

ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد و مدیریت

✓ چاپ دوم با تجدید نظر و اضافات
✓ به انضمام ۴۸۴ مسئله حل شده

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

تألیف: فرزاد کریمی - محمد مهدی زاده

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد و مدیریت

« چاپ دوم با تجدید نظر و اضافات »

* به انضمام ۴۸۴ مسئله حل شده *

تألیف:

فرزاد کریمی - محمد مشهدی زاده

(اعضای هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مبارکه)

کریمی، فرزاد

ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد و مدیریت / مؤلفین: فرزاد کریمی، محمد مشهدی زاده.
- اصفهان: جهاد دانشگاهی، واحد اصفهان، ۱۳۸۲.

ISBN:964-6098-56-8

۳۵۲ص.

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

پشت جلد به انگلیسی: *Mathematics and its Application in Economics and Management*

واژه نامه.

چاپ اول: ۱۳۸۲، چاپ دوم: ۱۳۸۶.

۱. اقتصاد ریاضی ۲. اقتصاد و مدیریت ۳. ریاضیات بازرگانی، الف. مشهدی زاده،

محمد. ب. جهاد دانشگاهی، واحد اصفهان.

۳۳۰/۱۵۴۳

۹ ر ۴ ک / ۱۳۵ HB

۹۲۴۴-۸۲ م

کتابخانه ملی ایران



واحد اصفهان

ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد و مدیریت

مؤلفین: فرزاد کریمی - محمد مشهدی زاده

ناشر: انتشارات جهاد دانشگاهی واحد اصفهان - ۶۶۸۰۰۶۲

نوبت چاپ: دوم، تابستان ۱۳۸۶

حروفچینی: خدمات فرهنگی جهاد دانشگاهی واحد اصفهان

چاپ: ارغوان

صحافی: نوید

تیراژ: ۱۰۰۰ جلد

قیمت: ۳۳۰۰۰ ریال

ISBN:964-6098-56-8

شابک: ۸-۵۶-۶۰۹۸-۹۶۴

مراکزپخش: تهران، کتابیران، ۶۴۹۴۱۷۴ • دانشیران ۶۴۱۶۱۷۶ • ققنوس ۶۴۶۰۰۹۹

شرکت تعاونی ناشران اصفهان ۲۲۱۴۳۵۳

مقدمه ای بر چاپ دوم

استقبال قابل توجه دانش پژوهان، طی نزدیک به سه سال، ازانتشار کتاب حاضر، موجب تجدید چاپ آن گردید. در این راستا، آخرین تغییرات و اصلاحات لازم، با بهره گیری از نظرات و راهنمایی های پراج و سازنده همکاران ارجمند و همچنین دانشجویان عزیز، وبا توجه به مشخص شدن نقاط ضعف کتاب در اثر تدریس آن، اعمال و چاپ دوم با تجدید نظر کلی بصورتی که پیش رو دارید، تدوین شد.

از آنجا که در نگارش اولیه کتاب به جنبه خودآموز بودن آن توجه ویژه ای شده بود، که مورد توجه خاص دانشجویان و اساتید ارجمند نیز قرار گرفت، در چاپ جدید نیز سعی گردید تا ضمن رفع کلیه ایراد های چاپی، برتنوع مسائل کاربردی در مباحث مدیریتی و تعداد مسائل حل شده، افزوده شود.

همچنین فصل ششم(مسائل حل شده) در چاپ دوم حذف و مسائل مربوط به هر فصل در پایان همان فصل بصورت مدون آورده شده است.

امید است که چاپ دوم بتواند نظر اساتید و دانشجویان عزیز را تأمین و همانند چاپ اول مورد استقبال و استفاده قرار گرفته و موجبات تجدید چاپ های آتی را فراهم سازد.

