



فیزیک عمومی

جلد ۱ مکانیک

نوشته

مارچلو آلونسو

ادوارد جی. فین

ترجمه

لطیف کاشیکر

مارچلو آلونسو
و
ادوارد جی. فین

فیزیک عمومی

۱

مکانیک

ترجمہ
لطیف کاشیگر

پیشگفتار

فیزیک علمی بنیادی است و نفوذ عمیقی در علوم دیگر دارد. بنا بر این، تنها دانشجویان فیزیک و مهندسی نیستند که باید نظرات اساسی آن را کاملاً درک کنند، بلکه هر کسی که بخواهد پیشه علمی داشته باشد (از جمله دانشجویانی که در زیست‌شناسی و ریاضی تخصص می‌گیرند) باید همین مفاهیم را فرا گیرد.

نخستین هدف از درس فیزیک عمومی (و شاید تنها دلیلی که آن را در برنامه گذارده‌اند) دادن یک دید واحد از فیزیک به دانشجو است. این کار باید بدون داخل شدن خیلی زیاد به جزئیات، ولی با تجزیه و تحلیل اصول اساسی و پیامدها و حدود این اصول انجام شود. دانشجو وقت دارد کاربردهای ویژه آنها را بعداً در دروس اختصاصی فرا گیرد. از این رو، این کتاب شما را با آنچه به باور ما، هسته نظرات بنیادی فیزیک معاصر را تشکیل می‌دهد آشنا می‌کند. درگزينش موضوعهای مورد مطالعه و روش عرضه آنها سفارشیهای کمیسیون آموزش فیزیک مدارس عالی بدقت در مد نظر بوده‌اند.

تا زمانهای اخیر، فیزیک را به صورت انباشته‌ای از چند علم، کمابیش مربوط به هم، ولی بدون هیچ دیدگاه واحد واقعی، می‌آموختند. اما تقسیم‌بندی سنتی آن به «علم» مکانیک، گرما، صوت، اپتیک، الکترومغناطیس، و فیزیک نوین دیگر توجیه‌پذیر نیست. ما این رهیافت سنتی را رها کرده‌ایم. در عوض، با تأکید بر روی قوانین بقا (پایستگی)، مفاهیم میدان و موج، و دید اتمی از ماده، نحوه ارائه منطقی و یگانه‌ایی را تعقیب می‌کنیم. در سرتاسر این کتاب، از نظریه خاص نسبیت به عنوان یکی از اصول راهنمایی که باید هر نظریه فیزیکی با آن سازگار باشد، استفاده شده است.

مطالب مورد مطالعه به پنج قسمت (۱) مکانیک، (۲) برهم‌کنشها و میدانها، (۳) امواج، (۴) فیزیک کوانتومی، و (۵) فیزیک آماری تقسیم شده‌اند. برای بنیاد نهادن اصول اساسی لازم جهت توصیف حرکاتی که در دور و برمان مشاهده می‌شوند، از مکانیک شروع می‌کنیم. سپس، چون همه پدیده‌های طبیعت نتیجه برهم‌کنشها هستند و این برهم‌کنشها بر حسب میدانها تجزیه و تحلیل می‌شوند، در قسمت ۲ انواع برهم‌کنشهایی را که بهتر می‌فهمیم، برهم‌کنشهای گرانشی و الکترومغناطیسی، مورد بررسی قرار گرفته‌اند؛ این

برهم کنشها مسئول بیشترین پدیده‌های ماکروسکوپیکی هستند که مشاهده می‌کنیم. الکترومغناطیس را با جزئیات نسبتاً بیشتری مطرح می‌کنیم، و با فرمولبندی معادلات ماکسول آن را به فرجام می‌رسانیم. در قسمت ۳ پدیده‌های موجی به عنوان برآمدی از مفهوم میدان مطرح می‌شود. بیشتر موضوعاتی را که معمولاً تحت عنوانهای آکوستیک و اپتیک آورده می‌شوند، در این قسمت گنجانده‌ایم. با وجود این، برامواج الکترومغناطیسی به عنوان بسط طبیعی معادلات ماکسول تأکید شده است. در قسمت ۴ ساختار ماده، یعنی، اتمها، مولکولها، هسته‌ها، و ذرات بنیادی را تحلیل می‌کنیم — پیش از آن، تحلیلی از زمینه‌های لازم مکانیک کوانتومی آمده است. سرانجام، در قسمت ۵، دربارهٔ ویژگیهای مادهٔ کپهای سخن می‌گوییم. نخست با اصول مکانیک آماری آشنا می‌شویم، و آنها را در موارد ساده، ولی اساسی، به کار می‌بندیم. ترمودینامیک را از دیدگاه مکانیک آماری مطرح می‌کنیم، و آن را با فصلی روی ویژگیهای گرمایی ماده پایان می‌بخشیم و نشان می‌دهیم که چگونه اصول مکانیک آماری و ترمودینامیک را باید به کار برد.

مطالب این کتاب، نه تنها در شیوهٔ ارائه، حتی در محتوای خود نیز، تازه‌اند، زیرا در آن برخی مباحث اساسی گنجانیده شده است که در اغلب کتابهای درسی فیزیک عمومی یافت نمی‌شوند و مطالبی را از قلم انداخته‌ایم که به طور سنتی در چنین کتابهایی می‌آیند. ریاضیات مورد استفاده را می‌توان در هر کتاب درسی مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال پیدا کرد. فرض بر این است که دانشجو با حداقلی از مقدمات حساب دیفرانسیل و انتگرال آشناست و همزمان با این درس، درسی در آن موضوع گرفته است. اغلب کاربردهای اصول اساسی، همچنین سؤالهایی در سطح کمی بالاتر، به صورت مثالهای حل شده آمده‌اند. این مثالها را می‌شود، بسته به میل مدرس، همراه درس تدریس کرد، یا به عنوان کار انفرادی به عهدهٔ دانشجویان گذاشت. بدین طریق انعطاف بیشتری در تنظیم کم و کیف درس به وجود آمده است.

در حال حاضر، گرایش نیرومندی وجود دارد تا در برنامه‌های همهٔ علوم مطالب جدیدی که مسئلهٔ روزاند گنجانده شوند. امیدواریم که این کتاب با بالا بردن سطح درک مفاهیم فیزیکی دانشجو و توانایی بخشیدن به وی در استفاده از رابطه‌های ریاضی مربوطه، چنین گرایشی را ارضا کند. این امر امکان خواهد داد سطح و محتوای بسیاری از درسهای را که اکنون در برنامهٔ دورهٔ لیسانس منظور شده‌اند بالا ببرند. درسهای سنتی مکانیک، الکترو-مغناطیس، و فیزیک نوین در دورهٔ لیسانس، بیش از بقیه از این ارتقاء سطح بهره‌مند خواهند شد. بدین طریق، دانشجو در پایان آموزش لیسانس، نسبت به دانشجویان پیشین از سطح دانش بالاتری برخوردار خواهد شد — این امتیاز برای دانشجویانی که تحصیلات خود را در همین مرحله پایان می‌دهند، امتیاز بزرگی است. همچنین از این به بعد جا برای گنجانیدن درسهای جدیدتر و پیشرفته‌تر در برنامهٔ دورهٔ فوق لیسانس باز خواهد شد. همین گرایش در کتابهای درسی بنیادی جدید دو سال اول لیسانس سایر رشته‌های علوم نیز مشاهده می‌شود. این دوره برای تدریس در سه نیمسال تدوین شده است. به منظور وحدت بخشی کامل به ارائهٔ مطالب در سه نیمسال، این دوره را می‌شود در دانشکده‌هایی که به دنبال فیزیک

عمومی در دو نیمسال، در نیمسال سوم فیزیک نوین دارند، به کار گرفت. جهت سهولت کار، مطالب این دوره به سه جلد تقسیم شده‌اند و هر جلد تقریباً برای یک نیمسال منظور شده است. در جلد اول، مکانیک و برهم‌کنش گرانشی مطالعه می‌شود. جلد دوم به برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی و امواج مربوط می‌شود، و اساساً موضوعات الکترومغناطیس و اپتیک را در بر می‌گیرد. فیزیک کوانتومی و آماری، از جمله ترمودینامیک، در جلد سوم مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هر چند سه جلد کتاب ارتباط تنگاتنگی با هم دارند و مجموعه یگانه‌ای درست می‌کنند، ولی هر جلد آن را می‌توان کتاب مستقلی منظور و تدریس کرد. بویژه، جلد اول و دوم با هم، هم‌ارز درس فیزیک عمومی دو نیمسالی است که شامل فیزیک کوانتومی نمی‌شود.

امیدواریم این دوره پاسخگوی آن گروه از معلمین فیزیکی باشد که به طور دائم و خستگی‌ناپذیر می‌کوشند سطح آموزش فیزیک را ارتقا بخشند. همچنین امیدواریم علاقه بسیاری از دانشجویانی را که شایستگی فراگیری فیزیک کاملتر و متحولاتر از درسهای سنتی را دارند برانگیزد.

در اینجا، از همه کسانی که با یاری و دلگرمی دادن به ما انجام کامل این کار را میسر ساخته‌اند سپاسگزاریم. از همکاران ارجمند خود، بویژه پروفیسور د. لازاروس^۱ و س. روبروتسون^۲ که زحمت خواندن متن اصلی را به خود داده‌اند، تشکر می‌کنیم، استادانی که انتقادات سازنده و نظراتشان به ما کمک کرد تا از جنبه‌های زیادی متن را تصحیح کنیم و بهبود بخشیم. از کارمندان شرکت ادیسون - وسلی^۳ نیز به خاطر تواناییها و زحمات بیدریغشان قدردانی می‌کنیم. آخرین، و بیشترین سپاسگزاریهای خود را نثار همسرانمان می‌کنیم که با بردباری و حوصله فراوان با ما همگامی کرده‌اند.

مارچلو الونسو
ادوارد ج. فین

واشنگتن د. سی.
ژوئن ۱۹۶۶

تذکرات آموزشی

برای کمک به مدرس جهت تنظیم برنامه درسی خود، با اشاراتی به مفاهیم عمده هر فصل، خلاصه‌ای از رئوس مطالب این جلد را معرفی می‌کنیم. چنانکه در پیشگفتار اشاره شد، برای اینکه دانشجو هرچه سریعتر معدودی از نظرات اساسی را که فیزیک بر پایه آنها استوار است (مثلاً، قوانین بقا، و این واقعیت که پدیده‌های فیزیکی می‌توانند به برهم‌کنشهایی بین ذرات بنیادی تحویل گردند) بشناسد، در این دوره، فیزیک به صورت یکپارچه گسترش داده شده است. دانشجو باید متوجه باشد که برای فیزیکدان یا مهندس شدن باید به درک روشنی از این نظرات دست یابد و توانایی خود را در دخل و تصرف آنها افزایش دهد.

مطالب اساسی کالبد متن را تشکیل می‌دهند. در هر فصل مثالهای حل شده زیادی گنجانده شده‌اند؛ برخی از این مثالها ساده و کاربرست عددی نظریه بحث شده هستند، در حالی که برخی دیگر، یا تعمیمهای نظریه یا نتایج ریاضی آنند. بهتر است به دانشجو توصیه شود که در دور نخست مطالعه هر فصل مثالها را بکلی نادیده بگیرد، سپس در دور بعد، به مثالهایی بپردازد که مدرس برمی‌گزیند و توصیه می‌کند. بدین طریق دانشجو نظرات بنیادی را، جدا از کاربردها یا تعمیمهای آنها، می‌آموزد.

در پایان هر فصل بخشی به مسایل اختصاص دارد. برخی از این مسایل بغایت ساده و برخی دیگر مشکلتر از مسایل متوسط فیزیک عمومی هستند. ترتیب مسایل به گونه‌ای است که، با صرف نظر از چند مسئله مشکلتر در پایان، با ترتیب بخشهای آن فصل می‌خوانند. زیادی و گوناگونی مسایل به مدرس امکان می‌دهد با توجه به تواناییهای ویژه دانشجویان، در انتخاب و حل مسایل از آزادی بیشتری برخوردار باشد.

پیشنهاد می‌کنیم که مدرس مجموعه‌ای از فهرست منابع مذکور در پایان هر فصل را درست کند، و دانشجویان را تشویق کند تا آنها را مطالعه کنند، تا بدین طریق بتوانند به مراجعه به منابع عادت کنند، و درباره هر موضوع تنها با خواندن یک توضیح و تفسیر از آن ارضا نشوند و اطلاعات تاریخی بیشتری درباره فیزیک به دست آورند.

این جلد کتاب جهت تدریس در نیمسال اول منظور شده است. (با وجود این، تدریس فصل ۱۳ را می‌توان به نیمسال دوم موکول کرد). براساس تجربیات شخصی خود، تعداد ساعات لازم برای آموزش بدون اشکال مواد پیش‌بینی شده را، به عنوان راهنما پیشنهاد کرده‌ایم. درجدول زمان‌بندی شده (۴۳ ساعت تدریس) وقتی برای پرسش و آزمون از دانشجویان منظور نشده است. اینک به اظهار نظر مختصری درباره هر فصل می‌پردازیم.

فصل ۱. مقدمه (۱ ساعت)

این فصل به منظور ارائه یک دید مقدماتی از علمی است که دانشجویان درصدد مطالعه آن است، از این رو باید آن را بدقت بخوانند. بهتر است، هنگام تدریس مباحثه کوتاهی توسط مدرس سازمان داده شود.

فصل ۲. سنجش و یکاها (۱ ساعت)

به پیروی از سفارشهای کمیسیون انجمن بین‌المللی فیزیک محض و کاربردی (IUPAP)* در باره نمادها، یکاها و نامگذاریهای علمی، دستگاه یکاهای MKSC را پذیرفته‌ایم. با آوردن هریکای جدیدی از MKSC در فصلهای بعد، هم‌ارز آن را در دستگاه cgs ذکر کرده‌ایم. مسایل این فصل به گونه‌ای طرح شده‌اند تا دانشجویان به دریافتی از «بزرگ» و «کوچک» دست یابند.

فصل ۳. بردارها (۳ ساعت)

در این فصل نظرات پایه‌ای جبر برداری را مطرح می‌کنیم و مثالهایی از مباحث سینماتیک برای آنها می‌آوریم. می‌توان آموزش بخشهای ۸.۳، ۹.۳ و ۱۰.۳ را به موقعی موکول کرد که برای نخستین بار در متن کتاب به این مفاهیم نیاز پیدا می‌شود. این فصل، به سبب جاذبه فیزیکی محدودش، ممکن است به نظر دانشجویان مشکل بیاید، ولی مدرس باید ضرورت نمادگذاری برداری را به او تفهیم کند، و با یاری جستن از مثالهای فیزیکی بکوشد ساعات درس را زنده‌تر سازد.

فصل ۴. نیروها (۲٫۵ ساعت)

این فصل را به چند دلیل جلوتر جای داده‌ایم. نخست اینکه، ما را با کاربردهای عادی بردارها آشنا می‌کند. دیگر اینکه، فرصت فراهم می‌کند تا دانشجویان قبل از مبادرت به مطالعه سینماتیک مقدماتی از محاسبات پایه‌ای را بیاموزد. بالاخره، این کار گسترش بلاانقطاع مکانیک را از فصل ۵ تا ۱۲ میسر می‌سازد. برای دوره‌هایی که نیازی به این مطالب احساس نشود، می‌توان از این فصل، بجز بخشهای ۳.۴ (گشتاور نیرو) و ۸.۴ (مرکز جرم)، چشم پوشید. در صورت تمایل می‌توان این فصل را بعد از بخش ۶.۷ تدریس کرد، ولی ما این

* International Union of Pure and Applied Physics

قسمت ۱. مکانیک

از فصل ۵ تا ۱۲، کتاب به طرح و بسط مفاهیم عمده مکانیک کلاسیک و نسبیتی می‌پردازد. برای سهولت، نخست درباره مکانیک یک ذره واحد گفتگو می‌کنیم. در عین حال، مکانیک دستگاه‌های چند ذره‌ای نیز بتفصیل زیادی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بر تمایز بین دستگاه ایدال تک ذره‌ای و دستگاه واقعی چند ذره‌ای تأکید می‌شود.

فصل ۵. سینماتیک (۳ ساعت)

این فصل باید به طور کامل و عمیق تدریس شود. دانشجو باید ماهیت برداری سرعت و شتاب و روابط آنها را با مسیر حرکت بفهمد. مدرس باید با پافشاری و اصرار زیاد این واقعیت را بفهماند که، هنگام محاسبه مشتق یک بردار نسبت به زمان، هم تغییر در بزرگی و هم در راستای بردار را باید در نظر گرفت. ریاضیات مورد نیاز این فصل نسبتاً ساده است. مدرس در صورت تمایل می‌تواند تدریس بخش ۱۱.۵ را به تأخیر اندازد و درست پیش از شروع بخش ۱۴.۷ درباره آن بحث کند.

فصل ۶. حرکت نسبی (۴ ساعت)

حرکت نسبی را از دیدگاه سینماتیکی مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای اینکه دانشجو اهمیت چارچوب‌های مرجع را بیشتر درک کند این فصل را پیش از فصل دینامیک می‌آوریم. از بخش‌های ۴.۶ و ۵.۶ (درباره چارچوب‌های چرخان) می‌توان صرف نظر کرد و بخش‌های ۶.۶ و ۷.۶ (درباره چارچوب‌های نسبیتی) را، می‌شود تا تدریس فصل ۱۱ به تأخیر انداخت.

فصل ۷. دینامیک ذره (۴ ساعت)

این فصل یکی از فصول بسیار مهم است، و دانشجو باید کاملاً آن را درک کند. به اصل بقای اندازه حرکت بیش از رابطه $F = ma$ اهمیت داده شده است. حدود اعتبار قوانین حرکت و مفاهیم برهم‌کنش و نیرو باید بدقت زیاد مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرند.

فصل ۸. کار و انرژی (۳ ساعت)

از لحاظی، این فصل تعمیم و گسترش فصل ۷ است، و باید عمیقاً یاد گرفته شود. از بخش ۱۰.۸ (نیروهای مرکزی) می‌شود چشم پوشید یا آموزش آن را به فصل ۱۳ موکول کرد. مهمترین مطالب آن عبارتند از مفاهیم انرژی و بقای انرژی برای یک تک ذره. در این فصل قضیه ویرال را معرفی می‌کنیم، زیرا این قضیه بیش از پیش و به طور گسترده‌ای هم در فیزیک و هم در شیمی به کار می‌رود.

فصل ۹. دینامیک یک دستگاه ذرات (۵ ساعت)

برای سهولت، بیشتر نتایج را برای دو ذره به دست آورده‌ایم، سپس آنها را، از طریق قیاس، به تعداد دلخواهی از ذرات تعمیم داده‌ایم. مفاهیم دما، گرما و فشار به عنوان مفاهیم آماری مناسب برای توصیف رفتار دستگاه‌های متشکل از چند ذره معرفی شده‌اند. این امر به ما اجازه می‌دهد از این مفاهیم در سراسر بقیه کتاب استفاده کنیم. معادله حرکت یک گاز را از قضیه ویرال به دست آورده‌ایم، زیرا بدین طریق نقش نیروهای داخلی بروشنی بیشتری به چشم می‌خورد؛ همچنین روش سنتی تر مسئله در مثال ۱۷.۹ نشان داده می‌شود. این فصل با بحثی درباره حرکت شاره‌ها به پایان می‌رسد که در صورت تمایل می‌توان آن را حذف کرد.

فصل ۱۰. دینامیک جسم سخت (۳.۵ ساعت)

باید روی حرکت تقدیمی اندازه حرکت زاویه‌ای بر اثر وارد شدن گشتاور نیرو تأکید زیادی بشود. بخش حرکت ژيروسکوپی نیز مهم است، زیرا نظرات مطرح شده در آن در موارد متعددی به کار می‌آیند.

فصل ۱۱. دینامیک انرژی‌های بالا (۳.۵ ساعت)

این فصل اساساً در باره دینامیک نسبیتی است، و بیشتر روی مفاهیم سرعت دستگاه (یا چارچوب مرکز جرم) و تبدیل لورنتس برای انرژی و اندازه حرکت تأکید دارد. طبعاً، در فیزیک امروز، این بحث از اهمیت بسزایی برخوردار است.

فصل ۱۲. حرکت نوسانی (۵ ساعت)

حرکت هماهنگ ساده نخست به طور سینماتیکی و سپس دینامیکی معرفی شده است. این فصل را می‌توان یا تمامی درجای خود (پایان نیمسال اول) مورد بحث قرار داد، یا تنها به چند بخش اول آن اکتفا کرد و بخشهای باقی مانده را به فصلهای بعد درجایی که مورد نیاز هستند ارجاع کرد. ما شق اول را توصیه می‌کنیم. می‌توان نیمسال اول را با خاتمه این فصل پایان بخشید.

قسمت ۲. برهم کنشها و میدانها

این قسمت به مطالعه برهم کنشهای گرانشی و الکترومغناطیسی، که از فصل ۱۳ تا ۱۷ مورد بحث قرار گرفته‌اند، اختصاص داده شده است. در اینجا روی مفهوم میدان به عنوان یک ابزار مفید برای فیزیک تأکید می‌شود. با توجه به اینکه بسیاری از مدرسين مایلند از گرانش در جریان نیمسال اول و بلافاصله پس از اتمام تدریس مکانیک گفتگو کنند ما فصل ۱۳ را در این کتاب گنجانده‌ایم، و مطالعه برهم کنشهای الکترومغناطیسی (فصل ۱۴ تا فصل ۱۷) را برای نیمسال دوم و جلد ۲ منظور داشته‌ایم.

این فصل شرح مختصری از گرانش است، که کاربرد مکانیک را در برهم کنش ویژه ای نشان می دهد. همچنین دانشجویان را با مفهوم میدان آشنا می کند. این فصل طوری نوشته شده است که آن را، به طور طبیعی، با برهم کنش الکترومغناطیسی که در جلد دوم کتاب مورد بحث قرار می گیرد گره می زند. می توان از بخشهای ۵.۱۳ و ۷.۱۳ صرف نظر کرد؛ این کار به پیوستگی مطالب لطمه نمی زند. در بخش ۸.۱۳ توضیح کوتاهی درباره ایده نظریه نسبیت عام آمده است.

چند تذکر به دانشجویان

این کتاب دربارهٔ مباحث فیزیک، برای دانشجویانی نوشته شده است که هدفشان تحصیل علوم و یا یکی از رشته‌های مهندسی است. مفاهیم و نظراتی که در اینجا مطرح می‌کنیم، به احتمال خیلی زیاد، بخشی از فعالیت شغلی و شیوهٔ تفکر شما خواهد شد. درک و فهم هرچه بهتر این مطالب، بقیهٔ تحصیلات شما را در دوره‌های لیسانس (دانشیابی) و فوق لیسانس (دانشوری) آسانتر خواهد ساخت.

درس فیزیکی را که اکنون شروع می‌کنیم بالطبع از درس فیزیک دورهٔ دبیرستان پیشرفته‌تر است. باید خود را برای دست و پنجه نرم کردن با شمار زیادی از مسایل دشوار آماده کنید. گاهی ممکن است درک و فهم قوانین و فنون فیزیکی فرآیندی کند و توانفرسا باشد. پیش از ورود به قلمروهایی از فیزیک که برای شما جذاب اند، باید در چیزهای دیگری مهارت کسب کنید که جاذبهٔ کمتری دارند، ولی بسیار اساسی‌اند و بدون آنها نخواهید توانست بر راحتی فیزیک را بفهمید و به کار گیرید.

در جریان مطالعهٔ این درس، باید دو هدف عمده را در مد نظر داشته باشید. نخست، با شمار محدودی از قوانین بنیادی و اصولی که هستهٔ فیزیک را تشکیل می‌دهند کاملاً آشنا شوید. دوم، توانایی خود را در کارکردن با این نظرات و به کار بستن آنها در وضعیتهای مشخص و عینی افزایش دهید؛ به گفتهٔ دیگر، همچون یک فیزیکدان بیاندیشید و عمل کنید. می‌توانید با خواندن و بازخوانی بخشهای اصلی کتاب به هدف اول دست یابید. برای کمک به شما جهت رسیدن به هدف دوم، مثالهای حل شدهٔ زیادی در لابلای متن اصلی و همچنین مسایلی برای حل در خانه در پایان هر فصل آورده شده‌اند. ما قویاً سفارش می‌کنیم که نخست متن اصلی را بخوانید، و هنگامی که آن مطالب را کاملاً فهمیدید، آنگاه به مطالعهٔ مثالهای حل شده و مسایلی پردازید که از طرف استادان تعیین می‌شوند. مثالها، یا کاربرد نظریه را در یک مورد مشخص نشان می‌دهند، یا با طرح کردن جنبه‌های جدید مسئله مورد گفتگو نظریه را بیشتر بسط و گسترش می‌دهند. گاهی نیز این مثالها فراهم آورنده توجیه و اثبات درستی نظریه‌اند.

میزان دشواری مسایل پایان هر فصل متفاوت است؛ از مسایل خیلی ساده شروع و به مسایل

پیچیده‌تر ختم می‌شوند. به طور کلی، بهتر است مسایل را ابتدا با نمادها یا علائم جبری حل کنید، و در پایان مقادیر عددی را در رابطه‌ها قرار دهید. اگر با صرف زمان معقولی نتوانستید مسئله‌ای را حل کنید، حل آن را موقتاً کنار بگذارید و کوشش بیشتر را به وقت دیگری موکول کنید. برای چند مسئله‌ای که خود راه حلی نمی‌یابید، بهتر است از دیگران یاری بگیرید. یک منبع خود-یاری برای آموزش دوش حل مسایل، این کتاب است: *How to Solve It* (second edition) by G. Polya (Garden City, N.Y. Doubleday 1957)

فیزیک یک علم کمی است که برای بیان ایده‌های خود نیاز به ریاضیات دارد. تمام ریاضیات به کار گرفته شده در این کتاب را می‌توانید در هر کتاب آنالیز معمولی پیدا کنید. هر وقت که اثبات ریاضی مطلبی را متوجه نشدید به چنین کتابی مراجعه کنید. ولی در روبرو شدن با یک مشکل ریاضی هرگز هراس به دل راه ندهید؛ در رفع مشکل خود با استادان مشورت کنید یا از دانشجویان سالهای بالاتر کمک بگیرید. برای یک فیزیکدان یا مهندس، ریاضیات یک ابزار است و در فراگیری نظرات فیزیکی در درجه دوم اهمیت قرار می‌گیرد. جهت کاستن بار شما، برخی از مفیدترین رابطه‌های ریاضی فهرست وار در پیوست پایان کتاب ذکر شده‌اند.

