begin{array}{ll} (5m-2)(5m+2) & (3) \quad 3m(5m+2)(5m+2) & (1) \\ (5m+2)(5m-2) & (4) \quad 3m(5m+2)(5m-2) & (2) \end{array}$$

162. تجزیه افاده الجبری $8x^3 + 27y^3$ عبارت است از:

$$\begin{array}{ll} (2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2) & (3) \quad (2x-3y)(4x^2-6xy+9y^2) & (1) \\ (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2) & (4) \quad (2x+3y)(4x^2+6xy-9y^2) & (2) \end{array}$$

163. تجزیه افاده الجبری $1 - x^2 - y^2 + 2xy$ عبارت است از:

$$\begin{array}{ll} (1+x+y)(1+x+y) & (3) \quad (1-x+y)(1+x-y) & (1) \\ (1-x-y)(1-x-y) & (4) \quad (1-x+y)(1-x-y) & (2) \end{array}$$

164. افاده $27x^3 - 9x^2 - 8y^3 - 4y^2 - 6xy$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{array}{ll} (3x-2y+1)(9x^2+6xy+4y^2) & (3) \quad (3x+2y-1)(9x^2+6xy+4y^2) & (1) \\ (3x-2y-1)(9x^2-6xy-4y^2) & (4) \quad (3x-2y-1)(9x^2+6xy+4y^2) & (2) \end{array}$$

165. افاده $9x^2 - 13x + 4$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{array}{ll} (9x-4)(x-1) & (3) \quad (9x+4)(x+1) & (1) \\ (9x+4)(x-1) & (4) \quad (9x-4)(x+1) & (2) \end{array}$$

166. افاده $a^3b^2 + a^2b^2 + ab^2 + b^2$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{array}{ll} (a+1)(a^2+1) & (3) \quad b^2(a+1)(a^2+1) & (1) \\ b^2(a+1)(a^2+1) & (4) \quad b(a+1)(a-1) & (2) \end{array}$$

167. افاده $a^2 - b^2 - a - b$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{array}{ll} (a+b)(a+b) & (3) \quad (a-b)(a+b) & (1) \\ (a-b)(a-b-1) & (4) \quad (a+b)(a-b-1) & (2) \end{array}$$

168. افاده $a^2x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{array}{llll} \left(ax - \frac{1}{4}\right)^3 & (4) & \left(ax - \frac{1}{4}\right)^2 & (3) \quad \left(ax + \frac{1}{4}\right)^3 & (2) \quad \left(ax + \frac{1}{4}\right)^2 & (1) \end{array}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

169. افاده $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + 2abc$ را تجزیه نمائید.

$$\begin{array}{ll} (a+b)(a+c) & (3) \quad b(a+c)(a+b+c) & (1) \\ b(a-c)(a-b-c) & (4) \quad a(b+c)(a+b+c) & (2) \end{array}$$

170. شکل تجزیه شده افاده $2a^2 - b^2 + ab - ac - bc$ را دریابید.

$$\begin{array}{ll} (a+b)(2a-b-c) & (3) \quad (a-b)(2a+b+c) & (1) \\ (a+b)(2a+b+c) & (4) \quad (a-b)(2a-b-c) & (2) \end{array}$$

171. شکل تجزیه شده افاده $(x^2 + x - 3)(x^2 + x + 5) + 7$ را دریابید.

$$\begin{array}{ll} (x+2)(x-1) & (3) \quad (x-1)(x^2+x+4) & (1) \\ (x-2)(x+1)(x^2-x-4) & (4) \quad (x+2)(x-1)(x^2+x+4) & (2) \end{array}$$

172. شکل تجزیه شده افاده $x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 20x + 25$ را دریابید.

$$\begin{array}{ll} (x^2 - 2x - 5)^2 & (3) \quad (x^2 + 2x + 5)^2 & (1) \\ (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2) & (4) \quad (x^2 + 3)(x^2 - x + 1) & (2) \end{array}$$

173. حجم یک مکعب مستطیل به $\frac{1}{8}27x^3 - \frac{1}{8}$ نشان داده شده است، اگر ارتفاع آن $3x - \frac{1}{2}$ باشد،

مساحت قاعده مکعب مستطیل چند است؟

$$\begin{array}{llll} 9x^2 - \frac{3}{2}x & (4) \quad 9x^2 + \frac{1}{4} & (3) \quad 9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} & (2) \quad 3x^2 + \frac{1}{2} & (1) \end{array}$$

174. بزرگترین قاسم مشترک افاده های $4x^2y$ و $6x - 8ax^2$ را دریافت نمائید.

$$\begin{array}{llll} 2x & (4) \quad 3ax & (3) \quad 2x - y & (2) \quad 2xy & (1) \end{array}$$

175. بزرگترین قاسم مشترک افاده های $x^2 - y^2$ و $2x - 2y$ را دریافت نمائید.