فرزاد کریمی و محمد مشهدی زاده

تابستان ۱۳۸۶

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
پیشگفتار مؤلفین	۱۱
فصل یکم : حساب دیفرانسیل توابع دو متغیره و کاربردهای آن ۱۰۰-۱۳	
۱-۱- مقدمه	۱۳
۱-۲- مفهوم توابع دو متغیره	۱۴
۱-۳- حد در توابع دو متغیره	۱۶
۱-۴- پیوستگی در توابع دو متغیره	۱۷
۱-۵- مشتقات جزئی (نسبی)	۱۹
۱-۶- مشتقات جزئی مرتبه اول	۲۰
۱-۷- مشتقات جزئی مرتبه دوم	۲۴
۱-۸- دیفرانسیل کامل (کلی)	۲۸
۱-۸-۱- دیفرانسیل کامل مرتبه اول	۲۸
۱-۸-۲- دیفرانسیل کامل مرتبه دوم	۳۰
۱-۹- مشتق کامل (کلی)	۳۴
۱-۱۰- مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیره ای مشتق)	۳۵
۱-۱۱- مشتق تابع ضمنی	۳۹
۱-۱۲- توابع همگن و قضیه اویلر	۴۱
۱-۱۲-۱- توابع همگن	۴۱
۱-۱۲-۲- قضیه اویلر	۴۲
۱-۱۳- کاربردهای مشتق در اقتصاد و بازرگانی	۴۵
۱-۱۳-۱- کاربردهای مشتقات جزئی	۴۵
۱-۱۳-۲- کاربرد دیفرانسیل کامل	۵۳

۵۷	۱۴-۱- تعیین ماکزیمم ومی نیمم توابع دومتغیره.....
۶۱	۱۵-۱- طرز تعیین نقاط ماکزیمم ومی نیمم و زینی
۶۱	۱-۱۵-۱- اکسترمم تابع و نقاط بحرانی
۶۲	۱-۱۵-۲- استفاده از تعریف
۶۳	۱-۱۵-۳- تعیین علامت d^2z
۶۴	۱-۱۵-۴- استفاده از دلتا (Δ)
۶۵	۱۶-۱- ماکزیمم و می نیمم مقید
۶۶	۱-۱۶-۱- روش جایگذاری
۶۸	۱-۱۶-۲- روش «لاگرانژ»
۷۳	۱۷-۱- کاربردهای ماکزیمم و می نیمم در اقتصاد و مدیریت
۷۴	۱-۱۷-۱- کاربرد ماکزیمم ومی نیمم در تئوری بنگاه
۷۶	۱-۱۷-۲- می نیمم کردن هزینه نسبت به تولید ثابت
۷۸	۱-۱۷-۳- مدلهای ماکزیمم سود
۷۸	۱-۱۷-۴- کاربرد ماکزیمم و می نیمم در تئوری رفتار مصرف کننده
۷۸	۱۸-۱- مسائل حل شده
۱۹۰-۱۰۱	فصل دوم : انتگرال و کاربردهای آن
۱۰۱	۲-۱- مقدمه
۱۰۲	۲-۲- تعریف تابع اولیه
۱۰۳	۲-۳- تعریف انتگرال نامعین
۱۰۳	۲-۴- خواص انتگرال نامعین
۱۰۴	۲-۵- روش های انتگرال گیری
۱۰۵	۲-۶- فرمول های اساسی انتگرال گیری
۱۱۵	۲-۷- روش تعویض متغیر یا جایگزینی
۱۲۰	۲-۸- روش جزء به جزء
۱۲۶	۲-۹- تفسیر هندسی انتگرال نامعین

۱۲۹	۱۰-۲- مفهوم انتگرال معین
۱۳۰	۱۱-۲- خواص انتگرال معین
۱۴۴	۱۲-۲- کاربرد انتگرال در اقتصاد ، مدیریت و بازرگانی
۱۴۵	۱-۱۲-۲- تابع هزینه کل
۱۴۵	۲-۱۲-۲- تابع درآمد کل
۱۴۶	۳-۱۲-۲- درآمد ملی ، مصرف ملی و پس انداز ملی
۱۴۷	۴-۱۲-۲- انباشت سرمایه
۱۴۷	۵-۱۲-۲- مازاد مصرف کننده
۱۴۹	۶-۱۲-۲- مازاد تولید کننده
۱۵۱	۷-۱۲-۲- پیش بینی مقدار فروش
۱۵۲	۸-۱۲-۲- ارزش سرمایه ای و ارزش فعلی
۱۵۴	۹-۱۲-۲- سرمایه گذاری در خرید تجهیزات
۱۵۷	۱۰-۱۲-۲- جایگزینی وسائل به علت فرسودگی
۱۵۸	۱۱-۱۲-۲- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته
۱۶۱	۱۳-۲- سایر کاربردهای انتگرال در علوم مختلف
۱۶۵	۱۴-۲- مسائل حل شده
۱۹۱-۲۰۲	فصل سوم : بُردارها و جبر برداری
۱۹۱	۱-۳- بردار
۱۹۲	۲-۳- مؤلفه های یک بردار
۱۹۳	۳-۳- بردارهای هم ارز
۱۹۴	۴-۳- جبر برداری
۱۹۴	۱-۴-۳- تساوی دو بردار
۱۹۴	۲-۴-۳- مجموع یا برآیند دو بردار
۱۹۵	۳-۴-۳- تفاضل دو بردار
۱۹۵	۴-۴-۳- ضرب یک عدد در بردار