تمام محاسبه‌های فیزیکی را بایسد با بهره‌گیری از مجموعه یکدست و منسجمی از یکاها انجام داد. در این کتاب از دستگاه یکاهای MKSC استفاده شده است. MKSC یک دستگاه قانونی و رسمی علمی است. در کلیه محاسبات خود، سازگاری و همگنی بین یکاها را بدقت زیاد کنترل کنید. همچنین، بهتر است از همان آغاز از ماشین حساب استفاده کنید. ارزانترین ماشین حساب کافی است تا ساعتها در وقت محاسبه صرفه جویی شود.

در پایان هر فصل فهرست گزیده‌ای از منابع آمده است. تا آنجا که ممکن است به آنها مراجعه کنید. برخی از این کتابها به شما کمک می‌کنند تا ایده فیزیک را به عنوان یک علم متحول درک کنید، در حالی که برخی دیگر مطالب مطرح شده در متن کتاب را تعمیق و تکمیل خواهند کرد.

※ بسیار جای خوشحالی است، چنانکه در فهرست منابع آمده است، دو جلد از منابع بسیار معتبر این کتاب به نامهای هکانیک نوشته ک. ر. سایمون، و حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی نوشته ج. ب. توماس، به فارسی برگردانده شده‌اند و هم اکنون در دسترس علاقه‌مندان قرار دارند.

فهرست مطالب

فصل ۱ مقدمه

فیزیک چیست؟ ۴ □ شاخه‌های کلاسیک فیزیک ۴ □ دید ۱۰ از جهان ۵ □ رابطه بین فیزیک و سایر علوم ۱۲ □ روش تجربی ۱۳

فصل ۲ سنجش و یکاها

مقدمه ۱۸ □ سنجش ۱۸ □ کمیتهای اصلی و یکاها ۱۹ □ چگالی ۲۴ □ زاویه مسطحه ۲۵ □ زاویه فضایی ۲۶ □ دقت و درستی ۲۷ □ سنجش در آزمایشگاه ۲۹

فصل ۳ بردارها

مقدمه ۳۷ □ مفهوم راستا و سو ۳۷ □ اسکالرها و بردارها ۳۹ □ جمع بردارها ۴۰ □ مؤلفه‌های یک بردار ۴۴ □ جمع چند بردار ۴۹ □ کار برد در مسایل سینماتیک ۵۰ □ ضرب اسکالر ۵۴ □ ضرب برداری ۵۷ □ نمایش برداری یک سطح ۶۱

فصل ۴ نیروها

مقدمه ۷۱ □ ترکیب نیروهای هم‌رس ۷۱ □ گشتاور نیرو ۷۳ □ گشتاور چند نیروی هم‌رس ۷۵ □ ترکیب نیروهای وارد بر یک جسم سخت ۷۷ □ ترکیب نیروهای هم‌صفحه ۷۹ □ ترکیب نیروهای موازی ۸۱ □ مرکز جرم ۸۳ □ ایست شناسی: ترازمندی یک ذره ۸۵ □ ایست شناسی: ترازمندی یک جسم سخت ۸۷

قسمت ۱ مکانیک

فصل ۵ سینماتیک

مقدمه ۱۰۳ □ حرکت مستقیم الخط: سرعت ۱۰۴ □ حرکت مستقیم الخط:

شتاب ۱۰۷ □ نمایش برداری سرعت و شتاب در حرکت مستقیم الخط
 ۱۰۹ □ حرکت منحنی الخط: سرعت ۱۱۵ □ حرکت منحنی الخط:
 شتاب ۱۱۸ □ حرکت با شتاب ثابت ۱۲۰ □ مؤلفه‌های مماسی و قایم
 شتاب ۱۲۴ □ حرکت دایره‌ای: سرعت زاویه‌ای ۱۲۷ □ حرکت
 دایره‌ای: شتاب زاویه‌ای ۱۳۱ □ حرکت منحنی الخط در صفحه در حالت
 کلی ۱۳۴

فصل ۶ حرکت نسبی

مقدمه ۱۴۶ □ سرعت نسبی ۱۴۶ □ حرکت نسبی انتقالی یکنواخت
 ۱۴۸ □ حرکت نسبی چرخشی یکنواخت ۱۵۲ □ حرکت نسبت به
 زمین ۱۵۵ □ تبدیل لورنتس ۱۶۳ □ تبدیل سرعتها ۱۶۷ □
 نتایج تبدیل لورنتس ۱۷۱

فصل ۷ دینامیک یک ذره

مقدمه ۱۸۷ □ قانون لختی ۱۸۷ □ اندازه حرکت خطی ۱۸۹ □
 اصل بقای اندازه حرکت ۱۹۰ □ تعریف مجدد جرم ۱۹۴ □ قانون
 دوم و سوم نیوتون؛ مفهوم نیرو ۱۹۵ □ نقدی بر مفهوم نیرو ۱۹۸ □
 یکاهای نیرو ۱۹۹ □ نیروهای مالش ۲۰۲ □ نیروهای مالش در
 شاره‌ها ۲۰۵ □ دستگاههای با جرم متغیر ۲۰۹ □ حرکت منحنی الخط
 ۲۱۲ □ اندازه حرکت زاویه‌ای ۲۱۸ □ نیروهای مرکزی ۲۲۰ □
 ترازمندی و سکون ۲۲۷

فصل ۸ کار و انرژی

مقدمه ۲۴۴ □ کار ۲۴۵ □ توان ۲۴۹ □ یکاهای کار و توان
 ۲۵۰ □ انرژی جنبشی ۲۵۳ □ کار نیرویی با بزرگی و راستای
 ثابت ۲۵۶ □ انرژی پتانسیل ۲۵۹ □ بقای انرژی یک ذره ۲۶۵ □
 حرکت مستقیم الخط بر اثر نیروهای پایستار ۲۶۷ □ حرکت بر اثر
 نیروهای مرکزی پایستار ۲۶۹ □ بحث دربارهٔ منحنیهای انرژی پتانسیل
 ۲۷۲ □ نیروهای ناپایستار ۲۷۷ □ قضیهٔ ویرال برای یک ذرهٔ واحد
 ۲۸۰ □ نقدی بر مفهوم انرژی ۲۸۲

فصل ۹ دینامیک یک دستگاه ذرات

مقدمه ۲۹۳ □ حرکت مرکز جرم یک دستگاه ذرات ۲۹۳ □ جرم
 کاهیده ۳۰۰ □ اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات ۳۰۵ □
 انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات ۳۱۰ □ بقای انرژی یک دستگاه ذرات
 ۳۱۲ □ برخورد ۳۱۸ □ دستگاههای چند ذره‌ای: دما ۳۲۶ □

- دستگاههای چند ذره‌ای: کار ۳۲۸ □ دستگاههای چند ذره‌ای: گرما ۳۳۱ □
 فرمول بندی مجدد اصل بقای انرژی برای دستگاههای چند ذره‌ای ۳۳۲ □
 قضیه ویریاال برای چند ذره ۳۳۳ □ معادله حالت یک گاز ۳۳۵ □
 حرکت شار ۳۴۰ □

فصل ۱۰ دینامیک جسم سخت

- مقدمه ۳۶۲ □ اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم سخت ۳۶۳ □
 محاسبه گشتاور لختی ۳۶۸ □ معادله حرکت چرخشی یک جسم سخت ۳۷۳ □
 انرژی جنبشی چرخش ۳۸۱ □ حرکت ژيروسکوپ ۳۸۵ □

فصل ۱۱ دینامیک انرژیهای بالا

- مقدمه ۴۰۳ □ اصل کلاسیک نسبیت ۴۰۳ □ اصل خاص نسبیت ۴۰۶ □
 اندازه حرکت ۴۰۷ □ نیرو ۴۰۹ □ انرژی ۴۱۲ □
 تبدیل انرژی و اندازه حرکت ۴۱۸ □ تبدیل نیرو ۴۲۱ □ دستگاه ذرات ۴۲۳ □
 برخورد در انرژیهای بالا ۴۲۶ □

فصل ۱۱ حرکت نوسانی

- مقدمه ۴۴۱ □ سینماتیک حرکت هماهنگ ساده ۴۴۱ □ نیرو و انرژی در حرکت هماهنگ ساده ۴۴۶ □
 دینامیک حرکت هماهنگ ساده ۴۴۸ □ آونگ ساده ۴۵۰ □ آونگ مرکب ۴۵۳ □
 برهم‌نesh دو حرکت هماهنگ ساده: هم راستا و هم بسامد ۴۵۷ □
 برهم‌نesh دو حرکت هماهنگ ساده: هم راستا و با بسامدهای مختلف ۴۶۰ □
 برهم‌نesh دو حرکت هماهنگ ساده: در راستاهای عمود برهم ۴۶۲ □
 نوسانگرهای جفت شده ۴۶۷ □ نوسانهای ناهماهنگ ۴۷۳ □
 نوسانهای میرا ۴۷۵ □ نوسانهای واداشته ۴۷۸ □
 پایداری یک نوسانگر ۴۸۳ □ تحلیل فوریه حرکت دوره‌ای ۴۸۵ □

قسمت ۲ برهم‌کنشها و میدانها

فصل ۱۳ برهم‌کنش گرانشی

- مقدمه ۵۰۵ □ قانون گرانش ۵۰۶ □ جرم لختی و جرم گرانشی ۵۱۲ □
 انرژی پتانسیل گرانشی ۵۱۳ □ حرکت کلی بر اثر برهم‌کنش گرانشی ۵۲۰ □
 میدان گرانشی ۵۲۶ □ میدان گرانشی ناشی از یک جسم کروی ۵۳۴ □
 اصل هم‌ارزی ۵۴۰ □ گرانش و نیروهای بین مولکولی ۵۴۳ □

پیوست: روابط ریاضی، جدولها
 واژه‌نامه، فهرست راهنما

هنگامی که اجسام سخت و همگن با یکدیگر تماس یا بند، اجزاء آنها سخت به هم می‌چسبند. برای توضیح این پدیده، برخی متوسل به وجود اتمهای قلابدار شده‌اند. اما استنباط من از چسبیدن اجسام به یکدیگر این است که ذرات آنها یکدیگر را با نیرویی جذب می‌کنند. این نیرو هنگام تماس بیواسطه بسیار قوی است. اما اثر آن در فواصل دور از ذرات محسوس نیست. بنا براین در طبیعت عواملی هست که ذرات اجسام را با جاذبه‌ای نیرومند به هم می‌چسبانند، و کار فلسفه تجربی یافتن این عوامل است.

Optiks, Book 3, Query 31 (1703), Newton



مقدمه

۱.۱	فیزیک چیست؟
۲.۱	شاخه‌های کلاسیک فیزیک
۳.۱	دید ما از جهان
۴.۱	رابطه بین فیزیک و سایر علوم
۵.۱	روش تجربی

مطالعه فیزیک ماجرای است که موجب برانگیختن فکر و در عین حال به مبارزه طلبیدن اندیشه می شود. جالبتر از آن فعالیت در زمینه فیزیک است. این کارشاید یکی از مطبوعترین فعالیت‌های ذهن بشری باشد. زیرا بنا به تصور مؤلفین، برای روح انسان، هیچ چیز جذابتر از شناختن دنیا و پرده برداشتن از اسرار طبیعت نیست.

در اینجا، شاید ضروری نباشد که به دانشجو بگوئیم فیزیک درباره چیست، چرا یک چنین چالشی به وجود می آید و چه فایده‌ای دربر دارد، یا اینکه روشهای آن کدامند، زیرا دانشجو خود تا اندازه‌ای با این علم آشناست.

با وجود این، به سبب همین آشنایی با فیزیک، قبل از آغاز بررسی آن در سطحی کمی بالاتر، در این فصل لازم است باختصار موضوعات و روشهای علم فیزیک را یادآوری و تجزیه و تحلیل کنیم.

۱۰۱ فیزیک چیست؟

واژه فیزیک از یک کلمه یونانی به معنی طبیعت گرفته شده است و بنا بر این فیزیک باید علمی باشد که مطالعه تمام پدیده‌های طبیعی را دربرگیرد.

درواقع، تا ابتدای قرن نوزدهم، فیزیک را به همین معنی جامع آن درک می کردند و آن را «فلسفه طبیعی» می نامیدند. ولی، در طول قرن نوزدهم و حتی تا این اواخر، فیزیک به بررسی گروه محدودتری از پدیده‌ها اختصاص یافت که پدیده‌های فیزیکی نام گرفتند و به طور مبهم چنین تعریف می شدند: پدیده‌هایی که در آنها ماهیت مواد مورد عمل تغییر نمی کند. بتدریج این تعریف ناپخته از فیزیک متروک ماند و مجدداً به همان تعریف اول که جامع و در عین حال اساسی بود برگشت شد. با پیروی از این نظرات، می توانیم بگوئیم فیزیک علمی است که هدف آن مطالعه عناصر متشکله ماده و برهم کنشهای متقابل این عناصر می باشد. با پرداختن به این برهم کنشها، یک دانشمند خواص ماده کیهانی^۱ و همچنین کلیه پدیده‌های طبیعی قابل مشاهده دیگر را تشریح می کند.

با پیشرفت در این درس، دانشجو با نحوه گسترش برنامه بر اساس اصول کلی و پایه‌ای و با چگونگی کار بست این اصول، برای درک انواع گوناگون پدیده‌های فیزیکی که ظاهراً به هم ارتباط ندارند ولی از قوانین اساسی یکسانی پیروی می کنند، آشنا می شود. یک بار که این اصول مهم بروشنی فهمیده شوند، دانشجو خواهد توانست، با کمترین تلاش و بدون نیاز به تفکر زیاد، به مسایل جدید بپردازد.

۲۰۱ شاخه‌های کلاسیک فیزیک

آدمی با ذهن کاوشگر خود همیشه می خواسته بداند طبیعت چگونه عمل می کند. در آغاز، تنها منبع کسب اطلاعات انسان حواس او بود، از این رو پدیده‌های مشاهده شده را به همان

نحو که درمی یافت طبقه‌بندی می‌کرد. نود به بینایی مربوط می‌شد و اپتیک به صورت علمی کمابیش مستقل وابسته به بینایی گسترش یافت. صدا مربوط به شنوایی بود، و آکوستیک به صورت علم مربوط به آن توسعه پیدا کرد. گرما به یکی دیگر از حواس مربوط می‌شد و سالیهای متمادی مطالعهٔ گرما (به نام ترمودینامیک) به صورت شاخهٔ مستقل دیگر فیزیک انجام می‌پذیرفت. بدیهی است حرکت در تمام پدیده‌هایی که مستقیماً مشاهده می‌شوند وجود دارد و علم الحركات، مکانیک، قبل از سایر شاخه‌های فیزیک پیشرفت داشته است. حرکت سیاره‌ها، ناشی از برهم‌کنشهای گرانشی^۱، همچنین سقوط آزاد اجسام، با قوانین مکانیک بروشنی کامل تشریح شد و بدین طریق گرانثی به طور سنتی به مکانیک ملحق گردید. الکترومغناطیس، هر چند که وسیلهٔ ارتباط بین اغلب شاخه‌های فیزیک می‌باشد، چون به هیچیک از آزمایشهای حسی پیوند نداشت، تا قبل از قرن نوزدهم به صورت شاخهٔ تنظیم یافته‌ای از فیزیک ظاهر نشده بود.

بدین طریق فیزیک قرن نوزدهم به چند علم یا شاخه (به نام کلاسیک) مانند مکانیک، گرما، آکوستیک، اپتیک و الکترومغناطیس، با حداقل ارتباط، یا حتی بدون آن، تقسیم می‌شده است، به قسمی که مکانیک، چنانکه شایسته است، در رأس آنها قرار داشت. تا زمانهای اخیر فیزیک به ترتیبی که آمد تدریس می‌شد. در این اواخر شاخهٔ جدیدی به نام فیزیک نوین، که پیشرفتهای فیزیک قرن بیستم را در برمی‌گیرد، به این شاخه‌های «کلاسیک» افزوده شده است.

شاخه‌های «کلاسیک» فیزیک قلمروهای بسیار وسیع و مهم فعالیت‌های تخصصی و شغلی هستند و چنین نیز خواهند ماند، ولی اکنون دیگر معنی ندارد اصول فیزیک مانند گذشته به طور جداگانه مورد مطالعه قرار گیرد. زیرا مجموعهٔ پدیده‌های الکترومغناطیسی و فیزیک نوین خود، موجب این تفکر تازه شده که پدیده‌های فیزیکی باید واحد و منطقی تری مورد توجه قرار گیرند و این امر یکی از بزرگترین توفیقات قرن بیستم است. دید واحد از پدیده‌های فیزیکی ایجاب می‌کند فیزیک کلاسیک نیز از نقطه نظر جدیدی مورد ارزیابی قرار گیرد، نه اینکه فیزیک به کلاسیک و نوین تقسیم شود. بدین طریق همیشه یک فیزیک نوین وجود خواهد داشت که شامل گسترشهای فیزیک، در زمان خود می‌باشد. این فیزیک نوین موجب می‌شود هر لحظه اصول و اندیشه‌های قبلی مورد تجدید نظر قرار گیرند و یا حتی دگرگون شوند. فیزیک کلاسیک و نوین باید در تمام سطوح درهم بیامیزند و به صورت اطلاعات واحد در آیند. بنابراین فیزیک مجموعه‌ای می‌شود با عناصر معین که همیشه باید به طریقی گویا و منطقی مورد توجه قرار گیرد.

۳۰۱ دید ما از جهان

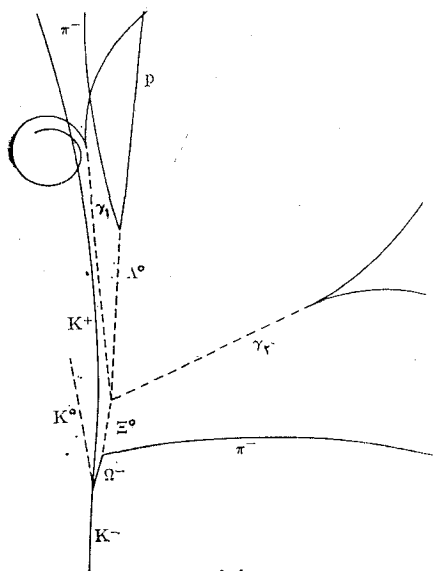
در حال حاضر ماده را متشکل از مشتئی از ذرات اساسی (یا بنیادی)^۲ در نظر می‌گیرند و هر جسمی چه جاندار و چه بیجان، از اجتماع یا آرایش معینی از این ذرات تشکیل شده است.

1. gravitational interactions

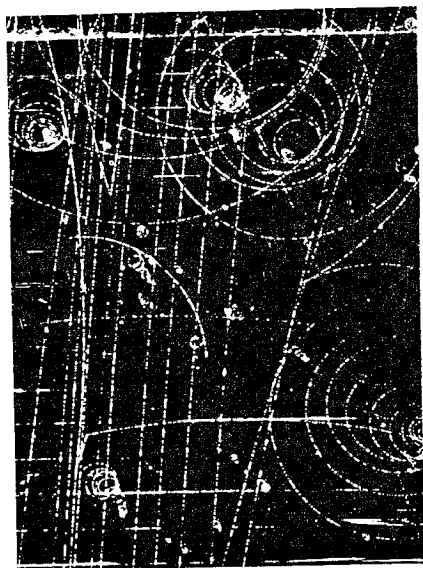
2. fundamental (elementary) particles

سه تا از این ذرات اساسی: الکترونها، پروتونها و نوترونها، به سبب حضورشان در اکثر پدیده‌های عادی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

ذرات بنیادی دیگری نیز وجود دارند (بعضی فیزیکدانها فکرمی‌کنند تعداد این ذرات بسیار زیاد است!) ولی عمر آنها بسیار کوتاه و زود گذر است، زیرا دائماً در حال به وجود آمدن و از بین رفتن هستند (بنابراین ناپایدارند) و ظاهراً به طور مستقیم در بیشتر پدیده‌هایی که در دور و برمان مشاهده می‌کنیم شرکت ندارند (شکل ۱۰۱). آثار وجودی آنها با وسایل مشاهده‌ی خیلی دقیق و پیچیده به ظهور رسیده است، با وجود این، هنوز نقش آنها در طرح کلی شناخته نشده است. چند تا از این ذرات مانند پیون^۱ به سبب نقشی که در برهم-کنشهای بین پروتونها و نوترونها دارند بسیار مهم‌اند. امروزه پژوهش درباره‌ی ذرات اساسی جهت دستیابی به نشانه‌هایی از ساختار جهان اهمیت بسیار یافته است.



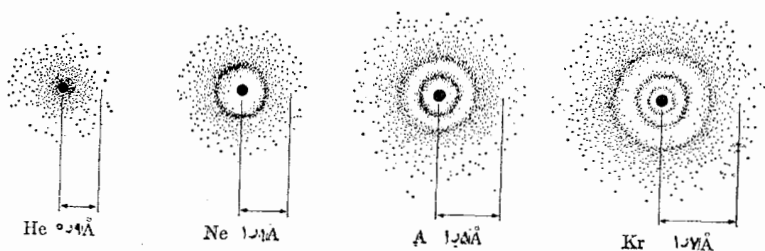
(ب)



(الف)

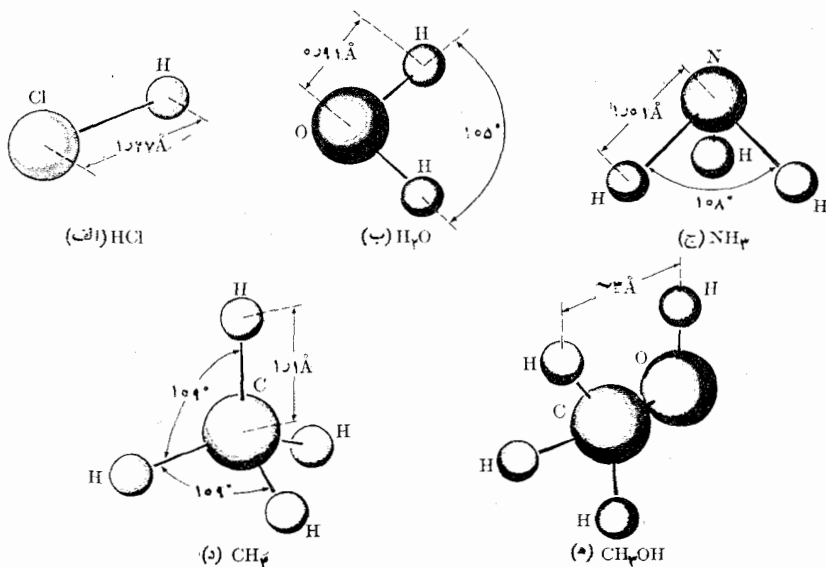
شکل ۱۰۱. (الف) رد ذرات بنیادی در یک اتاقک حباب هیدروژن مایع ۸۵ اینچی (۲m)، واقع در یک میدان مغناطیسی قوی که مسیر ذرات را به صورت منحنی درمی‌آورد. از تجزیه و تحلیل این ردها خواص ذرات مختلف را به دست می‌آورند. این عکس، که در سال ۱۹۶۴ گرفته شده است جنبه‌ی تاریخی دارد، و برای اولین بار وجود ذره‌ی امگا منفی (Ω^-) را به ثبوت رساند، که قبلاً توسط تئوری وجود آن پیش بینی شده بود. (ب) این نمودار، نکات مهمی را که روی عکس ثبت شده است نشان می‌دهد. رد Ω^- خط کوتاه به سمت پایین شکل است. ردهای مربوط به ذرات دیگر نیز تعیین شده‌اند. (عکس با اجازه‌ی آزمایشگاه ملی بروک هیون^۲.)

به زبان خیلی ساده، می توان گفت این سه ذره اساسی یعنی الکترون، پروتون و نوترون در گروه های کاملاً مشخصی به نام اتمها حضور دارند. در یک اتم، پروتونها و نوترونها در یک منطقه مرکزی خیلی کوچک به نام هسته جمع شده اند (شکل ۲.۱). امروزه در حدود

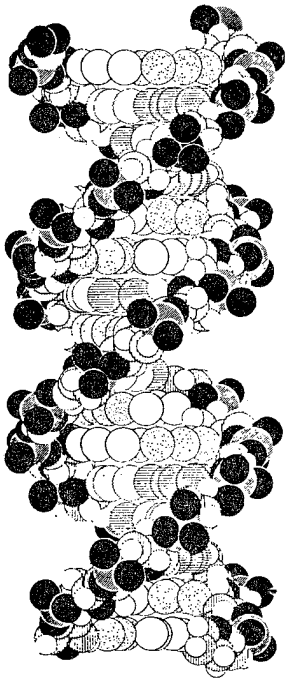


شکل ۲.۱. آرایش الکترونها در اطراف هسته چند اتم ساده (هلیوم: He، نئون: Ne، آرگون: A و کریپتون: Kr). چون مدار الکترونها کاملاً مشخص نیست، نواحی تیره جاهایی است که احتمال وجود الکترونها در آنها بیشتر است. ($\text{Å} = 10^{-10} \text{ m}$ = آنگستروم).