$$\begin{array}{llll} 2x - 2y & (4) \quad x - y & (3) \quad 2x - y & (2) \quad x + y & (1) \end{array}$$

176. کوچکترین مضرب مشترک افاده های $5a^2$ ، $3ab$ و $4b^2$ را دریافت نمائید.

$$\begin{array}{llll} 15a^2b^2 & (4) \quad 60a^2b^2 & (3) \quad 30a^2b^2 & (2) \quad 60ab & (1) \end{array}$$

177. کوچکترین مضرب مشترک افاده های $4ab$ و $2a + b$ را دریافت نمائید.

$$\begin{array}{ll} 4ab(2a+b) & (3) \quad 4a+b & (1) \\ ab(4a+b) & (4) \quad 8a^2b+b & (2) \end{array}$$

178. کسر $\frac{x-2}{x+2}$ با کدام یکی از کسر های ذیل معادل است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{(x-2)^2}{x+2} & (4) \quad \frac{(x-2)^2}{x^2-4} & (3) \quad \frac{x^2-4}{x^2+4} & (2) \quad \frac{x^3-8}{x^2-4} & (1) \end{array}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

179. شکل ساده کسر الجبری $\frac{5x^2+15x}{x^2+3x}$ را دریابید.

(1) 3 (2) 5 (3) 15 (4) $5x$

180. شکل ساده کسر الجبری $\frac{x^{2n}-3x^n-10}{x^{2n}-4x^n-5}$ را دریابید.

(1) $\frac{x^n+2}{x^{n+1}}$ (2) $\frac{x^n-2}{x^{n+2}}$ (3) $\frac{x-2}{x+2}$ (4) $\frac{x^n+2}{x^n-2}$

181. حاصل کسر های $\frac{4x}{2x-1} - \frac{5x+1}{2x-1} + \frac{x}{2x-1}$ را دریابید.

(1) $\frac{1}{2x-1}$ (2) $2x-1$ (3) $-\frac{1}{2x-1}$ (4) $2x+1$

182. حاصل کسر های $\frac{x^2+3x+4}{x^2} - \frac{x-2}{x^2-1}$ را دریابید.

(1) $\frac{x^4+2x^3+5x^2-3x-4}{x^4-x^2}$ (2) $\frac{x^4+2x^3+5x^2-3x-4}{x^2-x-1}$
(3) $\frac{x^4+2x^3+5x^2-3x-4}{x-1}$ (4) $\frac{x^4+2x^3+5x^2-3x-4}{x^4-x}$

183. حاصل ضرب کسر های $\frac{3x^3}{12x^2y} \cdot \frac{2y^2}{5ax}$ را دریابید.

(1) $10a$ (2) y (3) $10ay$ (4) $\frac{y}{10a}$

184. حاصل ضرب کسر های $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ را دریابید.

(1) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ (2) $\frac{x^2+x+2}{x^2+x+2}$ (3) x^2-x-2 (4) $\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}$

185. حاصل تقسیم کسر های $\frac{4a^2x}{15bc^2} \div \frac{2a^2x}{25bc^2}$ را دریابید.

(1) $10b$ (2) $\frac{10}{3}$ (3) $3c$ (4) $\frac{3c}{10b}$

186. حاصل تقسیم کسر های $\frac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2} \div \frac{x^2+y^2}{x+y}$ را دریابید.

(1) $x+y$ (2) $-x-y$ (3) $x-y$ (4) $y-x$

187. شکل ساده کسر الکسر $\frac{a}{a-\frac{a+b}{2}} + \frac{b}{b-\frac{a+b}{2}}$ عبارت است از:

(1) 1 (2) $a-1$ (3) 2 (4) $\frac{a}{b}$

188. شکل ساده کسر الکسر $\left(\frac{x}{2} - 1\right) : \left(\frac{\frac{x^2-2}{\frac{x}{2}+1}\right)$ عبارت است از:

(1) $x - 2$ (2) $\frac{2}{x}$ (3) 1 (4) 2

189. شکل ساده کسر $\frac{x+4+\frac{4}{x}}{x+1-\frac{2}{x}}$ عبارت است از:

(1) $\frac{x}{x-1}$ (2) $x + 1$ (3) $\frac{x-2}{x+1}$ (4) $\frac{x+2}{x-1}$

190. شکل ساده کسر $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} : \frac{b+\frac{a^2}{b}+a}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ را دریافت نمائید.

(1) a (2) b (3) $a - b$ (4) $a + b$

191. شکل ساده کسر $\frac{a^2-1}{a^5-a^3} : \frac{1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}{1+2a+a^2}$ را دریافت نمائید.

(1) a (2) $\frac{1}{a(a+1)}$ (3) $\frac{a}{a+1}$ (4) $\frac{a^2}{a-1}$

192. عبارت $\frac{1}{(p+q)^3} \left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right) + \frac{3}{(p+q)^4} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{6}{(p+q)^5} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$ را ساده سازید.