۱۹۶	۳-۵- خواص جمع بردارها
۱۹۶	۳-۶- بردار یکه و بردار متعامد
۱۹۷	۳-۷- طول یک بردار
۱۹۸	۳-۸- حاصلضرب داخلی یا عددی دو بردار
۱۹۹	۳-۹- خواص ضرب داخلی
۲۰۱	۳-۱۰- وضعیت بردارها نسبت به هم
۲۰۳-۳۳۰	فصل چهارم : ماتریس و دترمینان و کاربردهای آن
۲۰۳	۴-۱- مقدمه
۲۰۴	۴-۲- ماتریس و جبر ماتریسی
۲۰۵	۴-۳- انواع ماتریس ها
۲۰۵	۴-۳-۱- ماتریس ستونی
۲۰۵	۴-۳-۲- ماتریس سطری
۲۰۵	۴-۳-۳- ماتریس صفر
۲۰۵	۴-۳-۴- ماتریس مربع
۲۰۶	۴-۳-۵- ماتریس قطری
۲۰۷	۴-۳-۶- ماتریس اسکالر
۲۰۷	۴-۳-۷- ماتریس یکه یا واحد
۲۰۷	۴-۳-۸- ماتریس مثلثی
۲۰۸	۴-۳-۹- ماتریس ترانهاده یا برگردان
۲۰۹	۴-۳-۱۰- ماتریس متقارن
۲۱۰	۴-۳-۱۱- ماتریس شبه متقارن
۲۱۰	۴-۴- عملیات جبری روی ماتریس ها (جبر ماتریسی)
۲۱۰	۴-۴-۱- حاصل جمع دو ماتریس
۲۱۱	۴-۴-۲- تفاضل دو ماتریس
۲۱۱	۴-۴-۳- ضرب یک عدد در ماتریس

۲۱۲	۴-۴-۴- تساوی دوماتریس.....
۲۱۲	۴-۴-۵- خواص جمع و تفریق ماتریس ها.....
۲۱۶	۴-۵- ضرب دوماتریس.....
۲۲۰	۴-۶- ماتریس متناوب.....
۲۲۱	۴-۷- ماتریس همقوه.....
۲۲۱	۴-۸- ماتریس بی اثر.....
۲۲۷	۴-۹- افراز ماتریس ها.....
۲۳۲	۴-۱۰- دترمینان.....
۲۳۲	۴-۱۱- جمله و مقدار یک دترمینان.....
۲۳۲	۴-۱۲- دترمینان فرعی و همسازه.....
۲۳۳	۴-۱۳- محاسبه مقدار دترمینان.....
۲۳۶	۴-۱۴- ماتریس منفرد و غیرمنفرد.....
۲۳۷	۴-۱۵- مینورهای اصلی یک ماتریس.....
۲۳۷	۴-۱۶- خواص دترمینان.....
۲۴۵	۴-۱۷- معکوس ماتریس.....
۲۴۵	۴-۱۸- خواص ماتریس معکوس.....
۲۴۶	۴-۱۹- تبدیلات مقدماتی ماتریس ها.....
۲۴۸	۴-۲۰- روش های بدست آوردن معکوس یک ماتریس.....
۲۴۸	۴-۲۰-۱- روش اول : استفاده از تعریف.....
۲۴۹	۴-۲۰-۲- روش دوم : روش گاوس.....
۲۵۲	۴-۲۰-۳- روش سوم : استفاده از ماتریس الحاقی.....
۲۵۶	۴-۲۱- استقلال خطی ، وابستگی خطی و رتبه ماتریس.....
۲۵۹	۴-۲۲- دترمینان و رتبه ماتریس.....
۲۶۳	۴-۲۳- دستگاه معادلات خطی.....
۲۶۴	۴-۲۴- حل دستگاه معادلات خطی.....