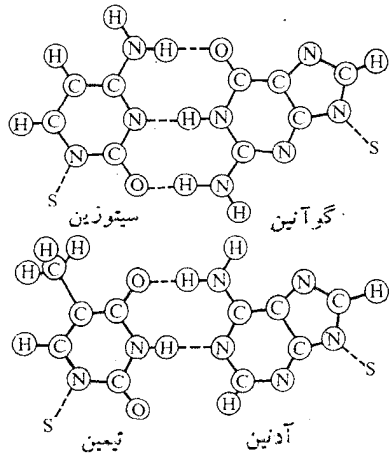
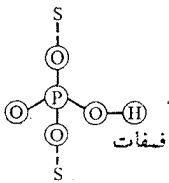
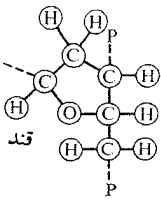
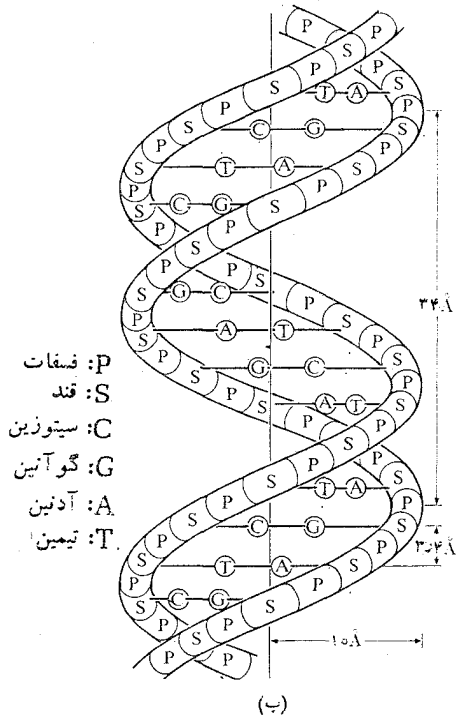
۱۰۴ «نوع» اتم کاملاً متمایز شناخته شده اند، ولی در حدود ۱۳۰۰ «گونه» اتم متفاوت به نام ایزوتوپ^۲ وجود دارد (به جدول پ ۱۰ مراجعه کنید). اتمها به سهم خود اجتماع



شکل ۳.۱. چند مولکول نسبتاً ساده. الکترونها لایه های داخلی در ارتباط دائم با اتمهای مربوط به خود باقی می مانند، در صورتی که الکترونها لایه های بیرونی، یا در فضای بین دو اتم و یا در تمام فضای مولکول، کمابیش آزاد، حرکت می کنند. ($\text{Å} = 10^{-10} \text{ m}$ = آنگستروم).



(الف)



شکل ۴.۱. مدل کریک - واتسون در مورد اسید دزوکسی دیپونوکلئیک^۱ (DNA). ←

دیگری به نام مولکول تشکیل می دهند. چنانکه می دانیم چندین هزار نوع مولکول مختلف وجود دارد. به نظر می رسد تعداد مولکولها خیلی زیاد باشد، زیرا هر روز تعداد زیادی مولکولهای جدید به طور صنعتی در آزمایشگاههای شیمی ساخته می شود. بعضی مولکولها تنها دارای چند اتم هستند، مانند اسید کلریدریک که از یک اتم هیدروژن و یک اتم کلر ساخته شده است (شکل ۳.۱)، در صورتی که بعضی دیگر ممکن است دارای چند صد اتم باشند. به عنوان مثال می توان از پروتئینها، انزیمها و اسیدهای نوکلئیک^۱ (DNA و RNA) یا بعضی پلیمرهای آلی مانند پلی اتیلن یا کلرور پلی وینیل (PVC) نام برد (شکل ۴.۱). بالاخره مولکولها با هم جمع شده اجسام (یا ماده کپه ای) را تشکیل می دهند که به صورت جامدات، آبگونها و گازها ظاهر می شوند، هر چند که این تقسیم بندی چندان دقیق نیست* (شکل ۵.۱).

یک نوع ویژه و مهم مواد، موجود زنده یا ماده جاندار است که پروتوپلاسم نامیده می شود. در پروتوپلاسم مولکولها در یک سیستم بی اندازه منظم قرار دارند و دارای خصوصیات و کارکردهایی کاملاً متفاوت با ماده بیجان هستند. بدن انسان که تکامل یافته ترین تمام اجسام جاندار است، در حدود 10^{28} اتم دارد که بیش از همه از کربن، هیدروژن، اکسیژن و ازت تشکیل شده است.

منظومه شمسی مجموعه ای است از اجرام عظیم به نام سیاره ها که دور ستاره ای به اسم خورشید در گردش اند. یکی از این سیاره ها یعنی زمین ما دارای 10^{51} اتم است. خورشید تقریباً از 10^{57} اتم تشکیل شده است. منظومه شمسی به سهم خود بخش کوچکی از اجتماع بزرگی از ستارگان است که کهکشان راه شیری نام دارد. کهکشان راه شیری شامل حدود 10^{11} ستاره یا 10^{70} اتم و به شکل دیسکی است به شعاع 10^{21} m یا 1000000 سال نوری و بیشینه ضخامت 10^{20} m. کهکشانهای زیادی شبیه

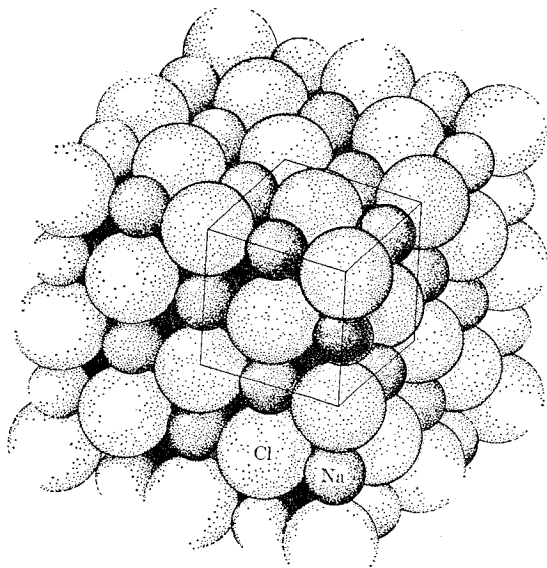
حالت دیگری از ماده به نام پلازما (plasma) وجود دارد و آن آمیزه گازی شکل از یونهای مثبت و منفی (یا ذرات باردار) است. قسمت اعظم ماده در جهان به صورت پلازماست.

→ یکی از دوااسیدنوکلئیکی که کروموزوم را تشکیل می دهد، DNA، حامل اطلاعات ژنتیکی و یکی از مولکولهای عظیم الحته ای است که مورد مطالعه دقیق قرار گرفته اند، پراش پرتوهای X نشان می دهد که DNA از دو مارپیچ پادموازی^۱ تشکیل شده است. در هر مارپیچ قند (S) و فسفات (P) به دنبال هم قرار می گیرند. قند به نام دزوکسی ریموز^۲ دارای ۵ اتم کربن است. دو مارپیچ به وسیله پیوند جفت هیدروژنهای پایه، به یکدیگر مربوط شده اند.

یکی از جفتها از دو ماده به نامهای «آدنین»^۳ و «تیمین»^۴ (A-T) و جفت دیگر از سیتوزین^۵ و گوانین^۶ (G-G) تشکیل شده که کد ژنتیک مولکول DNA به نظم و ترتیب هر یک از جفتهای پایه بستگی دارد. جفتهای پایه مانند زینه هایی در طول خط کشی مارپیچی بوده و هر زینه در حدود $11 \text{ \AA}$ می باشد. گام هر مارپیچ حدود $34 \text{ \AA}$ و قطر کل آن حدود $18 \text{ \AA}$ است. ($10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$ آنگستروم).

1. antiparallel	2. desoxyribose	3. adenine
4. thymine	5. cytosine	6. guanine

کهکشان ما مشاهده شده‌اند (شکل ۶.۱) که نزدیکترین آنها حدود ۲ میلیون سال نوری یا $2 \times 10^{22} \text{ m}$ از ما فاصله دارد. جهان حدوداً دارای 10^{20} ستاره است که حدود 10^{10} کهکشان را تشکیل می‌دهند و در کل شامل 10^{80} اتم است که فضایی به شعاع در حدود 10^{26} m یا 10^{10} سال نوری را اشغال می‌کنند.



شکل ۵.۱. ساختار بلورین کلر و سدیم. اتمها در یک شبکه منظم هندسی در حجمی نسبتاً بزرگ قرار گرفته‌اند. این ساختار در نمای بیرونی بلور ماکروسکوپیک یافت می‌شود.

در اینجا به طور طبیعی چند سؤال پیش می‌آید. چرا و چگونه الکترونها، پروتونها و نوترونها به هم می‌پیوندند تا اتمها تشکیل شوند؟ چرا و چگونه اتمها به هم مربوط می‌گردند تا مولکولها را بسازند؟ چرا و چگونه مولکولها به هم ملحق می‌گردند تا اجسام به وجود آیند؟ چگونه می‌شود ماده رویهم انباشته شود تا اجسامی از ذرات غبار مانند خیلی ریز گرفته تا سیارات خیلی بزرگ و از باکتری گرفته تا این موجود عجیب یعنی انسان به وجود آید. به طور نظری با وارد کردن مفهوم برهم‌کنش می‌توان به این سؤالات اساسی پاسخ داد. می‌گوییم در یک اتم ذرات با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند تا شکل پایداری به‌خود گیرند. اتمها، به نوبه خود با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند تا مولکولها تشکیل گردند و بالاخره از برهم‌کنش مولکولها جسم به وجود می‌آید. ماده کپه‌ای نیز بعضی برهم‌کنشهای آشکار، مانند برهم‌کنش گرانشی از خود نشان می‌دهد.

برهم‌کنش مفهوم جدیدی نیست و ما در صدد ابراز یک نظریه نو بنیاد نیستیم و نمی‌خواهیم مفاهیمی را که از مدتهای مدید وجود داشته‌اند واژگون سازیم. ما تنها اصطلاحی



شکل ۱.۶. سحابی بزرگ^۱ در صورت فلکی امراة المسلسله^۲ که M-31 نیز نامیده می شود و نزدیکترین کهکشان منظم به ماست. در فاصله ۲۵۰۰۰۰۰ سال نوری یا 2.5×10^6 متری منظومه شمسی قرار دارد. قطر آن در حدود ۱۲۵۰۰۰ سال نوری یا 1.25×10^5 m و شامل 10^{11} ستاره است (عکس با اجازه رصدخانه های مونت - ویلسون^۳ و مونت پالومار^۴)

را عوض و اصطلاح پذیرفته شده دیگری را برای تشریح ساخت جهان به کار می بریم که نتیجه قرنهای پژوهش است. مثلاً از ۳۰۰ سال پیش از میلاد ارسطو در کتاب السماء و العالم^۵ گفته است: آنها (اتمها) در تهی جا بجا می شوند، همدیگر را به چنگ می آورند، برخورد

-
1. Great Nebula	2. Andromeda	3. Mount Wilson
4. Mount Palomar Observatory	5. De Caelo	

می‌کنند، بعضی از آنها به هرسمتی که تصادف تعیین می‌کند به عقب رانده می‌شوند، بعضی دیگر برحسب تقارن شکل، قد، وضع و بزرگی‌شان، با درجات متفاوت در یوغ یکدیگر گرفتار می‌آیند، بدین طریق اجسام مرکب تشکیل می‌شود. . .» بیان فوق را می‌توان با گفتار لی^۱، برندهٔ جایزهٔ نوبل، مقایسه کرد که در سال ۱۹۶۵ (۱۳۴۴ ه.ش.) گفته است* «هدف غایی علوم عبارت است از یافتن مجموعهٔ ساده‌ای از اصول اساسی که به وسیلهٔ این اصول تمام حقایق شناخته‌شده فهمیده می‌شوند و نتایج جدید نیز پیش‌بینی می‌گردند. چون تمام مواد از ذره‌های اساسی یکسانی ساخته شده‌اند، زیربنای اصلی تمام علوم طبیعی باید برپایهٔ قوانین حاکم بر چگونگی رفتار این ذره‌های اساسی استوار گردد.»

هدف اولیهٔ یک فیزیکدان کشف برهم‌کنشهای مختلف ماده است، که مهمترین آنها عبارتند از گرانشی، الکترومغناطیسی و هسته‌ای. او همچنین می‌کوشد آنها را به صورت کمی بیان کند و بدین جهت لازم است از ریاضیات کمک گیرد. بالاخره، درصدد فرموله کردن قواعد عمومی مربوط به رفتار مادهٔ کپه‌ای برمی‌آید، رفتاری که ناشی از این برهم‌کنشهای اساسی است. تشریح رفتار ماده کپه‌ای الزاماً سرشتی آماری دارد، زیرا تعداد غیرقابل تصویری مولکول در آن دخالت دارند که بررسی دقیق حرکات یکایک آنها غیرممکن است. به‌عنوان مثال، در یک قطره آب تا 10^{20} مولکول آب وجود دارد.

فیزیک، برد گسترده‌ای از مقادیر را، از طول حدود 10^{-15} m و جرم 10^{-31} kg (مربوط به یک الکترون) گرفته تا طول حدود 10^9 m و جرم 10^{30} kg (مربوط به اجرام منظومهٔ شمسی) و حتی خیلی بالاتر را در برمی‌گیرد. با اینکه برای همهٔ آنها قوانین اساسی یکسان است ولی نحوهٔ بیان این قوانین و نوع تقریبی که به کار می‌رود به برد و ویژهٔ مقادیر به کار گرفته شده بستگی دارد.

۴.۱ رابطهٔ بین فیزیک و سایر علوم

در بخش ۱.۱ گفته شد و در اینجا تکرار می‌کنیم که هدف فیزیک توانایی بخشیدن به ما برای فهم اجزای بنیادین ماده و برهم‌کنشهای متقابل آنهاست، تا بدین طریق پدیده‌های طبیعت از جمله ویژگیهای مادهٔ کپه‌ای را بیان کنیم. بنا به این تعریف، مشاهده می‌شود که فیزیک اساسی‌ترین علم طبیعت است. شیمی با تعریفی که از آن می‌شود جنبهٔ خاصی از این برنامهٔ عظیم را اشغال می‌کند: یعنی کاربست قوانین فیزیک در ساختن مولکولها و وسایل گوناگون عملی برای تبدیل بعضی مولکولها به مولکولهای دیگر. زیست‌شناسی جهت تشریح فرایندهایی که در موجودات جاندار می‌گذرند تا حد زیادی به فیزیک و شیمی متکی است. کاربرد اصول فیزیک و شیمی در مسایل عملی، در پژوهشها و همچنین در فعالیتهای شغلی منشأ وجود شاخه‌های گوناگون مهندسی گردیده است. کاربرد مدرن هنر مهندسی و پژوهش، بدون درک عمیق از مفاهیم اساسی علوم طبیعی غیرممکن است.

1. T.D. Lee

* *Nature of Matter—Purposes of High Energy Physics*, Luke C.L. Yuan, editor. New York: Brookhaven National Laboratory, 1965.

فیزیک تنها از این نظر مهم نیست که زیر بنای مفاهیم و تئوریهای سایر علوم طبیعی است، بلکه از نظر عملی نیز از امتیاز ویژه‌ای برخوردار است، زیرا تکنیکهایی را فراهم می‌کند که در تمام رشته‌های پژوهشی محض یا عملی می‌توان به کار برد. نجوم، به تکنیکهای اپتیک، یناب‌نمایی^۱ و رادیویی نیازمند است. زمین‌شناسی روشهای گرانسی‌سنجی^۲، اکوستیکی، مکانیکی و هسته‌ای را در تحقیقات خود به کار می‌گیرد. همین امر را می‌توان در اقیانوس‌شناسی، هواشناسی و زلزله‌شناسی و غیره بیان کرد. یک بیمارستان مدرن مجهز به آزمایشگاههایی است که در آنها آخرین تکنیکهای فیزیک به صورتهای گوناگون به کار گرفته می‌شوند. به طور خلاصه، هیچگونه فعالیت پژوهشی، حتی در باستان‌شناسی، دیرینه‌شناسی، تاریخ و هنر بدون برخورداری از تکنیکهای مدرن فیزیک نمی‌توان انجام داد. تمام اینها در فیزیکدان این احساس رضایت را به وجود می‌آورد که وظیفه او تنها افزودن به معلومات ما در باره طبیعت نیست، بلکه سهم عمده‌ای نیز در ترقی اجتماعی بشر به عهده دارد.

۵.۱ روش تجربی

فیزیک همانند سایر علوم طبیعی نظری یا کاربردی، برای رسیدن به منظور خود به هشاده و تجربه بستگی دارد. مشاهده عبارت است از بررسی دقیق یک پدیده با یادداشت کردن و تجزیه و تحلیل عوامل و موقعیتهای گوناگون که روی این پدیده اثر دارند. متأسفانه شرایطی که این پدیده‌ها به طور طبیعی رخ می‌دهند بندرت سهل‌الحصول، و در بعضی حالات، بسیار اتفاقی‌اند، به طوری که تجزیه و تحلیل آنها روندی دشوار و بطیء دارد. بدین دلیل تجربه ضروری است. تجربه یا آزمایش عبارت است از مشاهده یک پدیده در شرایطی که از پیش با دقت کافی بررسی و تنظیم شده است. بدین طریق دانشمندی می‌تواند شرایط را به میل خود تغییر دهد، به طوری که باسانی به چگونگی تغییر پدیده با توجه به شرایط جدید آگاهی یابد. بدون تجربه، علوم جدید هرگز نمی‌توانستند به این درجه از پیشرفت نایل گردند. بدین دلیل است که آزمایشگاه برای دانشمندان این اندازه اساسی و ضروری است.

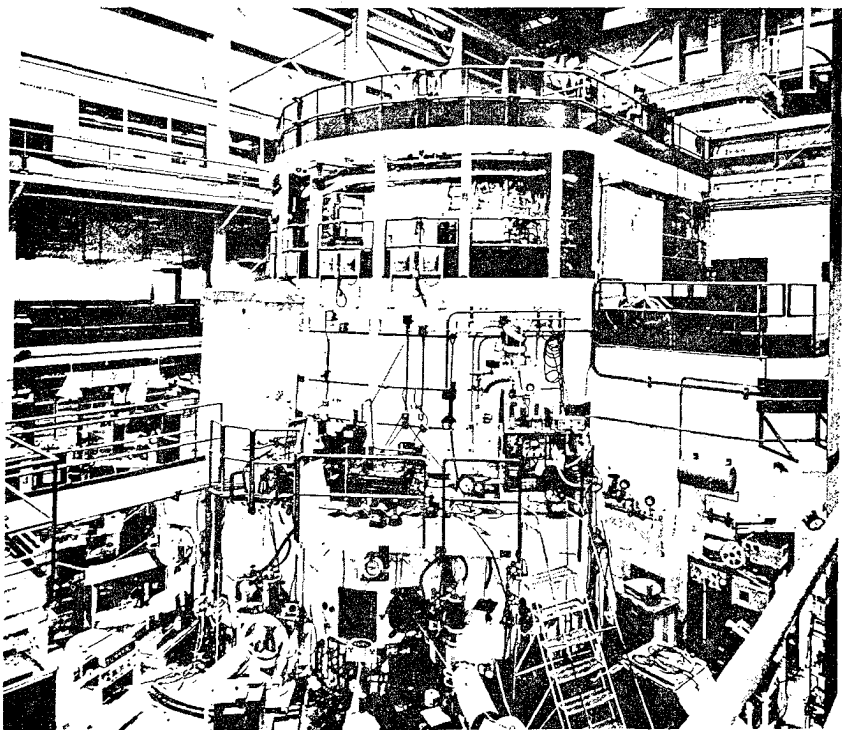
بدین منظور به شکل ۷.۱، راکتور تحقیقاتی آزمایشگاه ملی اوک ریج^۳ توجه کنید. مشاهده می‌کنیم که فضای اطراف راکتور از وسایل و اسبابهای آزمایشگاهی پر است. فیزیکدانان از بعضی این وسایل برای افزایش اطلاعات خود درباره ویژگیهای هسته‌ها یا تجزیه ساختمان بعضی مواد استفاده می‌کنند. سایر وسایل را می‌توان جهت تهیه مواد رادیوآکتیو برای مصارف شیمیایی، پزشکی، زیست‌شناسی، کشاورزی یا مهندسی به کار برد. وسیله‌ای که بیوفیزیکدانان برای مطالعه اثر پرتوها روی نمونه‌های بیولوژیکی استفاده می‌کنند ممکن است توسط دانشمندان دیگر جهت مطالعه اثر پرتوها روی مواد گوناگون به کار رود. به دانشجو توصیه می‌شود از یکی از آزمایشگاههای تحقیقاتی مدرن و مجهز بازدید کند، تا

1. spectroscopy

2. gravimetry

3. Oak Ridge

شخصاً احساسی از نقش تجربه در علوم به دست آورد.

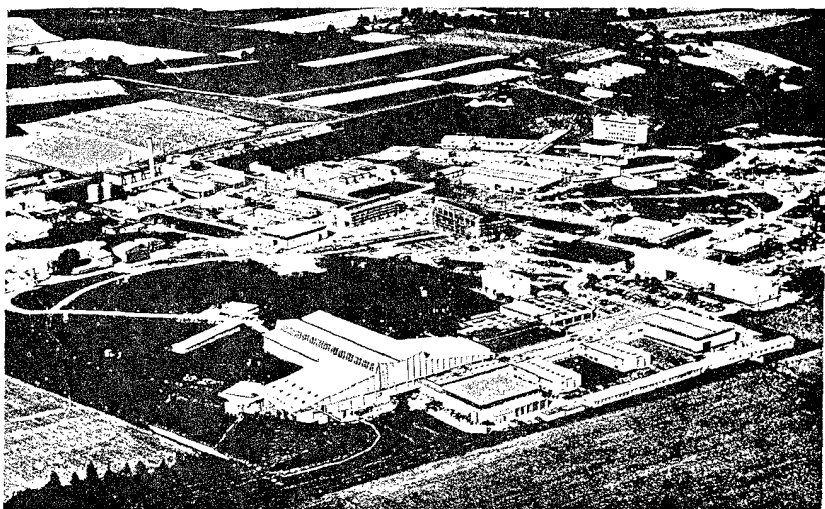


شکل ۷.۱. رآکتور هسته‌ای تحقیقاتی آزمایشگاه ملی اوک‌ریج که در تعداد بسیار زیادی از پژوهشهای بنیادی به کار می‌رود (عکس با اجازهٔ ORNL).

بدیهی است، تجربه تنها وسیله‌ای نیست که فیزیکدان در اختیار دارد. یک دانشمند، با استفاده از حقایق شناخته شده، می‌تواند به طور نظری به شناختهای تازه‌ای دست یابد. منظور ما از نظریه آن است که فیزیکدان برای وضعی که مورد بررسی اوست مدلی^۱ پیشنهاد می‌کند و با یاری گرفتن از روابط اثبات شده قبلی، یک استدلال منطقی و قیاسی به مدل نسبت می‌دهد. معمولاً برای بیان برهان از ابزارهای ریاضی استفاده می‌شود. امکان دارد نتیجه نهایی، پدیده جدیدی را که تا کنون مشاهده نشده است پیش‌بینی کند یا روابط بین چند پدیده را به ثبوت رساند. شناختی که فیزیکدان از راه نظری به دست می‌آورد، به نوبه خود، به وسیله دانشمندان دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد. آنها با تجربه‌های جدید خود مدل را مورد بررسی قرار می‌دهند تا محدودیتها و نواقص آن را تعیین کنند. سپس نظریه پرداز در مدل خود تجدیدنظر کرده و یا آن را تغییر می‌دهد به نحوی که با اطلاعات جدید سازگاری داشته باشد. همین رابطه تنگاتنگ بین نظریه و تجربه است که امکان پیشرفت و ترقی

مداوم علم را بر پایه‌های بسیار محکم فراهم می‌سازد.

در زمانهای سابق، یک دانشمند می‌توانست به طور مستقل و کمابیش در انزوا کار کند (مانند گالیله، نیوتون، هویگنز^۱ و دیگران) ولی، علم جدید به سبب پیچیدگی آن، عمدتاً، نتیجه کار گروهی است که در آن دانشمندان نظری و تجربی همفکری کرده و با هم کار می‌کنند. منظور از «باهم» این نیست که آنها با هم زیر یک سقف جمع می‌شوند. وسایل مدرن ارتباطات تبادل نظر را سریع و آسان ساخته است. فیزیکدانانی از ملیتهای مختلف و صدها کیلومتر دور از همدیگر، می‌توانند با هم کار کرده و روی طرح پژوهشی مشترکی همکاری کنند (شکل ۸.۱). این امر نه فقط در مورد فیزیک صادق است، بلکه شامل تقریباً تمام علوم می‌شود و این نشان دهنده ارزش جهانی علم است که کلیه سدهای بشری را درمی‌نوردد. می‌توان امیدوار بود که علم، از طریق این گونه همکاریها، به افزایش تفاهم بین انسانها کمک کند.



شکل ۸.۱. منظره عمومی سازمان پژوهشهای هسته‌ای اروپا^۲ (CERN). سال تأسیس ۱۹۵۴. در این سازمان علاوه بر همکاری دولتهای اروپایی (اتریش، اسپانیا، انگلیس، ایتالیا، بلژیک، جمهوری فدرال آلمان، دانمارک، سوئیس، سوئد، فرانسه، نروژ، هلند و یونان)، ایالات متحده آمریکا نیز مشارکت فعال دارد. محل آن در میرن^۳ سوئیس نزدیک مرز فرانسه قرار گرفته است. CERN بهترین و گسترده‌ترین امکانات پژوهشهای هسته‌ای از قبیل یک سنکروسیکلو-ترون^۴ ۶۰۰ MeV، یک سیکروترون-پروتون ۲۸ GeV (که مغناطیس آن در زیرزمین ساختمان دایره شکل قرار گرفته) و یک اتاقک حباب هیدروژن مایع به طول ۲ m و . . . را در اختیار پژوهندگان کشورهای اروپای غربی قرار می‌دهد. اشخاص مشغول به کار در این سازمان (حدود ۲۰۰۰ نفر)، از مردم کشورهای عضو، و بودجه سالانه آن نزدیک به ۳۰ میلیون دلار آمریکایی است.

1. Huygens
2. European Organization for Nuclear Research
3. Meyrin
4. synchro-cyclotron

فهرست منابع

1. «Truth in Physics», P. Schmidt, *Am. J. Phys.* 28, 24 (1960).
2. «Nature of Physics and Its Relation to Other Sciences», G. P. Thompson, *Am. J. Phys.* 28, 187 (1960).
3. «Empty' Space,» H. van de Hulst, *Scientific American*, November 1955, page 72.
4. «Some Reflections on Science and the Humanities,» J. Ashmore, *Physics Today*, November 1963, page 46.
5. «American Physics Comes of Age,» J. Van Vleck, *Physics Today*, June 1964, page 21.
6. «Science and Public Policy,» E. Daddario, *Physics Today*, January 1965, page 23.
7. «Physics and Biology,» W. A. Rosenblith, *Physics Today*, January 1966, page 23.
8. *Atoms and the Universe* (second edition), by G. Jones, J. Rotblat, and G. Whitrow, New York: Scribner's, 1963
9. *The Excitement of Science*, by J.R. Platt. Boston: Houghton Mifflin, 1962.
10. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass : Addison Wesley, 1933, Chaptres 1,2, and 3.
11. *Foundations of Modern Physical Science*, by G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1958, Chapters 8,12,14, and 15.