(1) $p^3 q^3$ (2) pq (3) $\frac{1}{p^3 q^3}$ (4) $(p+q)^3$

193. عبارت $\left(\frac{x^4-16}{x^2+4} : \frac{x^2-9}{x-3}\right) \cdot \frac{x^2+3x}{x}$ را ساده سازید.

(1) $x^2 - 1$ (2) x^2 (3) $x^2 - 4$ (4) $x^2 + 1$

194. افاده کسری $\frac{x^2-2x}{2x+6} \cdot \frac{x^2+x-6}{x^2-5x} : \frac{x^2-2x}{6x-30}$ را ساده سازید.

(1) $\frac{x-6}{x}$ (2) $\frac{3x-6}{x}$ (3) $x + 6$ (4) $\frac{x-2}{2x}$

195. افاده کسری $\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right)$ را ساده سازید.

(1) x (2) $\frac{1}{x+1}$ (3) $\frac{4}{x+1}$ (4) 4

196. افاده کسری $\left(\frac{x^4-y^4}{2x}\right) \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}\right)$ را ساده نمائید.

(1) $x + y$ (2) $x^2 - y^2$ (3) $\frac{-y(x^2+y^2)}{x}$ (4) $x^2 + y^2$

197. حاصل $\frac{x-\frac{y}{x}}{y-\frac{x}{y}}$ عبارت است از:

- (1) $\frac{y(x^2+y)}{x(y^2-x)}$ (2) $\frac{y(x^2-y)}{x(y^2-x)}$ (3) $\frac{y(x^2+y)}{x(y^2-x)}$ (4) $\frac{y(x^2+y)}{(y^2+x)}$

198. حاصل $\frac{1+\frac{1}{x-y}}{1-\frac{1}{x-y}}$ عبارت است از:

- (1) $\frac{y-x}{x-y-1}$ (2) $\frac{x-y-1}{x-y+1}$ (3) $\frac{x-y+1}{x-y-1}$ (4) $\frac{y-x+1}{x-y}$

199. حاصل $\frac{a+1}{a-1} \div \frac{1+\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}$ عبارت است از:

- (1) 1 (2) $a-1$ (3) $a+1$ (4) -1

کلید جوابات

شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب
1	4	11	4	21	2	31	1	41	4
2	3	12	1	22	4	32	4	42	1
3	2	13	3	23	1	33	3	43	3
4	1	14	1	24	4	34	3	44	1
5	2	15	1	25	4	35	3	45	3
6	4	16	4	26	4	36	4	46	3
7	3	17	3	27	3	37	4	47	2
8	3	18	2	28	2	38	4	48	3
9	3	19	1	29	1	39	2	49	2
10	1	20	2	30	1	40	1	50	4

شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب
51	1	61	4	71	4	81	1	91	1
52	3	62	2	72	1	82	1	92	3
53	4	63	3	73	3	83	2	93	2
54	2	64	3	74	3	84	4	94	4
55	2	65	3	75	1	85	1	95	3
56	2	66	4	76	4	86	3	96	1
57	4	67	1	77	3	87	3	97	4
58	1	68	2	78	3	88	3	98	3
59	1	69	4	79	3	89	4	99	4
60	2	70	3	80	1	90	4	100	3

شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب
101	1	111	4	121	3	131	1	141	1
102	2	112	2	122	2	132	4	142	4
103	3	113	2	123	3	133	3	143	2
104	1	114	2	124	1	134	4	144	1
105	3	115	2	125	3	135	2	145	3
106	3	116	2	126	4	136	1	146	1
107	2	117	3	127	3	137	1	147	1
108	1	118	2	128	3	138	3	148	2
109	3	119	2	129	1	139	2	149	2
110	1	120	1	130	4	140	4	150	2

شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب	شماره	جواب
151	3	161	2	171	2	181	3	191	1
152	1	162	4	172	1	182	1	192	3
153	1	163	1	173	2	183	4	193	3
154	3	164	2	174	4	184	1	194	2
155	2	165	3	175	4	185	2	195	4
156	2	166	1	176	3	186	3	196	3
157	3	167	2	177	3	187	3	197	2
158	2	168	1	178	3	188	4	198	3
159	3	169	1	179	2	189	4	199	1
160	2	170	3	180	1	190	1	200	

سوالات کانکور

1. قیمت $\frac{(8-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}+4)}{(7+\frac{5}{6})+(6+\frac{1}{6})}$ مساوی است به:

(1) $\frac{7}{5}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $\frac{5}{8}$ (4) -1

2. قیمت عددی $\frac{\frac{1}{5}:(\frac{1}{10}-\frac{1}{5})}{\frac{2}{5}:(0.2-0.4)}$ مساوی است به:

(1) -5 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) 2

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

3. قیمت افاده $\frac{(2-1\frac{1}{3})(3-2\frac{1}{4})}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\dots(1-\frac{1}{10})}$ عبارت است از:

- (1) $\frac{1}{5}$ (2) 5 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 2

4. عدد $\frac{(\frac{1}{2}-5)+(\frac{1}{3}-3)}{(2-\frac{5}{6})(\frac{3}{2}-3)}$ عبارت است از:

- (1) $\frac{43}{10}$ (2) $\frac{86}{21}$ (3) $\frac{43}{11}$ (4) $\frac{86}{23}$

5. حاصل افاده $(\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times 0.05) \div 0.29$ مساوی میشود به:

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) 2 (3) 4 (4) 1

6. عدد $(\frac{1}{2} + 0.5) \div 10$ مساوی است به:

- (1) 1 (2) 10 (3) 0.1 (4) 0.5

7. افاده $\frac{0.02}{1.4} + \frac{0.21}{0.7} - \frac{0.36}{2.1}$ مساوی میشود به:

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{7}$

8. حاصل عدد $\frac{1.\bar{1}}{1.1} + \frac{0.1}{0.\bar{1}}$ مساوی است به:

- (1) $\frac{1891}{990}$ (2) $\frac{991}{990}$ (3) $\frac{990}{1890}$ (4) $\frac{995}{1890}$

9. کسر $\frac{0.272}{0.0005}$ مساوی با کدام عدد ذیل است:

- (1) 1360 (2) 544 (3) 5.44 (4) 13.60

10. عدد $400 - 0.001 : (2.397 + 0.3 \times 0.01)$ مساوی است به:

- (1) 2000 (2) 2380 (3) 2390 (4) 2397

11. عدد $\frac{5}{8} + \frac{1+\frac{2}{3}}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}$ مساوی است با:

- (1) 1 (2) 2 (3) $\frac{5}{6}$ (4) $\frac{1}{2}$

12. اگر عدد مثبتی باشد کوچکترین عنصر ست $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{5}, \frac{a}{7}\right)$ عبارت است از:

$\frac{a}{2}$ (1) $\frac{a}{3}$ (2) $\frac{a}{5}$ (3) $\frac{a}{7}$ (4) ④

13. قیمت مطلق $|1 - 2\sqrt{3}|$ به کدام عدد ذیل مساوی است:

$-1 - 2\sqrt{3}$ (1) $2\sqrt{3} + 1$ (2) $-2\sqrt{3} + 1$ (3) $2\sqrt{3} - 1$ (4) ④

14. قیمت عدد $|3 - 2\sqrt{3}| + |4 - 2\sqrt{3}|$ عبارت است از:

1 (1) -1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $17 - 4\sqrt{3}$ (4) ①

15. افاده $|4 - \sqrt{8}| + |2 - \sqrt{8}|$ عبارت است از:

1 (1) 2 (2) $6 - 4\sqrt{2}$ (3) 0 (4) ②

16. اگر عدد x به شکل علمی نوشته شود یعنی $x = a \cdot 10^n$ پس:

$n \in IR$ (1) $n \in IR^+$ (2) $n \in (-1, 1)$ (3) $n \in Z$ (4) ④

17. اگر x به شکل علمی نوشته شود یعنی پس a باید کدام یکی از شرط های ذیل را صدق کند:

$1 < a < 10$ (1) $1 \leq a < 10$ (2) $0 < a < -1$ (3) $a > 10$ (4)

18. $x = 3145$ به شکل علمی عبارت است از:

$x = 31.45 \cdot 10^2$ (1) $x = 31.45 \cdot 10^{-2}$ (3) $x = 31.45 \cdot 10^3$ (2) $x = 31.45 \cdot 10^{-3}$ (4)

19. $x = 234000$ به شکل علمی عبارت است از:

$x = 23.4 \cdot 10^4$ (1) $x = 2.34 \cdot 10^{-5}$ (2) $x = 23.4 \cdot 10^{-4}$ (3) $x = 2.34 \cdot 10^5$ (4) ④

20. $x = 0.0003$ به شکل علمی عبارت است از:

$x = 3 \cdot 10^3$ (1) $x = 3 \cdot 10^4$ (2) $x = 3 \cdot 10^{-4}$ (3) $x = 3 \cdot 10^{-3}$ (4)

21. $x = 0.342$ به شکل علمی عبارت است از:

$x = 3.42 \cdot 10^1$ (1) $x = 3.42 \cdot 10^2$ (2) $x = 3.42 \cdot 10^{-1}$ (3) $x = 3.42 \cdot 10^{-2}$ (4)

22. افاده $\left(\frac{x^{-2}y}{x^{-1}}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$ مساوی است به:

(1) $\frac{x^3}{y}$ (2) $\frac{x^3}{y^2}$ (3) $\frac{x^2}{y^2}$ (4) $-\frac{x^3}{y}$