۲۶۴	۴-۲۴-۱- حل با استفاده از معکوس ماتریس
۲۶۶	۴-۲۴-۲- حل با استفاده از روش کرامر
۲۶۷	۴-۲۴-۳- روش کلی حل (روش گاوس - جردن)
۲۶۹	۴-۲۵- دستگاه معادلات خطی همگن
۲۷۷	۴-۲۶- مقادیر ویژه ، بردارهای ویژه
۲۸۰	۴-۲۷- خواص مقادیر ویژه یک ماتریس
۲۸۱	۴-۲۸- کاربردهای ماتریس در اقتصاد و مدیریت
۲۸۱	۴-۲۸-۱- کاربرد ماتریس ها در مسائل اقتصاد و مدیریت
۲۸۸	۴-۲۸-۲- تعیین ماکزیمم و می نیمم توابع n متغیره نامقید
۲۹۰	۴-۲۸-۳- تعیین ماکزیمم و می نیمم توابع n متغیره مقید
۲۹۴	۴-۲۹- مسائل حل شده
۳۳۱-۳۴۴	فصل پنجم : آشنایی با معادلات دیفرانسیل
۳۳۱	۵-۱- مقدمه
۳۳۱	۵-۲- تعریف معادله دیفرانسیل معمولی
۳۳۲	۵-۳- تعریف معادله دیفرانسیل جزئی
۳۳۲	۵-۴- مرتبه و درجه یک معادله دیفرانسیل
۳۳۳	۵-۵- جواب یک معادله دیفرانسیل
۳۳۴	۵-۶- معادلات دیفرانسیل جداشدنی
۳۳۶	۵-۷- معادلات مرتبه اول همگن و روش حل آنها
۳۴۰	۵-۸- معادلات دیفرانسیل کامل و روش حل آنها
۳۴۱	۵-۸-۱- آزمون برای تشخیص کامل بودن یک معادله
۳۴۱	۵-۸-۲- روش بدست آوردن جواب عمومی یک معادله
۳۴۵-۳۵۰	واژه نامه
۳۵۱-۳۵۲	فهرست منابع

پیشگفتار

«ریاضیات» طی چند دهه اخیر با سرعت فزاینده‌ای در تمام شئون زندگی انسان وارد شده است. امروزه کمتر شاخه‌ای از علوم یافت می‌شود که اصول و روش‌های ریاضیات در آن بکار گرفته نشود، از شاخه‌های مختلف علوم فنی و مهندسی و پایه گرفته تا علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم ورزشی و حتی هنر. به عبارتی می‌توان گفت زنجیره ریاضیات همه جا را درنور دیده است.

از آنجا که ریاضیات به خودی خود امکان تحلیل روابط کمی را دارا می‌باشد، هنگامی که نمادها، معرف مفاهیم کمی باشند نه تنها ابزاری بسیار سودمند شده بلکه تحلیل روابط بین آنها نیز ضرورت می‌یابد. به عبارت دیگر ریاضیات با قابلیت‌ها و توانایی‌های فراوان، چارچوب منظم و دقیقی را فراهم می‌سازد که در آن با فراغ بال، می‌توان روابط کمی را شناسائی و با سهولت و دقت بیشتری آنها را مورد مطالعه قرار داد و به نتیجه مطلوب دست یافت. اگرچه که در ریاضیات محض، نمادها عموماً به معرفی مفاهیم انتزاعی – که خواص آنها با تعاریف مشخص می‌شوند – می‌پردازد، اما در ریاضیات کاربردی بسیاری از نمادها، مقادیر متغیرهایی را نشان می‌دهند که در دنیای واقعی قابل لمس بوده و خواص آنها از طریق مشاهده و نه با تعریفی مجرد، بیان و آنگاه از طریق روابط ریاضی معرفی می‌شوند. مفاهیمی مانند سود، هزینه، درآمد و ... که به واسطه ماهیت عددی، می‌توانند در چارچوبی منظم و منطقی مبتنی بر روش‌های ریاضی مورد مطالعه قرار گرفته و در قالب روش‌های کمی (عددی) تحلیل شوند.