۲

سنجش و یکاها

مقدمه	۱۰۲
سنجش	۲۰۲
کمیت‌های اصلی و یکاها	۳۰۲
چگالی	۴۰۲
زاویه مسطحه	۵۰۲
زاویه فضایی	۶۰۲
دقت و درستی	۷۰۲
سنجش در آزمایشگاه	۸۰۲

۱۰۲ مقدمه

در حالت کلی، مشاهده یک پدیده هنگامی کامل است که به اطلاعات کمی منتهی شود. دستیابی به چنین اطلاعاتی نیاز به سنجش^۱ یک کمیت فیزیکی دارد. بنا براین سنجش اساس کار عادی روزانه فیزیکدان تجربی را تشکیل می‌دهد. لرد کلوین^۲ می‌گفت شناسایی یک کمیت کامل نیست اگر نتوان آن را با عدد بیان کرد. هرچند که این سخن بدون شک اغراق-آمیز است، ولی بازتاب یک حالت فکری است که یک فیزیکدان باید در طول پژوهشهای به آن وفادار بماند. درضمن، چنانکه در فصل ۱ متذکر شدیم، درنمایش یک خاصیت فیزیکی به صورت عددی، انسان نه تنها به استفاده از ریاضیات برای نشان دادن روابط بین کمتهای مختلف نیاز دارد، بلکه باید توانایی به کار بردن این روابط را نیز داشته باشد. بدین مناسبت ریاضی زبان فیزیک را تشکیل می‌دهد؛ بدون ریاضیات درک پدیده‌های فیزیکی، خواه از نقطه نظر تئوری و خواه از نقطه نظر تجربی، غیر ممکن است. ریاضیات ابزار و اسباب کار یک فیزیکدان است؛ او باید آن را با مهارت و کاردانی برای سهولت کار خود به کار گیرد نه جهت پیچیده کردن آن.

در این فصل ما غیر از تعریف یکا^۳های لازم برای بیان نتایج سنجش، در مورد بعضی تعریفهای مهم مانند چگالی، زاویه مسطحه، زاویه فضایی، ارقام بامعنی و نحوه تجزیه و تحلیل نتایج تجربی که در جریان مطالعه کتاب به آنها مرتباً برخورد می‌شود، بحث می‌کنیم.

۲۰۲ سنجش

سنجش فنی است که با استفاده از آن به یک خاصیت فیزیکی، پس از مقایسه با یک کمیت نمونه از جنس خودش، که به عنوان یکا برگزیده می‌شود، یک عدد نسبت می‌دهیم. بیشتر سنجشهایی که در آزمایشگاه انجام می‌شوند اساساً به اندازه گیری طول منتهی می‌گردند. با استفاده از این سنجش (همچنین بعضی قرار دادها که به صورت فرمول بیان می‌شوند)، کمیت مورد نظر به دست می‌آید. هنگام انجام یک سنجش آزمایشگر باید توجه داشته باشد کمترین اختلال^۴ ممکن در سیستم مورد مشاهده رخ ندهد. به عنوان مثال، هنگامی که دمای جسمی را اندازه می‌گیریم، دماسنجی را با آن در تماس قرار می‌دهیم. ولی وقتی که آنها با هم قرار گرفتند، بین دماسنج و جسمی که دمای آن باید اندازه گیری شود تبادل انرژی یا «گرما» به وجود می‌آید، بدین طریق جزئی تغییر در دمای جسم صورت می‌گیرد و در نتیجه کمیت مورد سنجش تغییر می‌کند. به علاوه، تمام سنجشها، به سبب نقص فنی غیر قابل اجتناب اسبابهای سنجش، یا به سبب محدودیت حواس (بینایی و شنوایی) که باید اطلاعات را ثبت کنند، دارای خطای تجربی^۵ است. از این رو، یک فیزیکدان تکنیک سنجش خود را باید طوری انتخاب کند که اختلال وارد در سنجش کمیت از خطای تجربی ناشی از اسباب اندازه گیری کمتر باشد. به طور کلی، هنگامی که کمتهای مورد سنجش به صورت

1. measurement

2. Lord Kelvin

3. unit

4. disturbance

5. experimental error

ماکروسکوپی باشند (یعنی اجسامی که از تعداد زیادی مولکول تشکیل می‌شوند) این کار همیشه ممکن است، زیرا در این موارد کافی است اسباب سنجشی به کار گرفته شود که اختلال حاصل از آن چندین بار از مرتبه بزرگی کمیت مورد سنجش کوچکتر باشد. بدین طریق، اختلال حاصل هر چه باشد، در مقابل خطای تجربی ناچیز خواهد بود. در موارد دیگر می‌توان مقدار اختلال را برآورد کرد و مقدار به‌دست آمده را تصحیح کرد.

در هنگام اندازه‌گیری ویژگیهای تک تک اتمها، مانند سنجش حرکت الکترونها، وضع بکلی فرق می‌کند. در این موارد ما قادر نیستیم برهم کنشی به وجود آوریم که از کمیت مورد سنجش کوچکتر باشد، زیرا چنین اسبابی وجود ندارد. اختلال وارد در عمل به همان بزرگی کمیت مورد اندازه‌گیری است که حتی نمی‌توان آن را حدس زد و یا به حساب آورد. بنابراین لازم است بین اندازه‌گیریهای ماکروسکوپی و اندازه‌گیریهای اتمی تمایزی در نظر گرفته شود. برای رویارویی با کمیت‌های اتمی به ساختار نظری ویژه‌ای نیاز است. در اینجا در مورد این ساختار ویژه که هکانیک کوانتومی^۱ نام دارد وارد گفتگو نمی‌شویم. یک الزام مهم دیگر این است که تعریف کمیت‌های فیزیکی باید عملیاتی^۲ باشد یعنی به طور ضمنی و یا صریح چگونگی سنجش کمیت تعریف شده را نشان دهد. به عنوان مثال هرگاه بگوییم سرعت، آهنگ^۳ جابجایی جسمی را بیان می‌کند، تعریف عملیاتی از سرعت نشده است. برعکس، هرگاه گفته شود سرعت مسافت پیموده شده تقسیم بر زمان است، سرعت به طور عملیاتی تعریف شده است.

۳.۲ کمیت‌های اصلی و یکاها

قبل از سنجش هر چیزی، ابتدا باید برای کمیت مورد اندازه‌گیری یکایی انتخاب کرد. با توجه به نیازهای سنجش، کمیتها و یکاها اصلی و فرعی وجود دارد. فیزیکدان چهار کمیت اصلی مستقل را می‌پذیرد: طول، جرم، زمان و بار الکتریکی*.

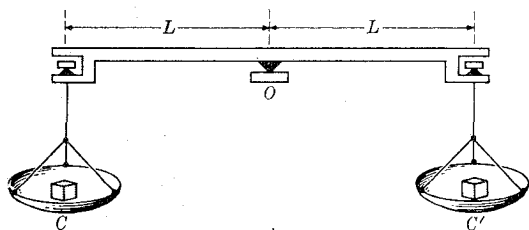
طول یک مفهوم اولیه است و همه به طور طبیعی معنای آن را درمی‌یابند؛ کوشش برای تعریف طول کار بیهوده‌ای است. در مورد زمان نیز چنین است. برعکس، جرم و بار الکتریکی مانند دو کمیت فوق مفاهیم ابتدایی نیستند. در فصلهای ۷ و ۱۳ مفهوم جرم به طور دقیق حلاجی خواهد شد، در اینجا فقط باختصار اشاره می‌کنیم که جرم، ضریبی است خاص هر ذره، که واکنش ذره را هنگام برهم کنش با سایر ذرات و همچنین شدت برهم کنشهای گرانشی آن را معین می‌کند.

بار الکتریکی که در فصل ۱۴ مورد بحث قرار می‌گیرد، ضریب مشخصه دیگر هر ذره است، که شدت برهم کنشهای الکترومغناطیسی آن را با ذرات دیگر تعیین می‌کند. احتمال دارد ضرایب دیگری که برهم کنشهای دیگری را بین ذرات مشخص می‌کنند وجود داشته

* با تعریف این چهار کمیت اصلی نمی‌خواهیم بگوییم که کمیت «اصلی» دیگری در فیزیک وجود ندارد، بلکه کمیت‌های دیگر طوری هستند که آنها را می‌توان به صورت ترکیبی از چهار کمیت فوق درآورد، یا لزومی ندارد برای بیان آنها یکای مخصوص تعریف شود.

باشند. ولی تاکنون اثری از آنها مشاهده نشده است. در حال حاضر لزومی برای وارد کردن کمیت‌های اصلی اضافی مشاهده نمی‌شود.

تعریف عملیاتی جرم را می‌توان با به کار بردن اصل ترازوی با بازوهای برابر، یعنی ترازوی متقارن نسبت به نقطه آویز O ، نیز پیدا کرد (شکل ۱.۲). جرماًهای دو جسم C و C' با هم برابر خوانده می‌شوند هرگاه با قرار گرفتنشان در کفه‌های ترازو تعادل ترازو به هم نخورد. به طور تجربی ثابت شده است که هرگاه یک ترازو در نقطه‌ای از زمین در حال تعادل باشد، به هر نقطه دیگری که انتقال داده شود ترازمندی ترازو به هم نمی‌خورد. بنابراین تساوی جرم ویژگی اجسام است و به محلی که آنها با هم مقایسه می‌شوند بستگی ندارد. اگر جرم مقایسه، یکای استاندارد باشد، جرم به صورت مضربی از جرم استاندارد به دست می‌آید. در واقع جرمی که بدین طریق به دست می‌آید جرم گرانشی^۱ است (فصل ۱۳). در فصل ۷ نیز وسیله مقایسه دینامیکی جرماًها مورد بحث قرار می‌گیرد. جرم به دست آمده به طور دینامیکی، جرم لخت^۲ نامیده می‌شود. چنانکه در فصل ۱۳ بحث خواهد شد، هیچگونه اختلافی بین دو روش اندازه گیری جرم پیدا نشده است.



شکل ۱.۲. ترازو با بازوهای برابر برای مقایسه جرم دو جسم

بجز چند مورد استثنایی، کلمه کمیت‌های به کار برده شده در فیزیک را، با توجه به تعریف آنها، می‌توان به صورت روابط ریاضی از چهار کمیت: طول، جرم، زمان و بار-الکتریکی بیان کرد. یکای تمام این کمیتها، که کمیت‌های فرعی نامیده می‌شوند، به نوبه خود با توجه به یکاهای اصلی از روی همین روابط تعریفی آنها بیان می‌گردند. در این صورت لازم است به منظور داشتن یک دستگاه یکاهای گویا، روی یکاهای چهار کمیت اصلی توافق شود. فیزیکدانان [در یازدهمین کنفرانس بین‌المللی اوزان و مقیاسها که در ۱۹۶۰ (۱۳۳۹ ه. ش.) در پاریس برگزار شد] موافقت کردند دستگاه یکاهای MKSC را به کار برند. در این کتاب نیز همین دستگاه یکاها به کار رفته است. در این دستگاه یکای چهار کمیت اصلی عبارتند از: متر، کیلو گرم، ثانیه و کولن، و بترتیب چنین تعریف می‌شوند:

متر با علامت اختصاری m یکای طول می‌باشد و آن طولی است ۱۶۵۰۷۶۳۷۳ برابر طول موج در خلأ پرتو قرمز اتم کریپتون ^{۸۶}Kr (در گذار از تراز انرژی $2P_{1/2}$ به تراز انرژی $5d_5$) (در شرایط معینی که در متن تصویب نامه تصریح شده است). دو نماد اخیر مربوط به حالت‌های فیزیکی ویژه اتم کریپتون است. تابش گسیل شده با آسانی قابل شناسایی است زیرا به صورت یک خط قرمز در بیناب ظاهر می‌شود.

کیلو گرم با علامت اختصاری kg، یکای جرم است و آن جرم کیلوگرم بین المللی قطعه‌ای از آلیاژ پلاتین-ایریدیم است که در اداره اوزان و مقیاسها در سور پاريس نگهداری می‌شود. در تمام کاربردهای عملی یک کیلوگرم برابر جرم $10^{-3} m^3$ آب مقطر در $4^\circ C$ است. در این صورت جرم $1 m^3$ آب برابر $10^3 kg$ می‌شود. حجم معادل $10^{-3} m^3$ یک لیتر نام دارد. جهت مشابهت با متر، می‌توان کیلو گرم را نیز به یک خاصیت اتمی وابسته ساخت. برای این کار می‌گوییم یک کیلوگرم برابر است با جرم $10^{25} \times 18805$ اتم ایزوتوپ کربن ^{12}C (۱۲). در حقیقت، این تعریف به عنوان معیاری جهت تعریف مقیاس بین المللی جرم اتمی پذیرفته شده است.

ثانیه با علامت اختصاری s، یکای زمان است. اتحادیه بین المللی اخترشناسی آن را برابر $1/31556925975$ سال شمسی ۱۹۰۰ تعریف کرده است. سال شمسی عبارت از مدت زمانی است که طول می‌کشد تا زمین در گردش خود به دور خورشید دو بار متوالی از نقطه اعتدال بهاری^۲ بگذرد که تقریباً هر سال با ۱ فروردین تطبیق می‌کند (شکل ۲.۲). همچنین ثانیه را می‌توان $1/86400$ روز شمسی میانگین تعریف کرد. روز شمسی میانگین، متوسط فاصله‌های زمانی بین دو عبور متوالی یک نقطه زمین از مقابل خورشید در طول یک سال می‌باشد. دشواری انتخاب تعریف فوق برای ثانیه این است به سبب کشند (جزر و مد)، دوره گردش وضعی زمین بتدریج رو به کاهش است. بنابراین باید یکا را نیز بتدریج تغییر داد. بدین مناسبت بود که یک سال ویژه، یعنی سال ۱۹۰۰ (۱۲۷۹ ه. ش.) برگزیده شد.

یکای زمان را نیز همانند یکای طول می‌توان به یک خاصیت اتمی وابسته کرد؛ آنچه که امروز ساعت‌های اتمی نام گرفته است. به عنوان مثال مولکول آمونیاک (NH_3) دارای ساختمان هرمی مثلث القاعده می‌باشد که در آن سه اتم هیدروژن هر کدام در یک رأس قاعده و اتم ازت در رأس هرم قرار دارد (شکل ۳.۲). بدیهی است برای اتم ازت، وضع قرینه N' نیز وجود دارد که در فاصله یکسان از صفحه $H-H-H$ ولی در طرف دیگر قرار گرفته است. اتم ازت می‌تواند با دوره ثابتی بین این دو وضع تعادل نوسان کند. در این صورت ثانیه را می‌توان زمان لازم برای انجام $10^{10} \times 2387$ نوسان تعریف کرد. اولین ساعت اتمی، بر این پایه، در سال ۱۹۴۸ در اداره ملی استانداردها ساخته شد و از آن به بعد ساعت‌های اتمی دیگر با مواد دیگر نیز ساخته شده‌اند. هنوز هیچگونه موافقت قطعی روی سنجه^۳ اتمی زمان اتخاذ نشده است، ولی یک کوشش عمومی برای چنین تعریفی مشاهده می‌گردد.*

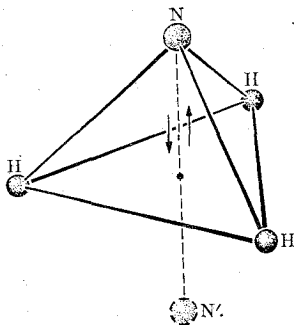
کولن^۴ با علامت اختصاری C، یکای بار الکتریکی است. تعریف دقیق و رسمی

1. Sevres 2. vernal equinox

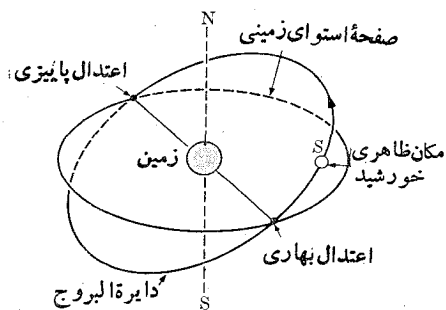
* در اکتبر ۱۹۶۴، کمیته بین المللی اوزان و مقیاسها به طور موقت یکای بین المللی زمان را از روی یک گذار اتمی خاص در اتم سزیوم (^{133}Cs) تعریف کرد، به این ترتیب، ثانیه موقتاً چنین تعریف شد: زمان لازم برای نوسانگری که اتمهای سزیوم را به آن گذار منکوره‌امی دارد، تا 9192631770 بار نوسان کند.

3. standard 4. coulomb

کولن در فصل ۱۴ خواهد آمد، ولی در حال حاضر می‌توانیم بگوییم کولن قدر مطلق بار منفی موجود در $10^{18} \times 6.2418$ الکترون، و یا بار مثبت موجود در همین تعداد پروتون می‌باشد.



شکل ۳.۲. نوسان اتم ازت بین دو وضع متقارن در مولکول آمونیاک



شکل ۲.۲. تعریف سال شمسی

یادآوری: به‌گفتهٔ دقیقتر، چهارمین یکای انتخاب شده در یازدهمین کنفرانس، غیر از متر، کیلوگرم و ثانیه، آمپر بود (به‌جای کولن) که یکای شدت جریان الکتریکی می‌باشد. در این صورت، کولن مقدار بار الکتریکی است که در مدت یک ثانیه از مقطع یک رسانای حامل شدت جریان یک آمپر عبور می‌کند. دلیل انتخاب آمپر این است که درست کردن سنجی از شدت جریان آسانتر است. سبب به‌کار بردن کولن به‌جای آمپر در این کتاب، بیشتر این بوده است که اساسی‌تر بودن سرشت بار الکتریکی را بیان کنیم، نه اجتناب از سفارشی‌های یازدهمین کنفرانس اوزان و مقیاسها. دستگاه یکاهای MKSA دستگاه یکاهای بین‌المللی است و با علامت اختصاری SI نشان داده می‌شود.

متر و کیلوگرم یکاهایی هستند که نخستین بار در جریان انقلاب کبیر فرانسه عنوان شدند، زمانی که دولت تصمیم گرفت به‌جای یکاهای گوناگون و متعدد و نامشخص آن زمان، یک دستگاه یکاهای گویا به‌وجود آورد، و از آن موقع به‌نام دستگاه‌متری^۱ شناخته می‌شوند. ابتدا متر را «یک ده میلیونیم ربع نصف النهار زمین» تعریف کردند. بدین منظور، با عملیاتی که چندین سال طول کشید، طول نصف النهاری را به‌طور دقیق اندازه‌گرفتند و میله‌ای از پلاتین به‌عنوان سنجی طول به‌اندازهٔ یک متر ساختند که در شرایط بسیار مشخصی در دمای 0°C در ادارهٔ بین‌المللی اوزان و مقیاسها در شهر سور نگهداری می‌شود. سنجشهای دقیق بعدی نشان دادند که متر نمونهٔ ساخته شده به‌اندازهٔ $10^{-4} \times 1.8$ از طول یک ده میلیونیم نصف النهار زمین کوتاه‌تر است. بنابراین نمونهٔ ساخته شده را به‌عنوان متر سنجی انتخاب کردند و بدین طریق ارتباط دقیق آن با نصف النهار زمین از بین رفت. نمونه‌هایی از متر سنجی ساخته شده در اختیار کشورهای عضو قرار دارد. با وجود این، داشتن یک سنجی با مشخصات پایدار و سهل‌الحصول برای هر آزمایشگاهی دارای مزایای بیشتری است و

بدین مناسبت بود که پرتو قرمز ^{86}Kr انتخاب گردید.

ولی آنچه مربوط به جرم است. یکای برگزیده شده از طرف دولت فرانسه گرم با علامت اختصاری g بود و آن معادل جرم یک سانتی متر مکعب آب مقطر در دمای 4°C است (اختیار شده است که در این دما چگالی آب بیشینه است. بنا براین یک کیلو گرم برابر است با 10^3 g . قطعه پلاتینی به جرم یک کیلوگرم ساخته شد و سپس تصمیم گرفته شد بدون آنکه آب ملاک قرار گیرد، همین قطعه فلز به عنوان کیلوگرم سنج انتخاب شود.

در بیشتر کارهای علمی، قبل از قبول دستگاه یکاهای MKSC، دستگاه یکاهای cgs را به کار می بردند. در این دستگاه یکای طول سانتی متر، یکای جرم گرم و یکای زمان همان ثانیه است. در دستگاه یکاهای cgs یکایی برای بار الکتریکی تعریف نشده است. با وجود این اسات کولن^۱ و اب کولن^۲ برتریب برابر $10^{-9}\text{ C} \times (1/3)$ و 10 C به عنوان یکاهای بار الکتریکی به کار می روند. دستگاه یکاهای MKSC بتدریج در کلیه کارهای علمی و عملی جانشین دستگاه یکاهای cgs می شود.

جدول ۱۰۲. پیشوندها با توان ده

بزرگی	نماد	پیشوند	
10^{-18}	a	اتو	atto-
10^{-15}	f	فمتو	femto-
10^{-12}	p	پیکو	pico-
10^{-9}	n	نانو	nano-
10^{-6}	μ	میکرو	micro-
10^{-3}	m	میلی	mili-
10^{-2}	c	سانتی	centi-
10^{-1}	d	دسی	deci-
$10^0 = 1$	-	واحد اصلی	-
10	D	دکا	deca-
10^2	H	هکتو	hecto-
10^3	K	کیلو	kilo-
10^6	M	مگا	mega-
10^9	G	جیگا	giga-
10^{12}	T	ترا	tera-

در بیشتر کشورهای انگلیسی زبان، دستگاه یکاهای دیگری در کارهای عملی و فنی به کار می‌رود. در این دستگاه یکای طول برابر فوت با علامت اختصاری ft، یکای جرم برابر پوند با علامت اختصاری lb و یکای زمان همان ثانیه با علامت s است. معادل این یکاها در دستگاه متری برابر است با:

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = 3.281 \text{ ft}$$

$$1 \text{ lb} = 0.4536 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg} = 2.205 \text{ lb}$$

بالاخره انتظار می‌رود در آینده دستگاه یکاهای MKSC تنها دستگاه یکاهایی شود که در سراسر جهان در کارهای علمی و مهندسی و عمومی به کار رود.

جهت آسانی کاربرد، اضعاف و اجزای یکاهای اصلی و فرعی بصورت توان ده به کار می‌روند و هر کدام به صورت پیشوندی جلو یکاها مطابق جدول ۱۰۲ می‌آید.

۴.۲ چگالی

جرم واحد حجم هر جسمی را چگالی^۱ یا جرم ویژه آن جسم می‌نامند. بدین طریق چگالی جسمی به جرم m و حجم V برابر می‌شود با

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.2)$$

چگالی بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب (kg m^{-3}) بیان می‌شود. چگالی آب برابر است با

$$\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3} \text{ (یا } 1 \text{ g cm}^{-3}, 62.4 \text{ lb ft}^{-3}\text{)}.$$

معادله (۱.۲) که در تعریف چگالی نوشته می‌شود، تنها در مورد اجسام همگن، یعنی اجسامی که تمام قسمتهای آن دارای ساختمان و ترکیب یکسان می‌باشند به کار می‌رود. در غیر این صورت چگالی میانگین به دست می‌آید. برای یک جسم غیر همگن، چگالی در نقاط مختلف یکسان نیست. برای به دست آوردن چگالی در یک نقطه مورد نظر جرم dm در داخل حجم جزئی dV در اطراف نقطه مذکور را اندازه می‌گیرند. با استفاده از رابطه ۱.۲ به دست می‌آید

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (2.2)$$

نظر به اینکه چگالی یک مفهوم آماری است، برای اینکه dV دارای معنای فیزیکی باشد باید آنقدر بزرگ باشد تا تعداد زیادی مولکول را دربرگیرد.

چگالی نسبی^۲ مفهوم مفید دیگری است. اگر ρ_1 و ρ_2 چگالیهای دو جسم مختلف باشند، چگالی نسبی آنها برابر است با

$$\rho_{21} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (۳.۲)$$

چگالی نسبی دارای یکا نیست زیرا یک کمیت نسبی می باشد، یعنی خارج قسمت دو کمیت از یک جنس است. معمولاً چگالی نسبی هر جسمی را نسبت به آب که به عنوان مبنا اختیار شده است بیان می کنند. چگالی نسبی چند جسم نسبت به آب در جدول ۲.۲ آمده است. همه مقادیر عددی، بجز آنهایی که مشخص شده اند، در شرایط استاندارد دما و فشار (STP: ۰°C, ۱ atm) به دست آمده اند.

جدول ۲.۲. چگالی (نسبت به آب)

جامد	آبگون	گاز
آهن	آب (۴°C) ۱۰۰۰	هوا 1.2922×10^{-3}
یخ	جیوه ۱۳۵۹	هیدروژن 8.988×10^{-5}
منیزیم	الکل اتیلیک ۰.۷۹۱	اکسیژن 1.42954×10^{-3}
آلومینوم	بنزین ۰.۶۷	ازت 1.25055×10^{-3}
اورانیوم	هوا (۱۴۷°C) - ۰.۹۲	هلیوم 1.7847×10^{-4}

۵.۲ زاویه مسطحه

زاویه مسطحه با دویکای درجه و رادیان اندازه گیری می شود. در فیزیک یکای دوم اهمیت بیشتری دارد. محیط دایره به ۳۶۰ درجه با علامت اختصاری (°) تقسیم می شود. به عنوان مثال زاویه قائمه را به صورت ۹۰° می نویسند و می خوانند «نود درجه». هر درجه به ۶۰ دقیقه با علامت اختصاری (′) و هر دقیقه به ۶۰ ثانیه با علامت اختصاری (″) تقسیم می شود. بدین طریق زاویه ای به اندازه بیست و سه درجه و چهار و دو دقیقه و سی و چهار ثانیه بدین صورت نوشته می شود: ۲۳°۴۲′۳۴″.