23. افاده $\left(\frac{x^{-2}y}{x^{-1}}\right)^{-2} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$ مساوی است به:

(1) -1 (2) $\frac{x^3}{y^2}$ (3) $\frac{x^2}{y^2}$ (4) 1

24. قیمت عددی $\left[(4^{-1} + 2^{-1})^{-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{-2}$ عبارت است از:

(1) $\frac{16}{9}$ (2) $\frac{9}{16}$ (3) $\frac{9}{64}$ (4) $\frac{64}{9}$

25. قیمت عددی افاده $\frac{2^{24}(3^{44}-3^{22})}{6^{22}(3^{11}+1)(3^{11}-1)}$ مساوی است به:

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

26. قیمت افاده $\frac{(0.000125 \times 10^{47}) - (0.61 \times 10^{43})}{(1.5 \times 10^{42}) - (0.7 \times 10^{42})}$ عبارت است از:

(1) 8 (2) 16 (3) 32 (4) 8×10^{42}

27. قیمت عددی $(9.42 + 4.2)^2 - 4 \times (9.2) \times (4.2)$ چند است:

(1) 4 (2) 9 (3) 16 (4) 25

28. قیمت افاده $\left(x^{\frac{1}{2}}y^3\right)^2 \left[(-3x^2y^3)^2 - \frac{1}{3}\right]^0$ مساوی است به:

(1) $x^{10}y^{10}$ (2) x^2y^5 (3) x^4y^{15} (4) xy^6

29. قیمت افاده $\left(\frac{x^{-2}y^{-1}}{y^{-2}x^{-1}}\right)^5 [(-3x^2y^3)^2]^0$ مساوی است به:

(1) $\left(\frac{x}{y}\right)^5$ (2) $\left(\frac{y}{x}\right)^5$ (3) $\left(\frac{1}{x}\right)^5$ (4) $\left(\frac{y}{x^2}\right)^5$

30. قیمت افاده $\frac{9^{n-2}}{3^{2n-1}} + \frac{3^{m-1}}{3^m}$ عبارت است از:

(1) $\frac{23}{11}$ (2) $\frac{11}{23}$ (3) $\frac{10}{27}$ (4) $\frac{27}{10}$

31. افاده $(x^{-2}y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ مساوی است به:

$\frac{x}{y}$ (1) $\frac{y}{x}$ (2) xy (3) $-xy$ (4)

32. عدد $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) (2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}})$ مساوی است به:

18 (1) 27 (2) 36 (3) 9 (4)

33. افاده جذری $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$ مساوی است به:

$\sqrt{6}+1$ (1) $\sqrt{6}-1$ (2) $\frac{\sqrt{6}-1}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{6}+1}{4}$ (4)

34. افاده $\frac{\sqrt[3]{a^4b^3c^5}}{\sqrt[3]{ab^2c^2}}$ مساوی میشود به:

a^2b^2 (1) $ca\sqrt[3]{b}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ (3) $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ (4)

35. افاده جذری $\sqrt[3]{x}$: $\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^{20}}}$ مساوی است به:

$\sqrt[3]{x}$ (1) 1 (2) x^3 (3) $x^{\frac{1}{2}}$ (4)

36. قیمت افاده $\frac{\sqrt{2.7}+\sqrt{5.4}}{\sqrt{0.1}+\sqrt{0.4}}$ عبارت است از:

4 (1) 3 (2) 2 (3) 1 (4)

37. عدد $\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}$ مساوی است به:

2 (1) 1 (2) $\sqrt[8]{8}$ (3) $4\sqrt[3]{4}$ (4)

38. افاده جذری $\left[(\sqrt[3]{3})^{\sqrt{3}} \right]^{-2\sqrt{3}}$ مساوی است به:

$\frac{1}{8}$ (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4)

39. افاده جذری $\sqrt{0.25} + \sqrt{1.21} + \sqrt{1.44}$ مساوی است به:

2.8 (1) 4.8 (2) 2.4 (3) 4.2 (4)

40. افاده جذری $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ مساوی است به:

$\sqrt{2}$ (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (4)

41. اگر در یک پولینوم تمام توان های یک مجهول از توان بزرگتر تا به صفر موجود باشند آنرا یک پولینوم:

1 کامل گویند (2) منظم گویند (3) ناقص گویند (4) غیر منظم گویند

42. کدام یک از افاده های ذیل پولینوم گفته میشود؟

$x^2 - 5x + 6$ (1) $x^2 - 5x - 6$ (2) $x^{\frac{2}{3}} - 5x - 6$ (3) $x^2 - 5\sqrt{x} + 6$ (4)

43. قیمت پولینوم $P(x) = 4x^5 - 3x^2 + x + 2$ در $x = 0$ عبارت است از:

$P(0) = 4$ (1) $P(0) = -4$ (2) $P(0) = 2$ (3) $P(0) = -2$ (4)