البته باید به این نکته توجه نمود که دقت نتایج بدست آمده از روش‌های مبتنی بر ریاضیات در حوزه ریاضیات کاربردی، بستگی به صحت تعاریف و مفروضات دارد. ریاضیات نمی‌تواند مانع حذف و یا تغییر تعاریف غلط متغیرها و یا فرض‌های نادرست و ناقص از نظر تجربی، گردد و در این صورت بدیهی است تحلیل‌های مبتنی بر چنین مفروضاتی اگرچه از نظر ریاضی درست نیز انجام شده باشند، معتبر و قابل استناد نیستند. اما در عین حال اگر تعاریف و مفروضات به درستی و به صورتی کامل بیان گردند، روش‌های ریاضی با فراهم آوردن چارچوبی منطقی و منظم امکان تحلیل‌های سودمند و دقیقی را فراهم می‌سازند که «کاربر» خود را در دامنه وسیعی از اطلاعات مفید قرار داده و او را قادر می‌سازند تا در تصمیم‌گیری‌های خود، امکان حصول به نتایج صحیح‌تر و دقیق‌تری را با لحاظ نمودن تأثیر متغیرهای متعدد، داشته باشد.

از آنجا که آشنایی با مفاهیم و کاربردهای ریاضیات جزء لاینفک رشته‌های مدیریت و بخصوص اقتصاد است و تسلط دانشجویان بر این مفاهیم، امکان درک صحیح‌تر و بهتر دروس مختلف را فراهم می‌سازد، هدف این کتاب، کمک به دانشجویان در جهت توان کاربرد روش‌های ریاضیات در تحلیل روابط متنوع و مختلف مفاهیم کمی است. مطالب کتاب چنان تنظیم گردیده که در هر فصل ابتدا به معرفی روش ریاضی موردنظر و سپس به موضوعات کاربردی آن در حیطه علوم اقتصادی و مدیریت پرداخته خواهد شد. براین اساس مفروضات و مفاهیم لازم برای هریک از تحلیل‌ها مورد تاکید قرار گرفته و سپس در باره کاربرد آنها بحث می‌شود. مفاهیمی چون حساب دیفرانسیل توابع دو متغیره، مشتقات جزئی، دیفرانسیل تابع و کاربردهای متنوع آن در حوزه های علوم اقتصادی و مدیریت در کنار درک مسائل بهینه سازی توابع چند متغیره، انتگرال و کاربردهای مختلف آن در مسائل اقتصادی، جبر ماتریس‌ها و دترمینان که دارای کاربردهای متعددی در فرموله کردن مسائل مدیریتی و اقتصاد هستند از عمده مطالب بحث شده در این کتاب می‌باشند. در جهت تفهیم بهتر مطالب، تعداد زیادی مثال ارائه و حل شده که کتاب را بصورت یک خودآموز تبدیل نموده است. با این امید که این مجموعه بتواند به دانشجویان رشته های اقتصاد، مدیریت و سایر رشته‌های مرتبط در کسب مهارت های ریاضی درجهت فهم و تجزیه و تحلیل روابط مورد نیاز کمک نماید.

از آنجا که هیچ تلاشی بی عیب و نقص نمی‌باشد، نویسندگان نیز بر کامل بودن و بی‌عیب بودن این کتاب هیچ ادعایی نداشته و متواضعانه از نظرات اصلاحی و ارشادی کلیه اساتید، اندیشمندان، محققان و دانشجویان ارجمند استقبال نموده و همه را به دیده منت پذیرا می‌باشند. باشد که این مجموعه مقبول رهروان عرصه لایتناهی علم افتد.

فرزاد کریمی و محمد مشهدی زاده

پاییز ۱۳۸۲