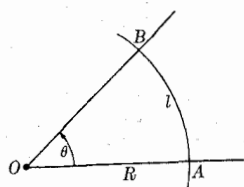
برای بیان یک زاویه بر حسب رادیان، کمان AB را با شعاع اختیاری R و به مرکز O رأس زاویه، رسم می کنیم (شکل ۴.۲). در این صورت اندازه زاویه θ بر حسب رادیان، با علامت اختصاری (rad) برابر است با

$$\theta = \frac{l}{R} \quad (۴.۲)$$

که در آن l طول کمان AB است. این روش برای پایه متکی است که برای یک زاویه معلوم، نسبت l/R ثابت و مستقل از شعاع R است و زاویه را بر حسب رادیان بیان می کند. توجه

داشته باشید که l و R باید بر حسب یکاهای یکسان طول باشند. رابطه (۴.۲) را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$l = R\theta \quad (5.2)$$



شکل ۴.۲

با توجه به اینکه طول محیط یک دایره برابر $2\pi R$ است، می بینیم که زاویه مسطحه کل اطراف یک نقطه بر حسب رادیان برابر است با $2\pi \text{ rad}$. بنابراین $2\pi R/R = 2\pi \text{ rad}$. بنا بر این رادیان معادل 360° است:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.017453 \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44.9''$$

۶.۲ زاویه فضایی

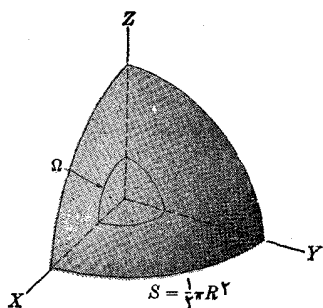
چنانکه شکل ۵.۲ نشان می دهد، زاویه فضایی^۱ فضای محتوی داخل یک سطح مخروطی (یا هرمی) است. اندازه زاویه فضایی بر حسب استرادیان، با علامت اختصاری sterad، با رسم یک سطح کروی به شعاع اختیاری R و به مرکز O رأس زاویه و با به کار بردن رابطه زیر به دست می آید:

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (6.2)$$

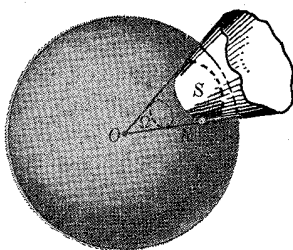
که در آن S مساحت یک عرقچین کروی است که زاویه فضایی را زیر پوشش خود می گیرد. چون مساحت یک کره برابر $4\pi R^2$ است، در نتیجه زاویه فضایی کل اطراف یک نقطه برابر 4π می شود (شکل ۵.۲). زاویه فضایی متشکل از سه محور متعامد OX ، OY و OZ برابر $4\pi/8$ یا $\pi/2$ استرادیان است (شکل ۶.۲).

اگر زاویه فضایی کوچک باشد، مساحت S برابر dS می شود. در این صورت dS دیگر لزوماً یک سطح عرقچین کروی نیست، بلکه ممکن است آن را یک سطح تخت عمود بر OP در نظر گرفت به طوری که

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} \quad (7.2)$$



شکل ۶.۲

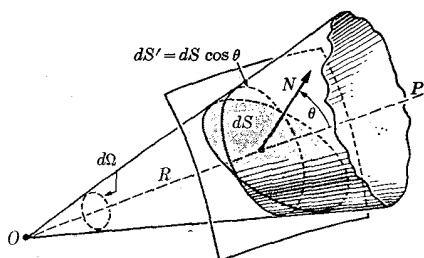


شکل ۵.۲. زاویه فضایی

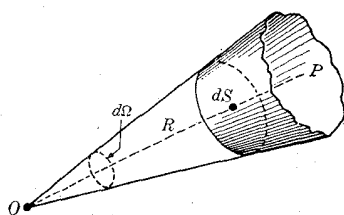
در بعضی حالات سطح dS بر OP عمود نیست، بلکه عمود بر این سطح با OP زاویه θ می‌سازد (شکل ۸.۲). در این صورت لازم است dS را روی صفحه‌ای عمود بر OP تصویر کنیم، بدین طریق به دست می‌آید $dS' = dS \cos \theta$ و بالاخره

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{R^2} \quad (۸.۲)$$

این رابطه در بحثهای بعد بسیار مورد استفاده قرار خواهد گرفت.



شکل ۸.۲



شکل ۷.۲

۲.۲ دقت و درستی

معمولاً کلمه دقت^۱ مضمون درستی^۲ را در خود دارد. اما در دنیای سنجش منظور از دقت، میزان نادرستی است. بدین معنی که وقتی یک خاصیت فیزیکی به وسیله یک کمیت عددی و بایکایی بیان می‌شود، این کمیت عددی به بعضی سازه‌های مختلف، مانند اسباب سنجش خاص، نوع و تعداد سنجشهای انجام یافته و روشی که آزمایشگر برای خواندن زینه‌های روی اسباب به کار می‌برد، بستگی دارد. در این صورت هرگاه همراه کمیت عددی خوانده

شده، کمیت عددی دیگری که دقت اندازه گیری را می‌رساند نباشد، عدد به دست آمده به همان اندازه خوب است که بی‌مصرف. احتمال دارد عددی کاملاً درست باشد ولی دقیق نباشد، زیرا شخصی که این عدد را یادداشت کرده فراموش کرده باشد حداقل اشاره‌ای به روش اندازه گیری خود کند.

برای روشن کردن مطالب فوق چند مثال می‌آوریم. هرگاه سیدی را که محتوی هفت سیب است بینیم و بگوییم «هفت سیب در داخل سبد می‌بینم» بدین طریق ارزش عددی کمیت تأیید می‌شود. این شمارش از دقت و درستی برخوردار است. زیرا تعداد سیبهای شمرده شده کم و عدد درستی است. هرگاه دو نفر باشند، یکی از آنها به تائی سیبها را در سبد قرار دهد و نفر دیگر به تائی سیبها را از داخل سبد بیرون بیاورد، در این صورت، در هر لحظه می‌توان ارزیابی درست و دقیق از سیبها به دست داد.

اکنون مسئله را کمی پیچیده‌تر می‌کنیم. تعداد سکنة روستایی را در نظر می‌گیریم. در اینجا تعداد بیشتر است ولی باز هم چندان زیاد نیست و قطعاً عدد صحیح است. ناظری که در تنها کوچه این روستا جای گرفته است، با زیر نظر گرفتن رفت و آمد مردم پس از یک سرشماری می‌تواند ارزیابی درستی از سکنة روستا بکند، ولی مقدار عددی الزاماً دقیق نیست زیرا برای این ناظر خیلی دشوار است لحظات تولد و مرگ اهالی را روشن کند. هرگاه این کار از سطح روستا به بخش یا شهرستان کشیده شود، وظیفه ناظر خیلی دشوارتر می‌شود. حال سؤال می‌کنیم: چه نیازی به شمارش درست سکنة یک بخش وجود دارد؟ در واقع برای تأمین بعضی خدمات برای تمام سکنة، نیازی به دانستن تعداد درست سکنة در هر لحظه نیست. باید گفت ارزیابی درست تعداد ساکنین منطقه امری است ضروری، ولی دقت این ارزیابی به نوع خدمت ویژه مورد نظر بستگی دارد. مثلاً نوع دقت عددی در سرشماری، به منظور تأسیس مدارس جدید در یک ناحیه با نوع دقت لازم برای ایجاد مرکز آتش نشانی در همین ناحیه یکسان نیست. هرگاه جمعیت بخشی با دقت ۱٪ داده شود بدین معنی است که عدد داده شده ممکن است یک درصد بیشتر و یا یک درصد کمتر از جمعیت حقیقی آن بخش باشد، ولی نمی‌دانیم که کدام یک از این دو است، و در خیلی از موارد اهمیت چندانى ندارد. در یک ده با ۲۰۰ نفر سکنة دقت ۱٪، بدین معنی است که تعداد سکنة را با دقت کمتر و یا دقت بیشتر می‌دانیم. در یک شهر ۱۰۰ ۰۰۰ نفری، دقت در حدود ۱۰۰۰ نفر است. اگر تعداد جمعیت ایران را با دقت ۱٪ بدانیم، این رقم از حدود ۳۵۰۰۰۰ نفر تجاوز می‌کند و ما جمعیت ایران را بدرستی نمی‌دانیم. بدیهی است در بعضی شرایط دقت بالاتر از ۱٪ مورد نیاز است. در صورتی که در موارد دیگر، دقت کمتر از آن نیز کاملاً کفایت می‌کند. تاکنون کوشش ما منحصر به خود عملیات شمارش بود و فرض را بر این نهادیم که با داشتن اطلاعاتی کافی و امکان بررسی سریع این اطلاعات می‌توان جمعیت درست را به دست آورد. و نیز گفته شد که آیا لازم است این جمعیت بدقت شناخته شود یا نه. اکنون با باید توجه داشته باشیم که عملیاتی وجود دارد که به عدد درستی از یکاها منتهی نمی‌شود. به عنوان مثال می‌دانیم که هر نقطه از یک اتاق، دارای دمای درستی است، ولی مقدار این دما بستگی به تعریف آن دارد، زیرا دما مفهومی است بشری. با این همه ما دما را از طریق شمارش

نمی‌سنجیم بلکه طول ستون جیوه را اندازه می‌گیریم، ستونی که طول آن نمایشگر دماست. به دلایل گوناگون، طول ستون جیوه که از خواندنیهای مختلف به دست می‌آید، یکی نیست هر چند که دما ثابت مانده باشد. یکی از مهمترین دلایل گوناگونی نتیجه خواندنها، آن است که فاصله بین زینه‌های خط‌کش محدود است. مثلاً روی متر اندازه‌گیری فاصله بین دو زینه یک میلی متر (mm) است. بنابراین اگر طولی را با این متر خیلی دقیق اندازه بگیریم، عدد خوانده شده دهر طرف (یا انتهای طول) دارای خطایی است که می‌تواند تا ۵ mm برسد. گونه‌های دیگر خطا در خواندن وجود دارند که در کتابهای تخصصی مربوط به اندازه‌گیریها یافت می‌شوند. (به مراجع متون و مقاله‌های ذکر شده در آخر فصل مراجعه کنید.)

دقت یا میزان نادرستی یک عدد به ما اجازه می‌دهد ارقام با معنی^۱ عدد مربوط به کمیت مورد نظر را تعیین کنیم. به عنوان مثال، هرگاه سنجشی با عدد $(\pm 1\%)$ 642854389 نشان داده شود، بدین معنی است که دقت خواندن روی آن در حدود ۴۶ است. در این صورت باید تنها ارقامی را نگه داشت که حقیقتاً با معنی هستند. در مثال بالا، عدد باید با $1\% \pm 642$ یا 6 ± 642 نشان داده شود. در این کتاب به برخی خواص فیزیکی (مانند سرعت نور یا عدد آووگادرو^۲) برخورد می‌کنیم که پنج رقم با معنی اول آن نوشته شده‌اند، حتی اگر مقدار آنها با دقت‌های بیشتر از آن هم معلوم باشد، و دقت نیز مشخص نشده است. اگر دانشجو بخواهد از این اعداد در محاسبه نادرستی استفاده کند، می‌تواند برای آخرین رقم با معنی دقتی در حدود ± 1 در نظر بگیرد.

هشگامی که لازم می‌آید با استفاده از اعدادی با دقت‌های متفاوت یک رشته عملیات ریاضی انجام داده شود، آسانترین روش این است که عملیات ضرب یا هر عمل دیگری را، بدون توجه به ارقام با معنی تا انتها انجام دهیم. تعداد ارقام با معنی (یعنی دقت) نتیجه نهایی برابر خواهد بود با تعداد ارقام با معنی عددی که کمترین دقت را داشته است.

۸.۲ سنجش در آزمایشگاه

به کمک یک مثال نسبتاً ساده، یعنی دوره آونگ، روشهایی را که برای به دست آوردن مقدار عددی مربوط به یک خاصیت فیزیکی به کار می‌روند، تشریح می‌کنیم. دوره یک آونگ مدت زمانی است که طول می‌کشد تا آونگ دو بار به طور متوالی و در یک جهت از یک نقطه معین بگذرد. آونگی را به نوسان درآورده و دوره یک نوسان آن را ۵۰ بار اندازه گرفته‌ایم. جدول ۳.۲، این ۵۰ اندازه‌گیری را بر حسب ثانیه نشان می‌دهد.

از جدول پیدا است که دوره معینی برای آونگ وجود ندارد. کاری که ممکن است انجام داد این است که میانگین این ۵۰ بار اندازه‌گیری را محاسبه و سپس دقت روی این مقدار میانگین را تعیین کنیم. با جمع کردن هر ۵۰ عددی که برای دوره به دست آمده و تقسیم آن بر تعداد کل اندازه‌گیریها (یعنی عدد ۵۰) دوره میانگین آونگ برابر ۳۲۴۸ میلی ثانیه به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که فعلاً نتیجه را به صورتی که هست نگه می‌داریم،

ولی بموقع آن را تصحیح خواهیم کرد.) بین مقدار میانگین به دست آمده و هر یک از اندازه-

جدول ۳.۲.

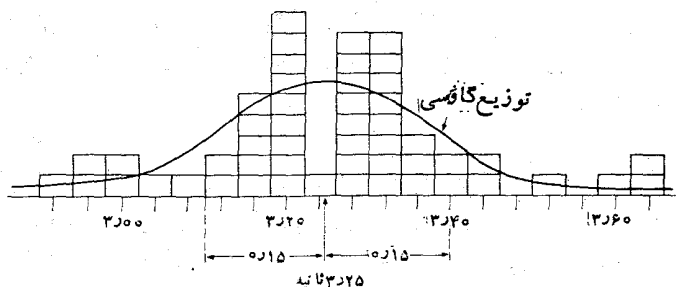
۳۱۲	۳۱۸	۳۲۵	۳۳۲	۳۳۲
۳۶۲	۳۳۳	۳۳۰	۳۴۲	۳۲۷
۳۳۳	۳۲۸	۳۱۵	۳۱۲	۳۲۰
۳۱۷	۳۱۸	۳۲۰	۳۱۸	۲۹۸
۳۱۷	۳۵۲	۳۳۵	۳۳۳	۳۳۸
۳۵۸	۳۰۲	۳۰۰	۳۳۲	۳۰۸
۳۲۷	۳۳۵	۳۶۳	۳۱۵	۳۳۸
۳۰۰	۳۱۵	۳۲۷	۲۹۰	۳۲۷
۲۹۷	۳۱۸	۳۲۸	۳۲۸	۳۳۷
۳۱۸	۳۴۵	۳۱۸	۳۲۷	۳۲۰

گیریها اختلافی وجود دارد. این اختلاف بین مقدار میانگین و مقدار هر سنجش، انحراف^۱ را نشان می دهد. مجموع مقادیر مطلق انحرافات تقسیم بر دفعات اندازه گیری انحراف میانگین را به دست می دهد، که نمایشی از دقت اندازه گیری است. در مثال فوق، انحراف میانگین دوره ۱۲ ثانیه است. بنابراین برای نشان دادن دوره آونگ آن طور که در آزمایشگاه به دست آمده باید نوشت ۰۱۲ ± ۳۲۵ ثانیه یا (تقریباً) $۳۲۵ \pm ۴\%$ ثانیه.

شیوه دیگر بیان دقت یک سنجش استفاده از انحراف ریشه مربعی میانگین^۲ (rms) است که عبارت است از ریشه دوم مجموع مربعات انحرافات تقسیم بر تعداد سنجشها. در مورد اندازه گیریهای دوره آونگ، انحراف rms برابر است با ۱۵ دوره ثانیه. ارزش آن را دارد که برای محاسبه rms کمی زحمت اضافی تحمل شود، زیرا می توان به آن معنای نسبتاً ساده ای مربوط ساخت. اگر فرض کنیم کترگی^۳ ظاهر شده در رشته سنجشها، بنیادی نبوده، بلکه تنها ناشی از افت و خیزهای بهنجار^۴ باشند، انحراف rms نشان می دهد که تقریباً $\frac{2}{3}$ کل سنجشها در حدود مقدار متوسط می باشند: به گفته دیگر، اکنون اطمینان داریم که اگر یکبار دیگر بخواهیم دوره این آونگ را با همان وسیله اولی اندازه بگیریم ۶۷% شانس وجود دارد که کمیت عددی نمایشگر دوره از ۳۴۰ ثانیه بزرگتر نبوده و نیز از ۳۱۰ ثانیه کوچکتر نباشد. برای نشان دادن این وضع، با شیوه مختصر متفاوتی چنین عمل می کنیم: روی شکل ۹.۲ نمودار ستونی توزیع بسامدهای خوانده شده ترسیم شده است. روی

1. deviation
2. root-mean-square deviation
3. randomness
4. normal fluctuation

دفعاتی که یک خواندن و یا عدد نزدیک به آن تکرار می شود، کترگی واضحی به چشم می خورد. ولی با افزایش دفعات سنجش و خواندن، بتدریج نقش مشخصی شروع به شکل گرفتن می کند و نشان می دهد که هرچه اختلاف مقدار خوانده شده با مقدار میانگین بیشتر باشد، احتمال خواندن مجدد آن کمتر است. از این ترسیم منحنی معروف زنگ حاصل می شود. تجزیه و تحلیل این منحنی نشان می دهد که بتدریج که به تعداد دفعات خواندن افزوده می شود انحنای منحنی با وضوح بیشتری نمایان می شود و شکل هندسی مشخصی به خود می گیرد که آن را توزیع گاوسی یا بهنجار می نامند.



شکل ۹.۲. نمودار ستونی تعداد سنجشهای دوره یک آونگ، مطابق جدول ۳.۲ فاصله بین دو نشانه روی محور زمان ۵۰۴ ثانیه می باشد. توزیع گاوسی هر بوط به سنجش ها با خط پر رسم شده است.

فهرست منابع

1. «Symbols, Units, and Nomenclature in Physics,» *Physics Today*, June 1962, Page 20.
2. «Mathematics in the Modern World,» R. Courant, *Scientific American*, September 1964, page 40.
3. «Mathematics in the Physical Sciences,» F. Dyson, *Scientific American*, September 1964, page 128.
4. «Probability » M. Kac, *Scientific American*, September 1964, page 92.
5. «The Limits of Measurement,» R. Furth, *Scientific American*, July 1950, page 48.
6. *A Brief History of Weights and Measures Standards of the United States*. Washington, D. C.: Government Printing Office. 1963.
7. *Experimentation: An Introduction to Measurement Theory and Experiment Design*, by D. Baird. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1962.
8. *Experimentation and Measurement*, by W. Youden. New York: Scholastic Book Services, Scholastic Magazines, Inc., 1962.
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 5 and 6.
1. Gaussian (normal) distribution

مسئله ها

- ۱.۲. جرمهای اتمی داده شده در جدول پ. ۱. بر حسب یکای جرم اتمی^۱، با علامت اختصاری amu نوشته شده اند. یک amu برابر است با 10^{-27} kg $\times 1.6604 \times 10^{-27}$ (الف) یک اتم هیدروژن و (ب) یک اتم اکسیژن را بر حسب کیلوگرم و گرم بنویسید.
- ۲.۲. یک مولکول آب از یک اتم اکسیژن و دو اتم هیدروژن تشکیل شده است. در یک گرم، در ۱۸ گرم و در یک سانتی متر مکعب آب چند مولکول وجود دارد؟
- ۳.۲. در بخش ۳.۲ گفتیم که یک کیلوگرم را می توان برابر با جرم $10^{25} \times 1.6604 \times 10^{-27}$ اتم ایزوتوپ کربن ۱۲ (^{12}C) تعریف کرد. جرم ^{12}C درست برابر $12 \times 1.6604 \times 10^{-27}$ amu تعیین شده است. تحقیق کنید که این تعریف با مقدار داده شده برای amu در مسئله ۱.۲ سازگار است.
- ۴.۲. فرض کنید مولکولهای هیدروژن، اکسیژن و ازت، هر کدام از دو اتم یکسان تشکیل شده اند. تعداد مولکولهای هر یک از این گازها را در یک متر مکعب [در شرایط متعارفی دما و فشار (STP)] حساب کنید. برای محاسبه از چگالیهای نسبی داده شده در جدول ۲.۲ استفاده کنید. همین محاسبه را در مورد سایر گازها نیز انجام دهید. از این پاسخها چه نتیجه کلی می توان گرفت؟
- ۵.۲. فرض کنید هوا از ۲۰٪ اکسیژن و ۸۰٪ ازت تشکیل شده است و هر یک از این گازها دارای یک مولکول دو اتمی می باشند، جرم مولکولی «موثر» هوا را حساب کنید. تعداد مولکولها در یک cm^3 (در STP) برآورد کنید. چند مولکول اکسیژن و چند مولکول ازت در این حجم وجود دارد؟
- ۶.۲. چگالی گاز بین ستارگان در کهکشان ما در حدود $10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$ برآورد شده است. به فرض اینکه این گاز منحصراً هیدروژن باشد، تعداد اتمهای هیدروژن در یک سانتی متر مکعب را برآورد کنید. نتیجه را با نتیجه ای که برای هوا (مسئله ۵.۲) به دست آمد، مقایسه کنید.
- ۷.۲. شعاع یک لیوان محتوی آب ۲ cm است. در طول ۲ ساعت، بر اثر تبخیر، ۱ mm ارتفاع آب پایین می رود. سرعت تبخیر آب را بر حسب گرم بر ساعت برآورد کنید. چند مولکول آب در هر ثانیه از هر cm^2 سطح آب تبخیر می گردد؟ (به خواننده توصیه می کنیم شخصاً این آزمایش را انجام دهد و نتایج به دست در روزهای مختلف را یادداشت کند. چرا نتیجه های به دست آمده در روزهای مختلف باهم فرق دارند؟)
- ۸.۲. یک مول^۲ از هر ماده ای عبارت است از مقداری از آن ماده، بر حسب گرم، که به طور عددی برابر جرم مولکولی همان ماده است که بر حسب amu بیان شده باشد. (در مورد یک عنصر شیمیایی و نه یک جسم مرکب، جرم اتمی را به کار می برند). تحقیق کنید که تعداد مولکولها (یا اتمها) در یک مول از هر ماده ای باهم برابر و مساوی $10^{23} \times 6.0225$

است. این عدد را عدد آووگادرو می نامند که یکی از ثابتهای مهم فیزیک می باشد.

۹.۲. با استفاده از جدولهای پ. ۱ و ۲.۲، فاصله میانگین بین مولکولها را در هیدروژن در STP (گاز)، در آب (آبگون) و در آهن (جامد) به دست آورید.

۱۰.۲. عملاً تمام جرم یک اتم در هسته آن است. شعاع هسته اورانیوم برابر 10^{-15} m است. با به کار بردن جرم اتمی اورانیوم داده شده در جدول پ. ۱، چگالی «ماده هسته‌ای» را به دست آورید. این هسته شامل ۲۳۸ ذره یا «هستک»^۱ می باشد. فاصله میانگین بین این هستکها را برآورد کنید.

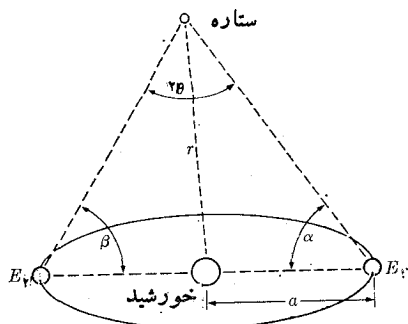
۱۱.۲. با استفاده از جدول ۱.۱۳، چگالی میانگین زمین و خورشید را به دست آورید. اگر این مقادیر با مقادیر داده شده در جدول ۲.۲ مقایسه شوند، چه نتیجه‌ای راجع به ساختار این اجسام به دست می آید؟

۱۲.۲. با استفاده از اطلاعات داده شده در بخش ۳.۱، چگالی میانگین جهان را به دست آورید. به فرض اینکه توزیع اتمها در تمام جهان یکنواخت باشد، چند اتم در یک سانتی متر مکعب وجود خواهد داشت؟ همه اتمها را اتم هیدروژن فرض کنید.

۱۳.۲. سرعت نور در خلأ برابر است با $10^8 \text{ m s}^{-1} \times 2.9979 \times 10^8$. آن را برحسب کیلومتر بر ساعت (km hr^{-1}) بنویسید. یک پرتو نور چند بار در یک ثانیه دور زمین می چرخد؟ (برای داده‌های مورد نیاز درباره زمین به جدول ۱.۱۳ مراجعه کنید). نور در خلأ در مدت یک سال چه فاصله‌ای را می پیماید؟ این فاصله را یک سال نوری می نامند. شعاع حرکت انتقالی زمین دور خورشید $10^{11} \text{ m} \times 1.49$ است. این طول را یک واحد نجومی می نامند. یک سال نوری را برحسب واحد نجومی بنویسید (به مسئله ۱۳.۲ مراجعه کنید).

۱۵.۲. اختلاف در راستای ظاهری دید یک شیء ناشی از جابجایی مکان ناظر، اختلاف منظر^۲ نامیده می شود (مدادی را جلو خود بگیرید؛ ابتدا چشم راست و سپس چشم چپ خود را ببندید و مداد را در دو حالت تماشا کنید. متوجه خواهید شد که هر بار خط منظر یا جای مداد تغییر می کند). اختلاف منظر ستاره‌ای تغییر مکان ظاهری یک ستاره است که از حرکت انتقالی زمین دور خورشید ناشی می شود. اختلاف منظر به طور کمی برابر است با نصف زاویه حاصل از دو خط منظر یک ستاره از دوسر قطر مدار انتقالی زمین E_p و E_1 ، که بر خط واصل ستاره و خورشید عمود است (شکل ۱۰.۲)؛ $\theta = (180 - \alpha - \beta) / 2$. زاویه های α و β در دو وضع E_p و E_1 اندازه گیری می شوند. فاصله زمانی E_p و E_1 a ماه است. r فاصله ستاره از خورشید، از رابطه $a = r\theta$ به دست می آید. در این رابطه a شعاع میانگین مدار زمین به دور خورشید و θ برحسب رادیان می باشد. آلفا-قنطورس^۳ ستاره‌ای است با بزرگترین اختلاف منظر (یعنی نزدیکترین ستاره) به اندازه $76''$. فاصله این ستاره را از خورشید برحسب متر، سال نوری و واحد نجومی به دست آورید.

۱۶.۲. یک پارسک^۴ فاصله یک ستاره از خورشید است هرگاه اختلاف منظر آن $1''$ باشد.



شکل ۱۰.۲

یک پارسک را بر حسب متر، سال نوری و واحد نجومی بنویسید. فاصله بر حسب پارسک را به صورت تابعی از اختلاف منظر بر حسب ثانیه کمانی بنویسید.

۱۷.۲. فاصلهٔ سانفرانسیسکو از نیویورک در امتداد بزرگترین دایره‌ای که از این دو شهر می‌گذرد (نصف‌النهار)، ۴۱۳۷ کیلومتر می‌باشد. زاویه‌ای را که قایمهای این دو محل با یکدیگر می‌سازند حساب کنید.