44. درجه پولینوم $P(x) = 2 - 3x^2 + 5x^4 + x$ عبارت است از:

4 (1) -4 (2) 6 (3) -6 (4)

45. درجه پولینوم $P(x) = (x^2 - 4)^3$ چند است:

4 (1) 2 (2) 6 (3) 3 (4)

46. درجه پولینوم $P(x) = 4x^2 - x^3 - 7x$ مساوی است به:

2 (1) -2 (2) 3 (3) -3 (4)

47. در پولینوم $P(x) = x^3 - ax^2 + bx + 7$ ، $P(2) = 0$ و $P(1) = 4$ است. قیمت a عبارت است از:

$\frac{1}{2}$ (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) 4 (4)

48. باقیمانده تقسیم پولینوم $P(x)$ بر $x - 4$ مساوی به 3 است و باقیمانده تقسیم پولینوم $Q(x)$ بر $x - 4$ مساوی به 4 میباشد. باقیمانده پولینوم $x^2 + 2x + (x + 1) \cdot Q(x) + x \cdot P(x)$ عبارت است از:

56 (1) 48 (2) 46 (3) 44 (4)

49. اگر پولینوم $x^2 - x - 2 = 0$ باشد آنگاه قیمت عددی $x^4 - 2x^3 + x^2$ عبارت است از:

2 (1) 3 (2) 4 (3) 6 (4)

50. حاصل ضرب $(5xy^2)(2x^{-2}y^{-1})$ مساوی میشود به:
- (1) $\frac{10x}{y}$ (2) $\frac{10y}{x}$ (3) $10xy$ (4) $10x^2y$
51. اگر $y^2 - y - 1$ یکی از عامل های $y^4 - 3y^3 + 1$ باشد عامل دیگر آن عبارت است از:
- (1) $y^2 - y - 1$ (2) $y^2 + y - 1$ (3) $y^2 + y + 1$ (4) $y^2 - y + 1$
52. افاده $(12xy - 11.5xy) \div (8x - 7.5x)$ مساوی است به:
- (1) $2y$ (2) y (3) xy (4) x
53. اگر افاده $P(x) = ax^4 + bx^2 - 9x + 12$ بالای $x^2 - 2x + 1$ پوره تقسیم شود قیمت $a + b$ عبارت است از:
- (1) -4 (2) 3 (3) -3 (4) 2
54. هرگاه پولینوم $P(x)$ دارای خاصیت $P(2) = 0 = (3)$ باشد، بر کدام افاده قابل تقسیم است:
- (1) $x^2 - 5x + 6$ (2) $x^2 + 5x + 6$ (3) $x^2 - 5x - 6$ (4) $x^2 + 5x - 6$
55. اگر پولینوم $P(2x + 1)$ بر افاده $x - 2$ پوره قابل تقسیم باشد، در این صورت کدام یک از جوابات ذیل درست است:
- (1) $P(5) = 0$ (2) $P(2) = 0$ (3) $P(-\frac{1}{2}) = 0$ (4) $P(-2) = 0$
56. اگر $P(x) = 6x^2 + 4x + 3 + b$ و $P(x) = (x - 1) \cdot Q(x) + 27$ باشد، آنگاه قیمت b عبارت است از:
- (1) 12 (2) 13 (3) 14 (4) 15
57. هرگاه در اثر تقسیم پولینوم $P(x)$ بر $Q(x)$ خارج قسمت $2x - 1$ و باقیمانده عدد 1 باشد، بین آنها کدام رابطه زیر درست است:
- (1) $P(x) = Q(x)(2x - 1) + 1$ (2) $P(x) = Q(x)(2x) - 1$ (3) $P(x) = Q(x)(x - 1) + 1$ (4) $P(x) = Q(x)(2x - 1) - 1$
58. اگر $x^3 + ax^2 + bx + c = (x + 2)(x - 3)(x - 1)$ باشد در این صورت قیمت $\frac{c}{a}$ مساوی است به:
- (1) 3 (2) -3 (3) 2 (4) -2
59. کدام یکی از مساوات های ذیل مطابقت گفته میشود:
- (1) $(x - 1)^3 = x^2 - 2x + 1$ (2) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ (3) $7x^2 - 4 = 12 - x$ (4) $6 + 4x = 5x - 6$