۱۸.۲. با استفاده شرح زیر شکل ۶.۱، قطرهاهی سحابی بزرگ M-۳۱ را، به‌هنگام مشاهده از روی زمین، تعیین کنید. آن را بر حسب رادیان و درجهٔ کمانی بنویسید. همچنین زاویهٔ فضایی را که تحت آن سحابی دیده می‌شود به دست آورید.

۱۹.۲. با مراجعه به جدول توابع مثلثاتی پیوست کتاب، زاویه‌ای را پیدا کنید که اختلاف بین سینوس و تانژانت آن برابر باشد با (الف) ۱۵٪، (ب) ۱٪ و (ج) ۵۱٪. همین کار را در مورد $\sin \theta$ و θ و همچنین $\tan \theta$ و θ انجام دهید. بدیهی است θ بر حسب رادیان بیان می‌گردد. چه نتیجه‌ای از این پاسخها می‌توان گرفت؟

۲۰.۲. سه عدد ۴۹۲۳۸۷۴۲، $10^4 \times ۶۳۸۲$ و ۸۶۸۵۴۵ داده شده‌اند. (الف) آنها را باهم جمع کنید. (ب) هرسه را درهم ضرب کنید. (ج) دو عدد اولی را باهم جمع و در عدد سومی ضرب کنید. (د) دو عدد آخری را درهم ضرب کنید و حاصل ضرب را بر عدد اولی تقسیم کنید. تمام پاسخها را با اعداد مناسب با ارقام با معنی بنویسید.

۲۱.۲. از داده‌های جدول ۳.۲ استفاده کرده درستی مقدار میانگین، انحراف میانگین و انحراف ریشهٔ میانگین مربعی (rms) محاسبه شده را تحقیق کنید. نتیجه را با چند رقم با معنی باید نوشت؟

۲۲.۲. جدول زیر شامل یک رشته از ده بار خواندن یک خاصیت فیزیکی است (به عنوان مثال کلفتی یک تکه کاغذ یا وزن یک پاره سنگ و غیره):

۱۱۶	۱۲۵	۱۰۸	۱۱۱	۱۱۳
۱۱۳	۱۲۴	۱۱۱	۱۳۶	۱۱۱

(الف) مقدار میانگین این علدها را به دست آورید. انحراف میانگین و انحراف rms

را تعیین کنید. (ب) نظر خودتان را در مورد حذف یا نگهداری قرائت ۱۳۶ بیان کنید. (اگر آن را حذف کنیم، مقدار میانگین نه قرائت مانده برابر ۱۱۴۷ و انحراف استاندارد rms برابر ۵۶ می‌گردد.)

۲۳.۲. یک گوی کوچک یا یک مداد بردارید و بگذارید روی یک کتاب که به‌طور مایل نگهداری می‌شود به سمت پایین بغلتد. زمان لازم برای پایین آمدن گوی یا مداد از نقطه‌ای که رها می‌شود تا آنجایی که به سطح میز می‌خورد یادداشت کنید. این آزمایش را ده بار (یا بیشتر) تکرار کنید. مقدار میانگین زمان غلتیدن و دقت آن را بر حسب انحراف rms تعیین کنید. اگر ساعت ثانیه شمار ندارید، از ضربان نبض خود می‌توانید به عنوان مقیاس زمان استفاده کنید.

۲۴.۲. یک سرشماری از کلاس خود به عمل آورید. قد و وزن هر دانشجو را تعیین کنید. دانشجویان دختر (یا پسر) که اختلاف سن آنها از سه سال بیشتر نباشد انتخاب کنید. قد و وزن میانگین و انحراف rms را حساب کنید. توجه داشته باشید که در اینجا نمی‌توانید از دقت به‌گونه‌ای که در اندازه‌گیریهای پیش حرف زدید گفتگو کنید. چرا؟

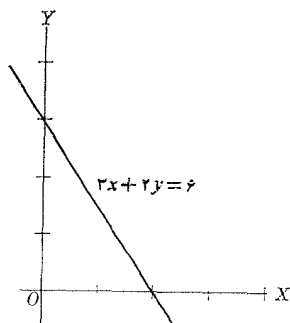
بردارها

مقدمه	۱.۳
مفهوم راستا و سو	۲.۳
اسکالرها و بردارها	۳.۳
جمع بردارها	۴.۳
مؤلفه‌های يك بردار	۵.۳
جمع چند بردار	۶.۳
كاربرد درمسایل سینماتيك	۷.۳
ضرب اسکالر	۸.۳
ضرب برداری	۹.۳
نمایش برداری يك سطح	۱۰.۳

این فصل، معرفی یا مروری است بر مفاهیم اساسی جبر برداری^۱، یکی از شاخه‌های ریاضیات که برای دانشمندان فیزیک بسیار اهمیت دارد. جبر برداری از این جهت مهم است که آشنایی با آن دانشمند را توانا می‌سازد تا رابطه‌های بسیار پیچیده را با نمادهای خیلی ساده به صورت مختصر و کوتاه ولی دقیق و جامع بنویسد. برای مثال، در جبر مقدماتی، معادله

$$3x + 2y = 6$$

نماد اختصاری تمام جفت مقدارهای ممکن x و y است که در این رابطه صدق می‌کنند. این رابطه را می‌توان به شکل دیگری نیز نمایش داد؛ یعنی، همچنانکه شکل ۱.۳ نشان می‌دهد، به کمک نمودار هندسی این معادله. هر دوی این مثالها برای دانشجویی که جبر و هندسه تحلیلی خوانده باشد قابل فهم است، زیرا در این مثالها از نمادهای اختصاری به کار رفته در علوم مذکور استفاده شده است. به همین ترتیب وقتی این نمادهای اختصاری را فهمیده باشیم، جبر برداری مستقیماً و براحتی قابل فهم خواهد بود.



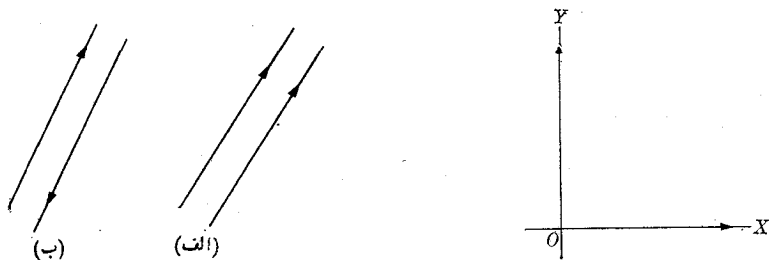
شکل ۱.۳

در پایان این فصل، درمی‌یابیم که نماد گذاری برداری بی‌شابهت به نماد گذاری به - کار رفته در جبر و هندسه تحلیلی نیست. اختلاف اساسی تنها در توجیه آنهاست. مطالعه عمیق این فصل همراه با حل دقیق تمرینهای مربوط، مشکلات زیادی را مرتفع و فهم فصلهای بعدی را آسانتر خواهد ساخت.

۲.۳ مفهوم راستا و سو

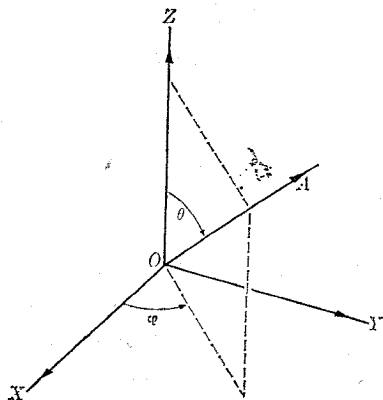
اگر یک خط راست داشته باشیم، می‌توانیم آن را در دوسوی مخالف ببینیم. تمایز بین این دو جهت را با علامتهای باضافه و منها مشخص می‌کنند. با گزینش یک سوی مثبت، گوییم خط جهت‌دار شده است و آن را یک محور^۲ می‌نامیم. محورهای مختصات x و y

خطهای جهت داری هستند که روی آنها، چنانکه شکل ۲.۳ نشان می دهد، جهتی به عنوان سوی مثبت انتخاب شده است. معمولاً سوی مثبت را با یک پیکان نشان می دهند. یک خط جهت دار یا محور، راستایی را مشخص می کند. خطهای موازی همسو، راستاهای همانند (شکل ۳.۳ الف)، ولی خطهای موازی درسوهای مخالف راستاهای متقابل را تعیین می کنند (شکل ۳.۳ ب).

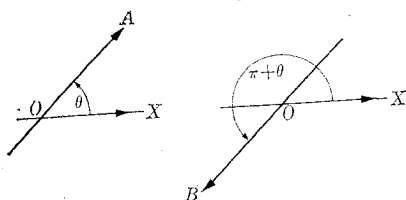


شکل ۲.۳. محورهای مختصات جهت دار شکل ۳.۳. راستاهای موازی همسو و ناهمسو

راستا در یک صفحه با زاویه تعیین می شود و آن زاویه بین یک راستا یا محور مرجع و راستایی است که می خواهیم آن را نشان دهیم. این زاویه در سوی پاد ساعتگرداً اندازه گیری می شود (شکل ۴.۳). دو راستا با سوهای مخالف با زاویه های θ و $\theta + \pi$ (یا $\theta + 180^\circ$) مشخص می شوند.



شکل ۵.۳. برای تعیین يك راستا در فضا دوزاویه لازم است.



شکل ۴.۳. در یک صفحه، راستاهای مخالف با زاویه های θ و $\theta + \pi$ مشخص می شوند.

درفضای سه بعدی، برای تعیین یک راستا دو زاویه لازم است. نمایشی که بیشتر

به کار می رود در شکل ۵.۳ آمده است. راستای OA با زاویه های زیر مشخص می شود:

(۱) زاویه θ (کمتر از 180°) که با محور OZ می سازد.

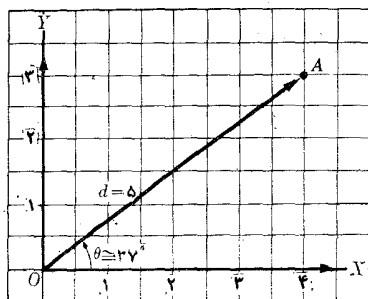
(۲) زاویه φ بین صفحه AOZ و صفحه XOZ که در سوی پادساعتگرد اندازه گیری می شود.

راستاهای مخالف در فضای سه بعدی توسط زاویه های $\pi - \theta$ و $\pi + \varphi$ تعیین می شوند. تحقیق این مطلب را برعهده دانشجو می گذاریم.

۳.۳ اسکالر ها و بردارها

بیشتر کمیت های فیزیکی، با بیان اندازه آنها بر حسب یکای مناسب، کاملاً مشخص می شوند. چنین کمیت هایی را کمیت های اسکالر می نامند. به عنوان مثال، برای مشخص کردن حجم یک جسم، تنها گفتن اینکه جسم چند متر مکعب یا فوت مکعب فضا را اشغال می کند کافی است. برای دانستن یک دما، کافی است درجه دماسنجی که به طور مناسب قرار گرفته است خوانده شود. جرم، زمان، بار الکتریکی و انرژی نیز جزو کمیت های اسکالر هستند.

سایر کمیت های فیزیکی که برای مشخص کردن کامل آنها به غیر از اندازه، تعیین راستا نیز لازم است کمیت های برداری نام دارند. جابجایی نمونه روشنی از کمیت های برداری است. جابجایی یک جسم فاصله مؤثری است که در راستای معین پیموده می شود. به عنوان مثال، هرگاه ذره ای از O به A برود (شکل ۶.۳) جابجایی با فاصله $d = 5$ و زاویه $\theta \cong 37^\circ$ معین می شود. سرعت نیز یک کمیت برداری است، زیرا حرکت با میزان جابجایی و راستای آن تعیین می شود. به همان گونه، نیرو و شتاب نیز کمیت های برداری هستند. بتدریج در فصل های آینده به سایر کمیت های برداری برخورد خواهیم کرد.



شکل ۶.۳. جابجایی یک کمیت برداری است.

هر بردار را با پاره خطی در راستا و سوی آن بردار (که با پیکانی مشخص می شود) و با طولی متناسب با بزرگی آن نشان می دهند. در نوشتن، بردارها را با حروف سیاه مانند $\vec{V}$ یا با حروفی که روی آنها علامت پیکان است مانند $\vec{V}$ نشان می دهند که در آن V بزرگی بردار است. (در بعضی موارد، بزرگی بردار را با $|V|$ نیز نشان می دهند.) برداری که

اندازه با بزرگی آن برابر یک باشد بردار یکا^۱ نام دارد. هر برداری مانند $\mathbf{v}$ موازی با برداریکای $\mathbf{u}$ را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{v} = u\mathbf{V}. \quad (۱.۳)$$

منفی یک بردار، برداری است با همان بزرگی و همان راستا ولی درسوی مخالف. اگر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ موازی باشند، می توان نوشت

$$\mathbf{v} = u\mathbf{V} \text{ و } \mathbf{v}' = u'\mathbf{V}$$

که $\mathbf{u}$ برداریکا برای هر دو بردار است. همچنین اگر $\lambda = V/V'$ باشد می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}'.$$

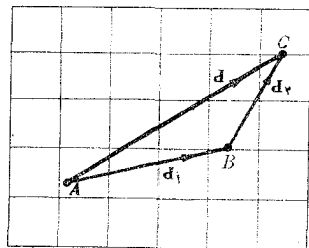
برعکس، اگر رابطه فوق برای دو بردار صادق باشد آن دو بردار موازی هستند.

۴.۳ جمع بردارها

برای درک قاعده جمع بردارها ابتدا بردارهای جابجایی را در نظر می گیریم. اگر ذره ای ابتدا از نقطه A تا نقطه B (شکل ۷.۳) حرکت کند، جابجایی آن را می توان با بردار $\mathbf{d}_1$ نشان داد. بعد اگر همین ذره از B به نقطه C برود، یعنی به اندازه $\mathbf{d}_2$ جابجا شود، نتیجه حرکت معادل یک جابجایی تنها از نقطه A به نقطه C یعنی $\mathbf{d}$ است که به صورت زیر می نویسیم:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$$

این رابطه برداری را نباید با رابطه $d = d_1 + d_2$ که تنها نمایانگر یک مقدار است، اشتباه کرد. می توان این روش را برای هر کمیت برداری دیگر تعمیم داد. بنا براین گوییم $\mathbf{V}$ مجموع $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ است، اگر به گونه ای که در شکل ۸.۳ نشان داده شده است، به دست آید.



شکل ۷.۳. جمع برداری دوجابجایی

از شکل ۸.۳ پیداست که جمع بردارها خاصیت جابجایی^۱ دارد، یعنی اگر ترتیب جمع کردن بردارها تغییر کند برآیند آنها تغییر نمی کند. این ویژگی نتیجه مستقیم روش

هندسی به کار رفته است. رابطه هندسی شکل ۸.۳ را به صورت جبری چنین بیان می کنند:

$$V = V_1 + V_2 \quad (۲.۳)$$

برای محاسبه بزرگی V ، از شکل ۹.۳ داریم

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

ولی

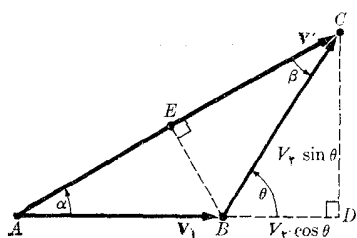
$$DC = V_2 \sin \theta \text{ و } AD = AB + BD = V_1 + V_2 \cos \theta.$$

بنابراین

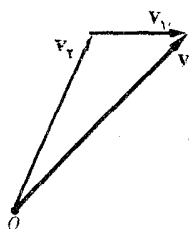
$$V^2 = (V_1 + V_2 \cos \theta)^2 + (V_2 \sin \theta)^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \theta.$$

و یا

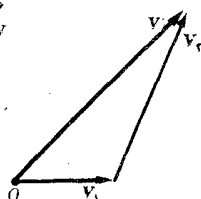
$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \theta} \quad (۳.۳)$$



شکل ۹.۳



(ب)



(الف)

شکل ۸.۳. جمع برداری دارای خاصیت جابجایی است

برای تعیین راستا و سوی V ، تنها باید زاویه α را به دست آورد. مطابق شکل ۹.۳، در مثلثهای BDC و ACD داریم

$$CD = BC \sin \theta \text{ و } CD = AC \sin \alpha.$$

بنابراین $BC \sin \theta = AC \sin \alpha$ یا

$$\frac{V}{\sin \theta} = \frac{V_2}{\sin \alpha}.$$

به همانگونه، $BE = V_1 \sin \alpha = V_2 \sin \beta$ ، یا

$$\frac{V_2}{\sin \alpha} = \frac{V_1}{\sin \beta}.$$

از ترکیب دو نتیجه بالا، رابطه تقارنی زیر به دست می آید:

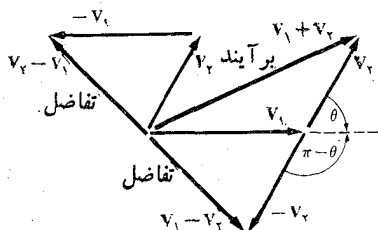
$$\frac{V}{\sin \theta} = \frac{V_1}{\sin \beta} = \frac{V_2}{\sin \alpha}. \quad (۴.۳)$$

بدین طریق دو رابطه مثلثاتی اساسی، قانون سینوسها و قانون کسینوسها را به دست آوردیم. در حالت خاصی که V_1 و V_2 برهم عمود باشند (شکل ۱۰.۳)، $\theta = \pi/2$ است و رابطه زیر برقرار خواهد بود:

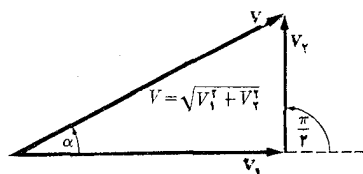
$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_2}{V_1}. \quad (۵.۳)$$

تفاضل دو بردار از جمع بردار منفی (یا مخالف) بردار دوم، با بردار اول به دست می آید (شکل ۱۱.۳)؛ یعنی

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + (-\mathbf{V}_2).$$



شکل ۱۱.۳. تفاضل دو بردار خاصیت جابجایی ندارد.



شکل ۱۰.۳

توجه داشته باشید که $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = -\mathbf{D}$ است، یعنی اگر ترتیب تفریق دو بردار عوض شود، تفاضلهای حاصل در دوسوی مخالف خواهند بود. بنابراین تفاضل دو بردار خاصیت جابجایی ندارد. بزرگی تفاضل دو بردار برابر است با

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2 \cos(\pi - \theta)}$$

یا

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos \theta}. \quad (۶.۳)$$

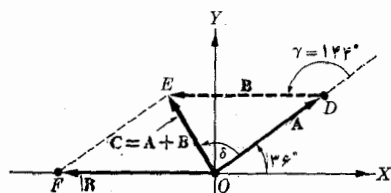
مثال ۹.۳. فرض کنیم دو بردار A به طول ۶ واحد که زاویه $36^\circ +$ با راستای مثبت محور Xها می سازد و B به طول ۷ واحد و در راستای منفی محور Xها است. (الف) برآیند دو بردار را به دست آورید؛ (ب) تفاضل دو بردار چقدر است؟

حل: قبل از استفاده از معادله های پیش، بردارها را در دستگاه مختصات XOY رسم می کنیم (شکل ۱۲.۳). بنا به شکلهای ۷.۳ و ۸.۳ یا ۹.۳، می دانیم که برای به دست آوردن برآیند دو بردار ابتدا باید انتهای یک بردار را بر ابتدای بردار دیگر قرار داد. این کار را می توان با جابجا کردن یک یا هر دو بردار، بدون اینکه سو و راستای آنها تغییر کند، انجام داد (شکل ۱۳.۳). به هر شیوه ای عمل شود، به دست می آید

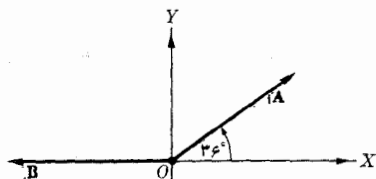
$$\vec{C} = \vec{OE}.$$

(الف) بنا به شکل ۱۳.۳ می توان نوشت

$$C = B + A \text{ یا } C = A + B.$$



شکل ۱۳.۳



شکل ۱۲.۳

با استفاده از مثلث ODE ، C برابر $A + B$ به دست می آید. برای یافتن بزرگی C با استفاده از معادله (۳.۳)، مشاهده می شود که A برابر V_1 و B برابر V_2 و C برابر V و بالاخره زاویه $\gamma = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ برابر θ است. بنا بر این داریم

$$C = \sqrt{36 + 49 \times 2 \times (6)(7) \cos 144^\circ} = 4128 \text{ واحد}$$

با استفاده از رابطه (۴.۳) زاویه بین A و C برابر می شود با

$$\frac{C}{\sin \gamma} = \frac{B}{\sin \delta}$$

و یا

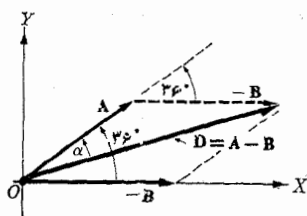
$$\sin \delta = \frac{B}{C} \sin 144^\circ = 0.9996$$

بالاخره

$$\delta \cong 85^\circ.$$

بنابراین C به طول ۴۱۲۸ واحد در راستایی قرار دارد که با سوی مثبت محور X ها زاویه $121^\circ = 36^\circ + 85^\circ$ می سازد.

(ب) برای به دست آوردن تفاضل دو بردار، باید همانند حساب عددی بدانیم چه کمیتی باید از کمیت دیگر کم شود. به گفته دیگر، اگر بردار D برابر $A - B$ باشد (شکل ۱۴.۳)، در این صورت $B - A$ برابر است با $-D$.



شکل ۱۴.۳

در نتیجه، با استفاده از مقادیر به دست آمده در قسمت (الف) و معادله (۶.۳)،
 بزرگی $D = A - B$ برابر است با

$$D = \sqrt{36 + 49 - 2(6)(7) \cos 144^\circ} = 12.31 \text{ واحد}$$

برای یافتن راستای D معادله (۴.۳) را به کار می‌بریم:

$$\frac{D}{\sin 36^\circ} = \frac{|-B|}{\sin \alpha}$$

چون $|-B| = B$ است، داریم

$$\sin \alpha = \frac{B}{D} \sin 36^\circ = 0.334$$

و یا

$$\alpha \cong 19.5^\circ$$

یعنی طول D ، ۱۲.۳۱ واحد و راستای آن با محور X ‌های مثبت، زاویه

$$36^\circ - 19.5^\circ = 16.5^\circ$$

می‌سازد.

حال شما ثابت کنید طول $D = A - B = -D$ واحد است و این بردار
 با راستای مثبت محور X ‌ها زاویه $19.5^\circ + 16.5^\circ$ می‌سازد.

۵.۳ مؤلفه‌های یک بردار

هر برداری مانند V را همیشه می‌توان برآیند دو (یا چند) بردار در نظر گرفت و تعداد
 حالت‌های ممکن بینهایت است. هر یک از عناصر مجموعه بردارهایی که برآیندشان بردار V
 باشد، مؤلفه^۱ بردار V خوانده می‌شود.

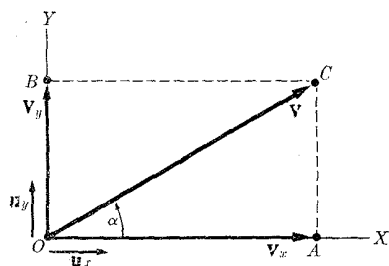
از بین مؤلفه‌های یک بردار آنچه بیشتر به کار می‌آید مؤلفه‌های عمود برهم است،
 یعنی بردار را برآیند دو بردار عمود برهم در نظر می‌گیرند (شکل ۱۵.۳). در این صورت
 چنانکه از شکل پیداست، $V = V_x + V_y$ ، با

$$V_x = V \cos \alpha \quad \text{و} \quad V_y = V \sin \alpha. \quad (7.3)$$

هرگاه u_x و u_y بترتیب بردارهای یکای راستاهای OX و OY را مشخص کنند، مشاهده
 می‌شود که

$$\vec{V}_x = \vec{OA} = u_x V_x \quad \vec{V}_y = \vec{OB} = u_y V_y$$

در این صورت می‌توان نوشت



شکل ۱۵.۳. مؤلفه‌های عمود برهم یک بردار در صفحه

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x V_x + \mathbf{u}_y V_y \quad (۸.۳)$$

معادله (۸.۳) نمایش یک بردار بر حسب مؤلفه‌های عمودی آن در صفحه است. با به کار بردن معادله (۷.۳)، رابطه (۸.۳) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

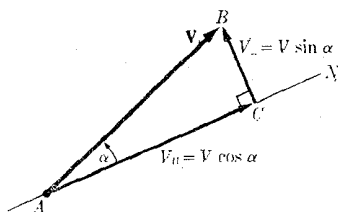
$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x V \cos \alpha + \mathbf{u}_y V \sin \alpha = V(\mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha).$$

با مقایسه این نتیجه با معادله (۱.۳)، یا به طور خیلی ساده‌تر، اگر $V = ۱$ باشد، به این نتیجه می‌رسیم که یک بردار یکا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha. \quad (۹.۳)$$

مشاهده می‌شود که مؤلفه یک بردار روی یک راستای معلوم برابر است با تصویر بردار روی این راستا (شکل ۱۶.۳). از این شکل پیدا است که $V_{\parallel} = V \cos \alpha$ و $V_{\perp} = V \sin \alpha$ که $V_{\perp} = BC$ مؤلفه V در راستای عمود بر راستای انتخاب شده AN است. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp}.$$



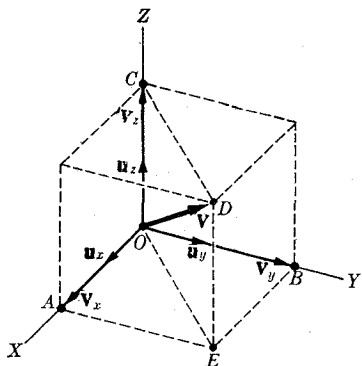
شکل ۱۶.۳. مؤلفه‌های یک بردار روی یک راستای معین

بردار V ، در فضا، دارای سه مؤلفه عمود برهم V_x ، V_y و V_z است (شکل ۱۷.۳). دانشجو می‌تواند از روی شکل تحقیق کند که آنها را از روی روابط زیر حساب می‌کنند:

$$\begin{aligned} V_x &= V \sin \theta \cos \varphi, \\ V_y &= V \sin \theta \sin \varphi, \\ V_z &= V \cos \theta. \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

از آنجا با یک محاسبه مستقیم به دست می‌آید

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \quad (۱۱.۳)$$



شکل ۱۷.۳. مؤلفه‌های عمود برهم یک بردار در سه بعد

با تعریف بردارهای یکای $\mathbf{u}_x$ ، $\mathbf{u}_y$ و $\mathbf{u}_z$ که بترتیب موازی با محورهای OX ، OY و OZ هستند، خواهیم داشت

$$\mathbf{V} = \mathbf{u}_x V_x + \mathbf{u}_y V_y + \mathbf{u}_z V_z \quad (۱۲.۳)$$

اگر α ، β و γ بترتیب زاویه‌های بردار $\mathbf{V}$ با محورهای OX ، OY و OZ باشند، با توجه به معادله‌های (۱۰.۳) داریم

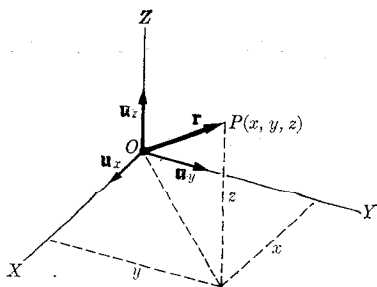
$$V_x = V \cos \alpha \quad \text{و} \quad V_y = V \cos \beta \quad \text{و} \quad V_z = V \cos \gamma$$

و با قراردادن این رابطه‌ها در معادله (۱۱.۳) به دست می‌آوریم

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

کمیت‌های $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ کسینوسهای هادی^۱ بردار $\mathbf{V}$ نامیده می‌شوند.

یکی از بردارهای بسیار مهم در فضای سه بعدی $\vec{\mathbf{r}} = \vec{OP}$ بردار مکان^۲ نقطه P به مختصات (x, y, z) است. از شکل ۱۸.۳ پیداست که

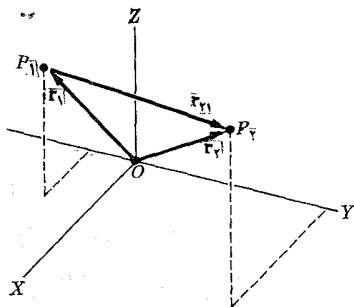


شکل ۱۸.۳. بردار مکان

$$\vec{r} = \vec{OP} = u_x x + u_y y + u_z z. \quad (۱۳.۳)$$

بردار مکان نسبی مربوط به دو نقطه P_1 و P_2 عبارت است از $\vec{r}_{21} = \vec{P_1 P_2}$. از شکل ۱۹.۳ پیدا است که $\vec{OP_2} = \vec{OP_1} + \vec{P_1 P_2}$ ، بنابراین،

$$\begin{aligned} \vec{r}_{21} &= \vec{P_1 P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \\ &= u_x(x_2 - x_1) + u_y(y_2 - y_1) + u_z(z_2 - z_1). \end{aligned} \quad (۱۴.۳)$$



شکل ۱۹.۳

یک بار دیگر یادآوری می‌کنیم که $\vec{P_1 P_2} = -\vec{P_2 P_1}$ است. از ترکیب معادله‌های (۱۴.۳) و (۱۱.۳) فرمول تحلیلی فاصله بین دو نقطه به دست می‌آید:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

مثال ۲.۳. فاصله بین دو نقطه $P_1(6, 8, 10)$ و $P_2(-4, 4, 10)$ را پیدا کنید.

حل: یک دستگاه مختصات سه بعدی مطابق شکل ۲۰.۳ رسم و نقطه‌های P_1 و P_2 را روی آن پیدا می‌کنیم. می‌بینیم که هر دو نقطه در صفحه‌ای موازی با صفحه XOY قرار دارند، زیرا هر دو نقطه در فاصله (ارتفاع) ۱۰ واحد در راستای OZ می‌باشند. بنا به معادله (۱۴.۳) برای $\vec{r}_{21}$ داریم

$$\vec{r}_{21} = u_x(-4 - 6) + u_y(4 - 8) + u_z(10 - 10)$$

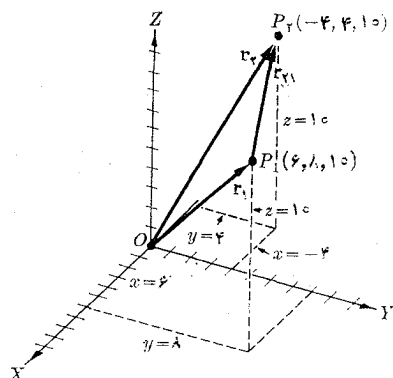
و یا

$$\vec{r}_{21} = -10u_x - 4u_y.$$

با استفاده از معادله (۱۱.۳) بزرگی $\vec{r}_{21}$ برابر است با

$$r_{21} = 100 + 16 = 116 \quad \text{یا} \quad r_{21} = 10.77 \text{ واحد}$$

مثال ۳.۳. مؤلفه‌های برداری را که طول آن ۱۳ واحد است و راستای آن با محور Z زاویه $\theta = 22.6^\circ$ و تصویر آن روی صفحه XOY زاویه $\varphi = 37^\circ$ با راستای مثبت محور X می‌سازد به دست آورید (شکل ۱۷.۳). همچنین زوایای آن را با محورهای



شکل ۲۰.۳

OX و OY پیدا کنید.

حل: با استفاده از شکل ۱۷.۳ برای این مسئله، داریم

$$V = ۱۳ \text{ واحد}, \theta = ۲۲۶^\circ, \cos \theta = ۰۰۹۲۳$$

$$\sin \theta = ۰۰۳۸۴, \varphi = ۳۷^\circ, \cos \varphi = ۰۰۸۰۰, \sin \varphi = ۰۰۶۰۰.$$

با به کار بردن معادله‌های (۱۰.۳) بآسانی به دست می‌آید

$$V_x = ۱۳(۰۰۳۸۴)(۰۰۸۰۰) = ۴۰۰ \text{ واحد}$$

$$V_y = ۱۳(۰۰۳۸۴)(۰۰۶۰۰) = ۳۰۰ \text{ واحد}$$

$$V_z = ۱۳ \times (۰۰۹۲۳) = ۱۲۰۰ \text{ واحد}$$

بنا به معادله (۱۲.۳) می‌توانیم بنویسیم

$$V = u_x(۴) + u_y(۳) + u_z(۱۲)$$

در مورد زاویه‌های α و β که بردار V با محورهای OX و OY می‌سازد داریم

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{V} = ۰۰۳۰۸ \text{ یا } \alpha = ۷۲۱^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{V_y}{V} = ۰۰۲۳۱ \text{ یا } \beta = ۷۷^\circ.$$

مثال ۴.۳. معادله خطی موازی با بردار $V = u_x A + u_y B + u_z C$ را که از نقطه P_0 می‌گذرد بنویسید.

حل: هرگاه بردار مکان P_0 را با r_0 و بردار مکان نقطه غیر مشخصی مانند P روی خط مذکور را با r نشان دهیم (شکل ۲۱.۳)، بنا به معادله (۱۴.۳) داریم

$$\vec{P_0 P} = r - r_0.$$

ولی بردار $\vec{P_0P}$ باید موازی V باشد، بنا براین می توانیم بنویسیم

$$\vec{P_0P} = \lambda \vec{V}$$

که در آن λ فراسنجی است که هنوز تعیین نشده است. بنا براین

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda \mathbf{V}$$

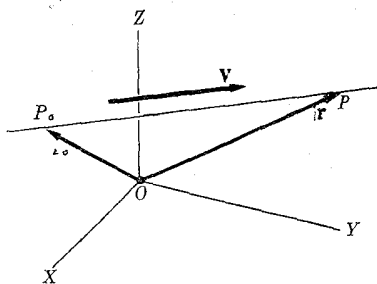
معادله یک خط است. با تغییر λ بردار مکانهای مختلف $\mathbf{r}$ به دست می آیند. تصویرهای معادله فوق روی محورهای مختصات عبارتند از

$$x - x_0 = \lambda A, y - y_0 = \lambda B, z - z_0 = \lambda C$$

یا

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

رابطه اخیر در هندسه تحلیلی برای نشان دادن معادله یک خط راست به کار می رود.



شکل ۲۱.۳

۶.۳ جمع چند بردار

برای جمع چند بردار $V_1, V_2, V_3, \dots$ ، شیوه به کار رفته در شکل ۸.۳ در مورد دو بردار را تعمیم می دهیم. در شکل ۲۲.۳ روش مربوط به جمع سه بردار نشان داده شده است. بدین منظور، بردارها را یکی پس از دیگری به دنبال هم رسم می کنیم، بردار بر آیند خطی است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می کند. در این صورت

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \dots \quad (15.3)$$

فرمول ساده ای برای نشان دادن V بر حسب $V_1, V_2, V_3, \dots$ وجود ندارد، و بهترین کار استفاده از روش مؤلفه هاست. برای سادگی، فرض کنیم تمام بردارها در یک صفحه قرار دارند. در این صورت تنها به دو مؤلفه نیاز داریم:

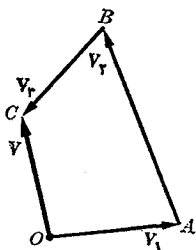
$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (\mathbf{u}_x V_{1x} + \mathbf{u}_y V_{1y}) + (\mathbf{u}_x V_{2x} + \mathbf{u}_y V_{2y}) \\ &\quad + (\mathbf{u}_x V_{3x} + \mathbf{u}_y V_{3y}) + \dots \\ &= \mathbf{u}_x (V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \dots) + \mathbf{u}_y (V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} + \dots). \end{aligned}$$

بنا بر این

$$V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + \dots = \sum_i V_{ix} = \sum_i V_i \cos \alpha_i \quad (۱۶.۳)$$

$$V_y = V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} + \dots = \sum_i V_{iy} = \sum_i V_i \sin \alpha_i$$

که در آن α_i زاویه‌ای است که V_i با محور X می‌سازد و $V_i \cos \alpha_i$ و $V_i \sin \alpha_i$ مؤلفه‌های V_i روی محورهای OX و OY هستند. وقتی V_x و V_y به دست آمدند، از معادله (۵.۳)، V را حساب می‌کنیم. اکنون این روش را با یک مثال عددی روشن می‌کنیم.



شکل ۲۲.۳. جمع چند بردار

مثال ۵.۳. برآیند ۵ بردار زیر را به دست آورید:

$$V_1 = u_x(4) + u_y(-3) \quad \text{واحد}$$

$$V_2 = u_x(-3) + u_y(2) \quad \text{واحد}$$

$$V_3 = u_x(2) + u_y(-6) \quad \text{واحد}$$

$$V_4 = u_x(7) + u_y(-8) \quad \text{واحد}$$

$$V_5 = u_x(9) + u_y(1) \quad \text{واحد}$$

حل: با استفاده از معادله (۱۶.۳)، داریم

$$V_x = 4 - 3 + 2 + 7 + 9 = 19 \quad \text{واحد}$$

$$V_y = -3 + 2 - 6 - 8 + 1 = -14 \quad \text{واحد}$$

$$V = u_x(19) + u_y(-14) \quad \text{واحد}$$

بزرگی بردار V برابر می‌شود با

$$V = \sqrt{(19)^2 + (-14)^2} = 23.55 \quad \text{واحد}$$

از رابطه $\alpha = \tan^{-1} V_y/V_x = -36.4^\circ$ ، یا $\alpha = -36.4^\circ$ ، راستا و سوی بردار V به دست می‌آید. α زاویه‌ای است که راستای V با محور X می‌سازد.

۷.۳ کاربرد در مسایل سینماتیک

برای نشان دادن نحوه استفاده از بردارها در پدیده‌های ساده فیزیکی، مثالهایی از سینماتیک^۱

را در نظر می‌گیریم، تنها فرض مورد نیاز، پذیرش سرعت به عنوان یک کمیت برداری است. به عنوان مثال، فرض کنیم قایقی با سرعت V_B نسبت به آب جابجا می‌شود. اگر آب ساکن باشد، V_B سرعت قایق نسبت به کسی که در ساحل ایستاده است نیز می‌باشد. ولی اگر آب با سرعتی جاری باشد، عامل جریسان آب سرعت قایق را از نظم خارج می‌کند. بدین طریق، سرعت حرکت قایق که به وسیله ناظر واقع در ساحل اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با جمع برداری V_B سرعت قایق نسبت به آب و V_C سرعت قایق ناشی از جریان آب، و داریم

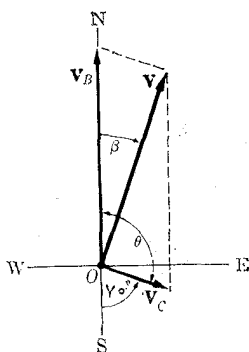
$$V = V_B + V_C$$

می‌توان همین شیوه استدلال را برای تمام اجرام جا بجاشونده در هوا، مثلاً هواپیما به کار برد. **مثال ۶.۳.** یک قایق موتوری در منطقه‌ای که جریانی به سرعت ۵ کیلومتر در ساعت در راستای 70° جنوب شرقی وجود دارد، با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت در راستای شمال حرکت می‌کند. سرعت برآیند قایق را به دست آورید.

حل: این مسئله از راه ترسیم روی شکل ۲۳.۳ حل شده است. در این شکل V_B سرعت قایق، V_C سرعت جریان یا سرعت انحراف قایق و V سرعت برآیند است که از رابطه

$$V = V_B + V_C$$

به دست می‌آید. این امر متکی به این واقعیت فیزیکی است که سرعت برآیند جمع برداری V_B ، سرعت قایق نسبت به آب و V_C ، سرعت قایق ناشی از جریان آب است.



شکل ۲۳.۳

چون $\theta = 110^\circ$ است، بزرگی V برابر می‌شود با

$$V = \sqrt{15^2 + 5^2 + 2(15)(5) \cos 110^\circ} = 14.1 \text{ km hr}^{-1}$$

برای به دست آوردن راستای V معادله (۴.۳) را به کار می‌بریم:

$$\frac{V}{\sin \theta} = \frac{V_C}{\sin \beta} \quad \text{یا} \quad \sin \beta = \frac{V_C \sin \theta}{V} = 0.332$$

از اینجا $\beta = ۱۹۴^\circ$ به دست می‌آید. بنا بر این حرکت برآیند در راستای ۱۹۴° شمال شرقی صورت می‌گیرد.

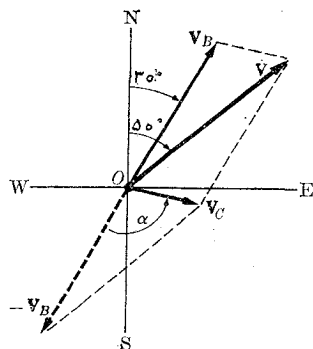
مثال ۷۰.۳. یک قایق موتوری دارای سرعت ۲۵ km hr^{-1} در راستای ۳۰° شمال شرقی است ولی جریان آب موجب می‌شود با سرعت ۳۰ km hr^{-1} در راستای ۵۰° شمال شرقی حرکت کند. سرعت جریان آب را پیدا کنید.

حل: اگر سرعت قایق را با V_B و سرعت جریان آب را با V_C و سرعت برآیند را با V نشان دهیم، داریم

$$V = V_B + V_C \quad \text{یا} \quad V_C = V - V_B.$$

در شکل ۲۴.۳ بردارهای V و V_B و نیز V_C تفاضل آنها رسم شده‌اند. برای محاسبه V_C از روی شکل پیدا است که زاویه بین V و V_B برابر ۱۶۰° است. بنا بر این

$$V_C = \sqrt{۳۰^2 + ۲۵^2 + ۲(۳۰)(۲۵)\cos ۱۶۰^\circ} = ۱۰.۹۸ \text{ km hr}^{-1}$$



شکل ۲۴.۳

برای به دست آوردن راستای V_C ابتدا α زاویه بین V و V_B را با استفاده از معادله (۴.۳) حساب می‌کنیم:

$$\frac{V}{\sin \alpha} = \frac{V_C}{\sin ۱۶۰^\circ} \quad \text{یا} \quad \sin \alpha = \frac{V}{V_C} \sin ۱۶۰^\circ = ۰.۹۵۱$$

از اینجا $\alpha = ۷۲^\circ$ به دست می‌آید. بنا بر این زاویه V_C با راستای شمال - جنوب برابر است با $۷۲^\circ - ۳۰^\circ = ۴۲^\circ$ یعنی V_C در راستای ۴۲° جنوب شرقی است.

مثال ۸۰.۳. سرعت هواپیمایی در هوای ساکن ۲۰۰ km hr^{-1} است. هواپیما می‌خواهد در راستای OO' یعنی ۲۰° شمال غربی از نقطه O به O' برود. بادی به سرعت ۳۰ km hr^{-1} در راستای ۴۰° شمال شرقی می‌وزد. راستایی که هواپیما باید حرکت کند و نیز سرعت برآیند آن را به دست آورید.

حل: سرعت هواپیما را با V_a و سرعت باد را با V_w نشان می‌دهیم. سرعت برآیند برابر است با

$$V = V_a + V_w.$$

بنا به خواسته مسئله، V باید در راستای OO' باشد. سرعت V_a را باید طوری رسم کرد که هرگاه سرعت V_w به آن اضافه شود، حرکت در راستای OO' باشد. این کار را در شکل ۲۵.۳، با رسم دایره‌ای به شعاع V_a به مرکز انتهای بردار V_w و با تعیین محل تقاطع این دایره با خط OO' انجام داده‌ایم.

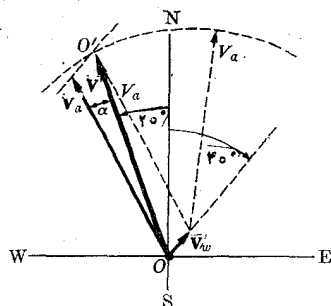
برای یافتن رابطه تحلیلی، مشاهده می‌شود که زاویه V با V_w برابر است با $60^\circ = 40^\circ + 20^\circ$. بنا براین، با به کار بردن معادله (۴.۳) به دست می‌آید

$$\frac{V_a}{\sin 60^\circ} = \frac{V_w}{\sin \alpha} \quad \text{یا} \quad \sin \alpha = \frac{V_w \sin 60^\circ}{V_a} = 0.130$$

از اینجا داریم $\alpha = 7.8^\circ$. در این صورت V_a در راستای 278° شمال غربی قرار دارد. زاویه بین V_w و V_a برابر است با $67.8^\circ = 278^\circ + 40^\circ = \theta$ و بنا به معادله (۳.۳) بزرگی سرعت برآیند برابر می‌شود با

$$V = \sqrt{200^2 + 30^2 + 2 \times 200 \times 30 \cos 67.8^\circ} = 204 \text{ km hr}^{-1}$$

به عهده دانشجو است که پاسخ دهد: آیا ممکن است مسئله دارای دو جواب باشد و یا حتی جوابی نداشته باشد؟

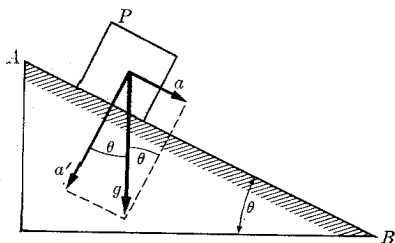


شکل ۲۵.۳

مثال ۹.۳. شتاب جسمی را که در طول یک صفحه شیب‌دار با زاویه شیب θ می‌لغزد به دست آورید.

حل: فرض کنیم P جسمی است که بدون مالش روی صفحه شیب‌دار AB با شیب θ به سمت پایین می‌لغزد (شکل ۲۶.۳). اگر صفحه شیب‌دار وجود نمی‌داشت جسم آزادانه در راستای قائم با شتاب گرانی، $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ سقوط می‌کرد (به مثال ۲.۵ مراجعه کنید). مؤلفه‌های g در راستای موازی و عمود بر صفحه به ترتیب برابرند با $a = g \sin \theta$

و $a' = g \cos \theta$ ، مؤلفه a ، شتاب جسم P روی صفحه است.



شکل ۲۶.۳. شتاب در طول یک صفحه شیب‌دار

۸.۳ ضرب اسکالر

به غیر از جمع عملهای دیگری را نیز می‌توان روی بردارها تعریف کرد. ضرب اسکالر^۱ و ضرب برداری^۲ دو نوع از این عملها هستند.

ضرب اسکالر دو بردار A و B با علامت $A \cdot B$ (ضرب اسکالر در B)، یک کمیت عددی است که از ضرب بزرگی بردار A در بزرگی بردار B در کسینوس زاویه بین این دو بردار به دست می‌آید:

$$A \cdot B = AB \cos \theta. \quad (۱۷.۳)$$

بدیهی است $A \cdot A = A^2$ می‌باشد، زیرا در این حالت زاویه θ برابر صفر است. اگر دو بردار برهم عمود باشند ($\theta = \pi/2$) حاصل ضرب اسکالر برابر صفر می‌شود. بدین طریق شرط عمود بودن دو بردار بر یکدیگر با رابطه $A \cdot B = 0$ نشان داده می‌شود. بنا به تعریف ضرب اسکالر دو بردار خاصیت جابجایی دارد، یعنی $A \cdot B = B \cdot A$ ، زیرا در هر دو حالت $\cos \theta$ یکسان است. ضرب اسکالر نسبت به جمع خاصیت توزیع پذیری^۳ دارد:

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B. \quad (۱۸.۳)$$

برای اثبات خاصیت توزیع پذیری ضرب اسکالر، از شکل ۲۷.۳ پیداست که

$$C \cdot (A + B) = |C| |A + B| \cos \gamma = C (Ob)$$

زیرا $|A + B| \cos \gamma$ برابر است با Ob ، همچنین

$$C \cdot A = C A \cos \alpha = C (Oa)$$

و

$$C \cdot B = C B \cos \beta = C (ab).$$

با جمع دو رابطه فوق، به دست می‌آید

$$C \cdot A + C \cdot B = C(Oa + ab) = C(Ob).$$

بدین طریق رابطه (۱۸.۳) اثبات می شود. حاصل ضربهای اسکالر بردارهای یکای $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ چنین می شوند:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x &= \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1 \\ \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y &= \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x = 0\end{aligned}\quad (19.3)$$

با نوشتن بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بر حسب مؤلفه های قائم و با توجه به معادله (۱۲.۳) و قانون توزیع پذیری معادله (۱۸.۳)، داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{u}_x A_x + \mathbf{u}_y A_y + \mathbf{u}_z A_z) \cdot (\mathbf{u}_x B_x + \mathbf{u}_y B_y + \mathbf{u}_z B_z) \\ &= (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x) A_x B_x + (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y) A_x B_y + (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_z) A_x B_z \\ &\quad + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_x) A_y B_x + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y) A_y B_y + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z) A_y B_z \\ &\quad + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x) A_z B_x + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_y) A_z B_y + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z) A_z B_z.\end{aligned}$$

با به کار بستن رابطه (۱۹.۳) به دست می آید

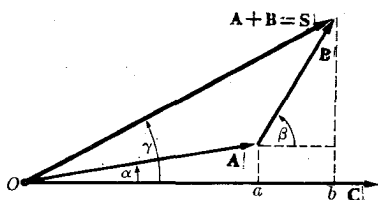
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (20.3)$$

رابطه (۲۰.۳) دارای پهنه کاربرد گسترده ای است. همچنین داریم

$$A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

که با معادله (۱۱.۳) سازگار است.

شکل ۲۷.۳. ضرب اسکالر خاصیت توزیع پذیری دارد.



با استفاده از ویژگیهای ضرب اسکالر می توان فرمول (۳.۳) مربوط به مجموع دو بردار را باسانی به دست آورد. از رابطه $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ داریم

$$\begin{aligned}V^2 &= (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) \cdot (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = V_1^2 + V_2^2 + 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \\ &= V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2 \cos \theta.\end{aligned}$$

این نتیجه را می توان بدون هیچ مشکلی در مورد چند بردار نیز به کار برد. فرض کنیم

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{V}_i$$

در این صورت

$$\begin{aligned}V^2 &= (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \dots)^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots \\ &\quad + 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 + 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3 + \dots + 2\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_3 + \dots\end{aligned}$$

یا به صورت کلی تر

$$V^2 = \sum_i V_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} V_i \cdot V_j$$

تمام بردارها تمام جفتها

مثال ۱۰.۳. زاویه بین دو بردار

$$A = 2u_x + 3u_y - u_z \text{ و } B = -u_x + u_y + 2u_z$$

را به دست آورید.

حل: ابتدا با استفاده از معادله (۲۰.۳) حاصل ضرب اسکالر A و B را حساب می‌کنیم:

$$A \cdot B = 2(-1) + 3(1) + (-1)2 = -1$$

و نیز داریم

$$A = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} = 3.74 \text{ واحد}$$

$$B = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} = 2.45 \text{ واحد}$$

بنا به معادله (۱۷.۳) می‌توان نوشت

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{AB} = -\frac{1}{9.17} = -0.109$$

از اینجا به دست می‌آید

$$\theta = 96.3^\circ$$

مثال ۱۱.۳. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه P_0 بگذرد و بر بردار

$$V = u_x A + u_y B + u_z C$$

عمود باشد.

حل: بردار مکان نقطه P_0 را با $\mathbf{r}_0$ و بردار مکان نقطه دیگری از صفحه مانند P را با $\mathbf{r}$ نشان می‌دهیم (شکل ۲۸.۳). بنا به خواص بردارها داریم

$$\overrightarrow{P_0 P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0.$$

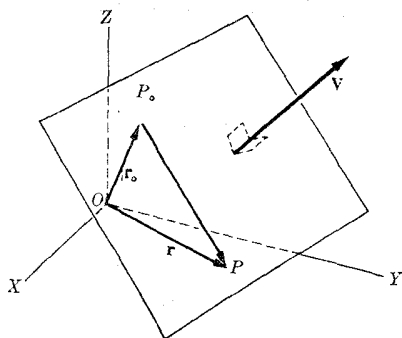
بردار $\overrightarrow{P_0 P}$ باید بر بردار V عمود باشد. پس

$$V \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

رابطه فوق، معادله‌ای است که باید بردار مکان $\mathbf{r}$ مربوط به تمام نقاط صفحه، در آن صدق کند. با به کار بردن معادله (۲۰.۳) می‌توان نوشت

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

معمولاً در هندسه تحلیلی، معادله صفحه عمود بر یک خط معین به صورت فوق نوشته می‌شود.