60. شکل انکشاف یافته $(a + b)^n$ چند حد دارد:
- (1) n حد (2) $n - 1$ حد (3) $n + 1$ حد (4) $2n$ حد
61. حاصل جمع ضرایب حدود انکشاف یافته بینوم $(2x + 1)^3$ مساوی است به:
- (1) 52 (2) 24 (3) 27 (4) 20
62. مجموعه ضرایب حالت انکشاف یافته بینوم $\left(\frac{4}{x} - x\right)^4$ مساوی میشود به:
- (1) 27 (2) 81 (3) 625 (4) -625
63. حد ششم بینوم $(2x + 1)^5$ مساوی است به:
- (1) 2 (2) 4 (3) $10x$ (4) 1
64. اگر به بینوم $(1 + x^2)^3$ انکشاف داده شود در این صورت حد چهارم آن مساوی میشود به:
- (1) x^3 (2) x^6 (3) x^5 (4) 2
65. حد درجه سوم بینوم $(1 + 2x)^4$ مساوی است به:
- (1) $24x^2$ (2) $8x^2$ (3) $32x^3$ (4) $16x^4$
66. عدد $\frac{10! - 5 \cdot 9!}{45 \cdot 8!}$ مساوی است به:
- (1) 15 (2) 5 (3) 1 (4) 3
67. افاده ترکیبی $\binom{6}{3}$ مساوی است به:
- (1) 25 (2) 22 (3) 20 (4) 24
68. شکل ساده حاصل ضرب مطابقت $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ عبارت است از:
- (1) $a^3 - b^3$ (2) $a^3 + b^3$ (3) $a^2 - b^2$ (4) $a^2 + b^2$
69. افاده $(x - 1 - y)(x - 1 + y)$ مساوی است به:
- (1) $(x - 1)^2 + y$ (2) $(x - 1)^2 - y^2$ (3) $y - (x - y)^2$ (4) $(x - y)^2 - y$
70. قیمت افاده $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ عبارت است از:
- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (4) $2\sqrt{2}$

71. قیمت افاده $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2 - \sqrt{2}}\right)$ عبارت است از:

- ① $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) 1 (4) $\sqrt{2}$

72. تجزیه افاده $4a - 5a^2$ به فکتور های عبارت است از:

- (1) $4 - 5a$ (2) $(4 - 5a)a$ (3) $(4 + 5a)a$ (4) $-a(4 + 5a)$

73. تجزیه سه حده یی $3x^2 + 5x + 2$ به فکتور ها عبارت است از:

- (1) $(x - 1)(3x + 2)$ (2) $(x + 1)(3x - 2)$ (3) $(x + 1)(3x + 2)$ (4) $(x - 1)(3x - 2)$

74. تجزیه افاده $a^4 + a^2b^2 + b^4$ عبارت است از:

- ① $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$ (2) $(a^2 - b^2 + ab)(a^2 - b^2 - ab)$ (3) $(a^2 - b^2 + ab)(a^2 + b^2 + ab)$ (4) $(a^2 + b^2 - ab)(a^2 - b^2 - ab)$

75. تجزیه افاده $y^2 - 3x^2$ عبارت است از:

- (1) $(y - \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)$ (2) $(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)$ (3) $(y + \sqrt{3}x)^2$ (4) $(y + \sqrt{3}x)(y + x)$

76. افاده $x^3 - 2x^2y + xy^2$ به صورت تجزیه شده عبارت است از:

- (1) $x(x + y)^2$ (2) $x(x - y)(x + y)$ (3) $x(x - y)^2$ (4) $(x - y)(x + y)$

77. تجزیه افاده $4x^2 - 5y^2$ به فکتور های عبارت است از:

- ① $(2x - \sqrt{5}y)(2x + \sqrt{5}y)$ (2) $(2x + \sqrt{5}y)(\sqrt{5}y - 2x)$ (3) $(2x - \sqrt{5}y)(\sqrt{5}y - 2x)$ (4) $(\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{5}y + \sqrt{2}x)$

78. تجزیه افاده $2ax + bx - 2ay - cx + cy$ قرار ذیل است:

- ① $(2a + b - c)(x - y)$ (2) $(2a + b - c)(x + y)$ (3) $(2a + b + c)(x - y)$ (4) $(2a - b + c)(x + y)$

79. افاده $\frac{x}{mk} - \frac{y}{nk} - \frac{x}{mp} + \frac{y}{np}$ مساوی است به:

- (1) $\left(\frac{x}{k} - \frac{y}{p}\right) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$ (2) $\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right)$ (3) $\left(\frac{x}{k} - \frac{y}{p}\right) \left(\frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right)$ (4) $\left(\frac{x}{k} - \frac{y}{p}\right) \left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n}\right)$

80. افاده $x^{16} - 1$ به صورت تجزیه شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} (1) & (x-1)(x+1)(1+x^2)(1-x^4)(1+x^8) \\ (2) & (x-1)(x+1)(1-x^2)(1+x^4)(1+x^8) \\ (3) & (x-1)(x+1)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \\ (4) & (x-1)(x+1)(1+x^2)(1+x^4)(1-x^8) \end{aligned}$$

81. تجزیه افاده $16y^2 - 4x^2$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} (1) & (4y-2x)(4y+2x) \\ (2) & (4y-2)(4y+2) \\ (3) & (4y+2x)(4y+2x) \\ (4) & (4y-x)(4y+x) \end{aligned}$$

82. تجزیه افاده $(x+y)^3 - x^3$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} (1) & y(3x^2 + 3xy + y^2) \\ (2) & (x+y)(3x^2 + 3xy + y^2) \\ (3) & (x^2 + 2xy)(2x + y) \\ (4) & y(2x^2 + 2xy + y^2) \end{aligned}$$

83. افاده $\frac{a^3 - ab^2 + b^2 - a^2}{a^3 - a^2b - 2a^2 + 2ab + a - b}$ مساوی است به:

$$\begin{aligned} (1) & \frac{a+b}{a-1} \\ (2) & \frac{a-b}{a+1} \\ (3) & \frac{a-b}{a+b} \\ (4) & \frac{a-1}{a-b} \end{aligned}$$

84. بزرگترین قاسم مشترک عبارت های $49a^4x^3$ ، $35a^2x^4$ و $28a^3x$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} (1) & 5xa^2 \\ (2) & 7xa^2 \\ (3) & 5ax^2 \\ (4) & 7ax^2 \end{aligned}$$

85. بزرگترین قاسم مشترک عبارت های a^3b^3 ، a^2b^4c و $a^4b^3c^2$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} (1) & a^2b^3c \\ (2) & a^2b^3 \\ (3) & b^2a^3c \\ (4) & b^2a^3 \end{aligned}$$

86. افاده $\frac{21(x+y)(x-y)^2}{3(x^2-y^2)}$ مساوی است به:

$$\begin{aligned} (1) & 7(x-y) \\ (2) & x+y \\ (3) & 2x+2y \\ (4) & 2x-2y \end{aligned}$$

87. شکل ساده افاده $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ مساوی است به:

$$\begin{aligned} (1) & 2x+1 \\ (2) & x+1 \\ (3) & x^2-x+1 \\ (4) & x-1 \end{aligned}$$

88. شکل ساده افاده $\frac{yx^3+y}{yx^2-xy+y}$ مساوی است به:

$$\begin{aligned} (1) & x-1 \\ (2) & 2x+1 \\ (3) & x^2-2x+1 \\ (4) & x+1 \end{aligned}$$

89. حاصل عبارت $\frac{a^3-b^3}{a^2b+ab^2+b^3} \cdot \frac{2b^2+2ab}{a^2-b^2}$ مساوی است به:

$$\begin{aligned} (1) & 2 \\ (2) & 3 \\ (3) & 4 \\ (4) & 5 \end{aligned}$$

تهیه و ترتیب: استاد نجیب الله خوستی "ودان"

90. افاده $\frac{a^2}{x^3y^3}$: $\left(\frac{x^2y^3}{a}\right)^{-1}$ مساوی است به:

$\frac{y}{a}$ (4) $\frac{x}{a}$ (3) a (2) $-a$ (1)

91. افاده $\frac{2b^2+2ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2b+ab^2+b^3}$ مساوی است به:

5 (4) 4 (3) 3 (2) 2 (1)

92. عدد $\frac{(a^{-1}+b^{-1})^{-1}}{(a+b)^{-1}}$ مساوی است به:

$\frac{b}{a}$ (4) $\frac{a}{b}$ (3) ab (2) $(ab)^{-1}$ (1)

93. افاده $\frac{2xy^2-6x^2y}{3x-y} \div \frac{y}{x}$ مساوی است به:

$-2x^2$ (4) $2x^2$ (3) $-\frac{2y}{x}$ (2) -2 (1)

94. شکل ساده افاده $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}y+y^{1-x}}$ مساوی است به:

$\frac{1}{xy}$ (4) x^2y^2 (3) xy (2) 1 (1)

95. در صورت کسر $\frac{?}{x^2-25}$ کدام افاده زیر را قرار دهیم تا مساوی به کسر $\frac{1}{x+5}$ شود.

x^2-25 (4) $x+25$ (3) $x-5$ (2) $x+4$ (1)

96. افاده جذری $\frac{7}{3-\sqrt{2}}$ مساوی است به:

$3+\sqrt{2}$ (4) $3-\sqrt{2}$ (3) $7(3+\sqrt{2})$ (2) $7(3-\sqrt{2})$ (1)

97. افاده جذری $\frac{5}{(\sqrt{6}-1)}$ مساوی است به:

$\frac{\sqrt{6}+1}{7}$ (4) $\frac{\sqrt{6}-1}{4}$ (3) $\sqrt{6}-1$ (2) $\sqrt{6}+1$ (1)

98. اگر $x = \sqrt{5} + 2$ و $y = \sqrt{5} - 2$ باشد آنگاه قیمت $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ عبارت است از:

18 (4) 16 (3) 14 (2) 12 (1)

99. عدد $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ مساوی است به:

$5-2\sqrt{6}$ (4) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (3) $5+2\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (1)