شکل ۲۸.۳. معادله برداری یک صفحه

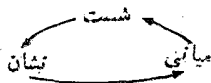
۹.۳ ضرب برداری

حاصل ضرب برداری دو بردار A و B که با علامت $A \times B$ (ضرب برداری در B) نشان داده می‌شود، مطابق تعریف، برداری است در راستای عمود بر صفحه حاصل از A و B و در سوی جابجایی یک پیچ راستگرد که از A به سمت B می‌چرخد (شکل ۲۹.۳). پیچی را راستگرد گویند که، همچنانکه در شکل ۲۹.۳ نشان داده شده است، اگر دست را طوری قرار دهیم که انگشتان در سوی چرخش آن باشد، پیچ در راستای شست پیش برود. اکثر پیچهای معمولی راستگرد ساخته می‌شود.

بزرگی حاصل ضرب برداری $A \times B$ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$|A \times B| = AB \sin \theta. \quad (21.3)$$

یک قاعده مفید دیگر برای نشان دادن سوی $A \times B$ از این قرار است: انگشتان شست، نشان (سبابه) و میانی دست راست را مطابق شکل ۳۰.۳ قرار دهید، اگر سوی انگشت نشان همسوی A و انگشت میانی در سوی B باشد، انگشت شست سوی $A \times B$ را نشان خواهد داد. در واقع، در حالت کلی بردارهای A ، B و $A \times B$ را می‌توان بترتیب با انگشتان، ازهر انگشتی که شروع شود نشان داد، به شرطی که ترتیب گردش زیر حفظ شود:

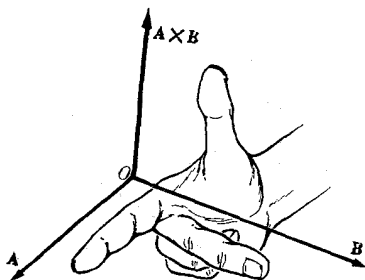


از تعریف ضرب برداری پیداست که

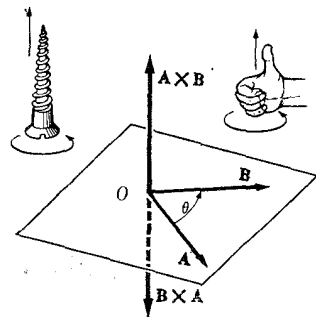
$$A \times B = -B \times A \quad (22.3)$$

زیرا سوی پیشروی پیچ با تغییر ترتیب بردارها تغییر می‌کند. گوئیم ضرب برداری خاصیت جابجایی ندارد. اگر دو بردار موازی باشند، $\theta = 0^\circ$ و $\sin \theta = 0$ می‌شود و حاصل ضرب

بردارى برابر صفر است. بنابراین شرط موازى بودن دو بردار را با $A \times B = 0$ نشان می‌دهند. بدیهی است $A \times A = 0$ است.



شکل ۳۰.۳. قاعده دست راست برای ضرب بردارى



شکل ۳۱.۳. وضع قرار گرفتن بردارها در ضرب بردارى

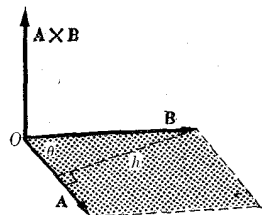
باید توجه داشت که بزرگى حاصل ضرب بردارى دو بردار برابر است با مساحت متوازى الاضلاع متشکل از دو بردار، یا دو برابر مساحت مثلث حاصل از دو بردار و برآیند آنها. شکل ۳۱.۳ این موضوع را نشان می‌دهد. بزرگى $A \times B$ برابر است با $AB \sin \theta$ که در آن $B \sin \theta = h$ ارتفاع متوازى الاضلاعى به پهلوهاى مجاور A و B است. پس

$$|A \times B| = Ah = \text{مساحت متوازى الاضلاع}$$

ضرب بردارى نسبت به جمع خاصیت توزیع پذیری دارد، به گفته دیگر

$$C \times (A + B) = C \times A + C \times B. \quad (23.3)$$

هرگاه سه بردار را در یک صفحه فرض کنیم اثبات رابطه (۲۳.۳) آسانتر می‌شود. در این حالت (شکل ۳۲.۳)، حاصل ضربهای بردارى حاصل از معادله (۲۳.۳) بر صفحه کتاب



شکل ۳۱.۳. حاصل ضرب بردارى معادل مساحت متوازى الاضلاع است.

عمودند و كافى است ثابت شود که معادله (۲۳.۳) در مورد بزرگى‌ها صدق می‌کند. داریم

$$|C \times (A + B)| = |C| |A + B| \sin \gamma = C (Ob)$$

همچنین

$$|C \times A| = C A \sin \alpha = C (Oa)$$

$$|C \times B| = C B \sin \beta = C (ab).$$

از جمع دو رابطه اخیر به دست می آید

$$|C \times A| + |C \times B| = C (Oa + ab) = C (Ob).$$

بنابراین معادله (۲۳.۳) از لحاظ سو و بزرگی اثبات می شود. در حالت کلی سه بردار در فضا، نحوه اثبات همان است که گفته شد، ولی کمی پیچیده تر*.

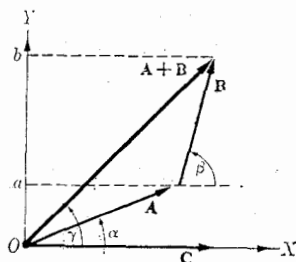
حاصل ضربهای برداری بین بردارهای یکای u_x ، u_y و u_z عبارتند از

$$u_x \times u_y = -u_y \times u_x = u_z$$

$$u_y \times u_z = -u_z \times u_y = u_x \quad (24.3)$$

$$u_z \times u_x = -u_x \times u_z = u_y$$

$$u_x \times u_x = u_y \times u_y = u_z \times u_z = 0$$



شکل ۳۲.۳. ضرب برداری توزیع پذیر است.

با نوشتن A و B بر حسب مؤلفه‌هایشان در یک دستگاه مختصات قایم، مطابق معادله (۱۲.۳) و استفاده از قانون خاصیت توزیع پذیری (۲۳.۳) داریم

$$\begin{aligned} A \times B &= (u_x A_x + u_y A_y + u_z A_z) \times (u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z) \\ &= (u_x \times u_x) A_x B_x + (u_x \times u_y) A_x B_y + (u_x \times u_z) A_x B_z \\ &\quad + (u_y \times u_x) A_y B_x + (u_y \times u_y) A_y B_y + (u_y \times u_z) A_y B_z \\ &\quad + (u_z \times u_x) A_z B_x + (u_z \times u_y) A_z B_y + (u_z \times u_z) A_z B_z. \end{aligned}$$

و بالاخره با به کار بردن معادله (۲۴.۳) به دست می آید

$$\begin{aligned} A \times B &= u_x (A_y B_z - A_z B_y) + u_y (A_z B_x - A_x B_z) \\ &\quad + u_z (A_x B_y - A_y B_x). \end{aligned} \quad (25.3)$$

رابطه (۲۵.۳) را می توان به صورت دترمینان^۱ نیز نوشت:

* برای اثبات در حالت کلی، مراجعه کنید به: توماس، جرج، ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۷-۱۲.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (۲۶.۳)$$

یادآوری درمورد دترمینان. دترمینان یک علامت ساده برای قرار دادن مقادیری است که باید با رعایت گونه‌ای تقارن ترکیب شوند. یک دترمینان مرتبه ۲، جدولی به تعداد جمله‌های 2×2 است که با قاعده زیر حساب می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

عملی که صورت می‌گیرد عبارت است از ابتدا ضرب جمله‌های روی یک قطر، سپس تفریق آنها از همدیگر. یک دترمینان مرتبه ۳ جدولی به تعداد جمله‌های 3×3 است که به ترتیب زیر حساب می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

به‌ترتیبی که ستونها در هر جمله ظاهر می‌شوند توجه داشته باشید. تحقیق کنید که با به‌کار بردن این قاعده در معادله (۲۶.۳)، معادله (۲۵.۳) به‌دست می‌آید.

مثال ۱۲.۳. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از دو بردار

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{u}_x + 3\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = -\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z$$

را حساب کنید.

حل: ابتدا با استفاده از معادله (۲۶.۳) حاصل ضرب برداری $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را حساب می‌کنیم:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\mathbf{u}_x - 3\mathbf{u}_y + 5\mathbf{u}_z.$$

بنابراین $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ درست برابر مساحت متوازی‌الاضلاع است و یا

$$\text{واحد } 9.11 = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{49 + 9 + 25}$$

مثال ۱۳.۳. فاصله نقطه $P(4, -1, 5)$ را از خطی که از نقطه‌های $P_1(-1, 2, 0)$ و $P_2(1, 1, 4)$ می‌گذرد به دست آورید.

حل: شکل ۳۳.۳ ترسیم هندسی مسئله را نشان می‌دهد. از این شکل پیداست که $d = P_1 P \sin \theta$ اینک فرض می‌کنیم

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{P_1 P} \quad \text{و} \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{P_1 P_2}$$

که با توجه به معادله (۱۴.۳) داریم

$$\vec{A} = P_1 P = 5\mathbf{u}_x - 3\mathbf{u}_y + 5\mathbf{u}_z$$

$$\vec{B} = P_1 P_2 = 2\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + 4\mathbf{u}_z.$$

در این صورت

$$d = A \sin \theta = \frac{AB \sin \theta}{B} = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{B}.$$

در نتیجه با به کار بردن دترمینان (۲۶.۳)، برای محاسبه حاصل ضرب برداری $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به دست می آید

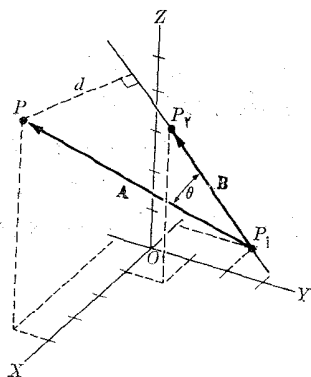
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -7\mathbf{u}_x - 10\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z.$$

بنابراین

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{49 + 100 + 1} = \sqrt{150} = 12.25.$$

چون $B = \sqrt{4 + 1 + 16} = 4.582$ است، خواهیم داشت

$$d = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{B} = \frac{12.25}{4.582} = 2.674 \text{ واحد}$$



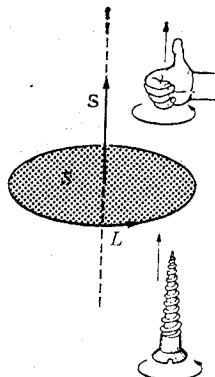
شکل ۳۳.۳

۱۰.۳ نمایش برداری یک سطح

در بحث مربوط به شکل ۳۱.۳ گفتیم که بزرگی حاصل ضرب برداری $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن را بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تشکیل می دهند. بنابراین می توان به هر سطحی یک بردار نسبت داد.

سطح تخت S را مطابق شکل ۳۴.۳ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم محیط آن دارای جهتی درسوی پیکان نشان داده شده در این شکل باشد. مطابق قرارداد بردار S که راستای آن عمود بر سطح S و بزرگی آن برابر مساحت S می‌باشد، نمایش برداری این سطح است. سوی بردار S درسوی پیشروی پیچ راستگردی است که درسوی انتخاب شده بر محیط سطح می‌چرخد.

مؤلفه‌های بردار S دارای معنای هندسی ساده‌ای هستند. فرض کنیم که سطح S با صفحه مختصات XOY زاویه θ می‌سازد (شکل ۳۵.۳). تصویر صفحه S روی صفحه XOY برابر است با $S \cos \theta$ ، که در هندسه فضایی با آن آشنا شده‌اید. عمود بر سطح S نیز با محور



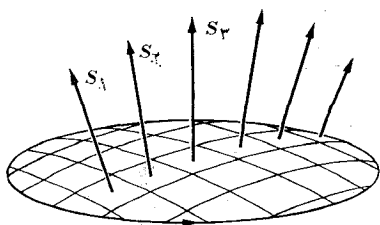
شکل ۳۴.۳. نمایش برداری یک سطح

Z ها زاویه θ می‌سازد بنابراین تصویر S روی محور Z برابر است با $S_z = S \cos \theta$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که تصویر بردار S روی محورهای مختصات برابر است با تصویر سطح S روی سه صفحه مختصات.

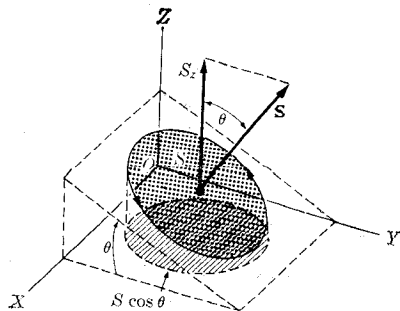
اگر سطح تخت نباشد، می‌توان آن را به تعداد خیلی زیاد از سطحهای کوچک تجزیه کرد (شکل ۳۶.۳)، که هر کدام از این سطحها عملاً تخت بوده و می‌توان آن را با یک بردار S_i نشان داد. بدین طریق برداری که کل سطح را نشان می‌دهد برابر می‌شود با

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots = \sum_i S_i$$

در این حالت، بزرگی S با مساحت سطح منحنی $\sum_i S_i$ برابر نیست، ولی بزرگی سه مؤلفه



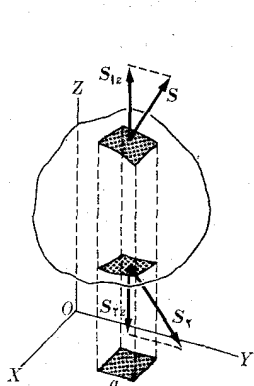
شکل ۳۶.۳. جمع برداری چند سطح



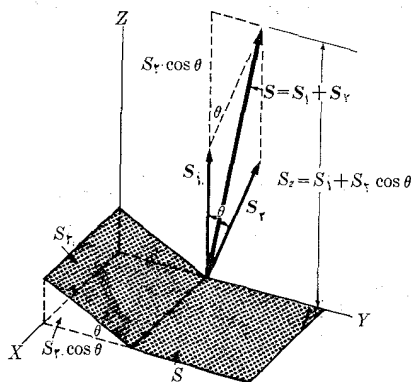
شکل ۳۵.۳. تصویر یک سطح روی یک صفحه

S روی محورهاى مختصات برابر است با مساحت تصویرهای سطح بر روی سه صفحه مختصات. به عنوان مثال، مطابق شکل ۳۷.۳ قطعه زمینی را در نظر می‌گیریم که بخشی از آن افقی و بخش دیگر بر دامنه یک تپه قرار گرفته است. اگر S_1 و S_2 مساحت هریک از این قسمت‌ها باشد مساحت زمین برابر است با $S_1 + S_2$. ولی اگر بخواهند روی این زمین ساختمان بسازند زمینی که واقعاً می‌شود از آن استفاده کرد تصویر این زمین روی یک سطح افقی است که برابر می‌شود با $S_1 + S_2 \cos \theta$. بردار $S = S_1 + S_2$ بردار نمایش این سطح است و بزرگی آن برابر با $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos \theta}$ می‌باشد که از $S_1 + S_2$ کوچکتر است، ولی تصویر آن روی OZ برابر است با $S_z = S_1 + S_2 \cos \theta$ که درست برابر تصویر قطعه زمین روی صفحه افقی XOY است.

بالاخره مطابق شکل ۳۸.۳، سطح بسته‌ای را در نظر می‌گیریم. این سطح را به



شکل ۳۸.۳. یک سطح بسته با برداری به اندازه صفر نشان داده می‌شود.



شکل ۳۷.۳

سطحهای تخت جزئی تقسیم می‌کنیم و هر جزء سطح را با بردار S_i که سوی آن به سمت خارج سطح است نشان می‌دهیم. همیشه می‌توان به‌ازای هر یک سطح کوچک، جزء سطح دیگری پیدا کرد که ترکیب تصویرهاشان برابری صفر باشد. به عنوان مثال، مساحت‌های S_1 و S_2 روی شکل ۳۸.۳، اندازه تصویرشان روی XOY برابر ولی با علامت مخالف است. پس $S_{1z} = a$ و $S_{2z} = -a$ است. بنابراین کل سطح از جفت جزء سطحهایی از این‌گونه تشکیل می‌شود که مجموع بردارهای نمایش دهنده آنها برابر است با

$$S_z = \sum_i S_{iz} = 0$$

همین نتیجه برای مؤلفه‌های $S = \sum_i S_i$ روی دو محور دیگر (OY و OX) نیز به دست می‌آید. بنابراین $S = 0$ می‌شود، به‌گفته دیگر، بردار نمایش یک سطح بسته برابر صفر است.

فهرست منابع

1. *Vectors, A Programmed Text for Introductory Physics*. New York: Appleton-Century-Crofts, 1962.
2. *Elementary Vectors*, by E. Wolstenholme. New York: Pergamon Press, 1964.
3. *Physical Mechanics* (third edition), by R. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Section 1-3.
4. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964.
5. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapters 2 and 7.
6. *The Feynman Lectures on Physics*; Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1963, Chapter 11.
۷. سایمون، کیث، ر. هکانیک، ترجمه اعظم نیرومندراد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۱-۳ و ۳-۳.

مسئله‌ها

- ۱.۳. دو بردار به بزرگی ۶ و ۹ واحد، زاویه‌های زیر را با یکدیگر می‌سازند: (الف) 0° ، (ب) 60° ، (ج) 90° ، (د) 150° و (ه) 180° . بزرگی بردار برآیند و نیز راستای آن را نسبت به بردار کوتاه‌تر در هر یک از حالت‌های فوق به دست آورید.
- ۲.۳. زاویه بین دو بردار به بزرگی‌های ۱۰ و ۱۵ واحد را، در صورتی که طول برآیند آنها (الف) ۲۰ واحد، و (ب) ۱۲ واحد باشد، به دست آورید. شکل مربوط به هر کدام را رسم کنید.
- ۳.۳. زاویه بین دو بردار 110° و یکی از آنها که بزرگی آن ۲۰ واحد است با بردار برآیندشان زاویه 40° می‌سازد. بزرگی بردار دوم و برآیند را به دست آورید.
- ۴.۳. بزرگی برآیند دو بردار ۱۰ واحد و زاویه آن با یکی از بردارها به بزرگی ۱۲ واحد، 35° می‌باشد. بزرگی بردار دیگر و زاویه بین دو بردار را پیدا کنید.
- ۵.۳. برآیند دو بردار به بزرگی‌های ۸ و ۱۰ واحد با بردار بزرگتر زاویه 50° می‌سازد. زاویه بین دو بردار و نیز بزرگی بردار برآیند را حساب کنید.
- ۶.۳. برآیند دو بردار به بزرگی ۳۰ واحد، زاویه‌های 25° و 50° با آنها می‌سازد. بزرگی این دو بردار را پیدا کنید.
- ۷.۳. دو بردار به بزرگی‌های ۸ و ۱۰ واحد زاویه‌های زیر را با یکدیگر می‌سازند: (الف) 60° ، (ب) 90° و (ج) 120° . بزرگی بردار تفاضل این دو بردار و زاویه‌ای را که بردار تفاضل با بردار بزرگتر می‌سازد به دست آورید.
- ۸.۳. مؤلفه‌های قائم برداری به بزرگی ۱۵ واحد را، هنگامی که آن بردار با راستای مثبت محور OX زاویه‌های زیر را می‌سازد حساب کنید: (الف) 50° ، (ب) 130° ، (ج) 230° و (د) 310° .

۹.۳. سه بردار همصفحه بترتیب دارای طولهای ۶، ۵ و ۴ واحد می باشند. زاویه بین بردار اول و دوم 50° و زاویه بین بردار دوم و سوم 75° است. بزرگی بردار برآیند و راستای آن را نسبت به بزرگترین بردار به دست آورید.

۱۰.۳. چهار بردار همصفحه بترتیب به طولهای ۸، ۱۲، ۱۰ و ۶ واحد در دست اند. سه بردار آخر بترتیب زاویه های 70° ، 150° و 200° با بردار اولی می سازند. بزرگی و راستای بردار برآیند این چهار بردار را به دست آورید.

۱۱.۳. هواپیمایی از نقطه A در راستای شمال به نقطه B رفته، بعد به نقطه A برمی گردد. فاصله A تا نقطه B برابر L ، سرعت هواپیما نسبت به هوا برابر v و سرعت باد مساوی v' است. (الف) ثابت کنید که زمان رفت و برگشت در هوای آرام ($v' = 0$) برابر است با $t_a = 2L/v$. (ب) ثابت کنید که زمان رفت و برگشت هنگامی که باد کاملاً در راستای شرق یا (غرب) بوزد برابر است با

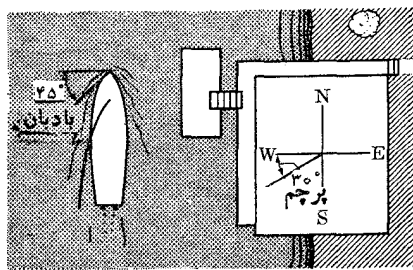
$$t_b = \frac{t_a}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{v}\right)^2}}$$

(ج) ثابت کنید که زمان رفت و برگشت هنگامی که باد درست در راستای شمال (یا جنوب) بوزد برابر است با

$$t_c = \frac{t_a}{1 - \left(\frac{v'}{v}\right)^2}$$

(د) هنگامی که $v = v'$ باشد آیا پروازهای (ب) و (ج) انجام پذیرند؟ برای یک v' معلوم، کدام یک از زمانهای t_a یا t_c طولانی تر است؟

۱۲.۳. بادبان دکل بزرگ یک کشتی بادی، چنانکه شکل ۳۹.۳ نشان می دهد، با زاویه 45°



شکل ۳۹.۳

به سمت عقب در اهتزاز است. ولی پرچمی که بر بالای ساختمانی در ساحل نصب شده است زاویه 30° با سمت جنوب غربی (30° SW) می سازد. (الف) اگر سرعت کشتی 10 km/hr باشد، سرعت باد را پیدا کنید. (ب) سرعت ظاهری باد برای ناظر روی عرشه چقدر است؟ ۱۳.۳. اگر بزرگیهای مجموع و تفاضل دو بردار برابر باشند، ثابت کنید این دو بردار

بر یکدیگر عمودند.

۱۴.۳. اگر مجموع و تفاضل دو بردار بر یکدیگر عمود باشند، ثابت کنید بزرگیهای دو بردار باهم برابرند.

۱۵.۳. تحقیق کنید که بزرگیهای مجموع و تفاضل دو بردار A و B در دستگاه مختصات قائم بترتیب عبارتند از

$$S = [(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2]^{1/2}$$

و

$$D = [(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2]^{1/2}.$$

۱۶.۳. دو بردار

$$A = u_x(3) + u_y(4) + u_z(-5)$$

و

$$B = u_x(-1) + u_y(1) + u_z(2)$$

در دست‌اند. (الف) بزرگی و راستای برآیند این دو بردار؛ (ب) بزرگی و راستای $A - B$ ؛ (ج) زاویه A با B را پیدا کنید.

۱۷.۳. برآیند سه بردار زیر را به دست آورید:

$$V_1 = u_x(5) + u_y(-2) + u_z \quad (\text{الف})$$

$$V_2 = u_x(-3) + u_y(1) + u_z(-7) \quad (\text{ب})$$

$$V_3 = u_x(4) + u_y(7) + u_z(6). \quad (\text{ج})$$

بزرگی برآیند و زاویه‌هایی را که این برآیند با محورهای OX ، OY و OZ می‌سازد پیدا کنید.

۱۸.۳. سه بردار زیر در دست‌اند:

$$V_1 = u_x(-1) + u_y(3) + u_z(4) \quad (\text{الف})$$

$$V_2 = u_x(3) + u_y(-2) + u_z(-8) \quad (\text{ب})$$

$$V_3 = u_x(4) + u_y(4) + u_z(4). \quad (\text{ج})$$

(الف) با دستکاری مستقیم، تعیین کنید که آیا اختلافی بین حاصل ضربهای برداری $(V_1 \times V_2) \times V_3$ و $V_1 \times (V_2 \times V_3)$ وجود دارد؟

(ب) $(V_1 \times V_2) \cdot V_3$ و $V_1 \cdot (V_2 \times V_3)$ را پیدا کنید و اگر اختلافی بین آنها وجود دارد تعیین کنید. $(V_3 \times V_1) \cdot V_2$ را حساب کنید و این نتیجه را با نتیجه‌های دو حاصل ضرب اول مقایسه کنید.

۱۹.۳. حاصل ضرب $(V_2 \times V_3) \cdot V_1$ را به صورت دترمینان بنویسید. از آنجا ویژگیهای تقارنی زیر را نتیجه بگیرید:

$$V_1 \cdot V_2 \times V_3 = V_3 \cdot V_1 \times V_2 = V_2 \cdot V_3 \times V_1$$

ثابت کنید که مقدار حاصل ضرب سه بردار (حاصل ضرب مختلط) برابر است با حجم متوازی السطوحی که از این سه بردار ساخته می شود.

۲۰.۳ ثابت کنید که

$$V_1 \times (V_2 \times V_3) = (V_1 \cdot V_3)V_2 - (V_1 \cdot V_2)V_3$$

[داهنمایی: محور X ها را در راستای V_3 و محور Y ها را به گونه ای انتخاب کنید که V_3 در صفحه XY باشد، با بسط رابطه درستی آن را تحقیق کنید.]

۲۱.۳ فاصله بین دو نقطه $P_1(4, 5, -7)$ و $P_2(-3, 6, 12)$ را پیدا کنید. معادله خطی را که از این دو نقطه می گذرد بنویسید.

۲۲.۳ فاصله نقطه $P(4, 5, -7)$ را از خطی که از نقطه $Q(-3, 6, 12)$ می گذرد و موازی $V = 4u_x - u_y + 3u_z$ است به دست آورید. همچنین فاصله نقطه P را از صفحه ای که از Q می گذرد و بر بردار V عمود است پیدا کنید.

۲۳.۳ ثابت کنید فاصله خطی که از نقطه P_1 می گذرد و با بردار V_1 موازی است، از خطی که از نقطه P_2 می گذرد و با V_2 موازی است برابر $P_1 P_2 \cdot (V_1 \times V_2) / |V_1 \times V_2|$ است. [یادآوری: فاصله بین دو خط در فضا برابر است با طول عمود مشترک آنها.] نتیجه بالا را با استفاده از مختصات P_1 و P_2 و مؤلفه های V_1 و V_2 بسط دهید، و آن را برای حالت زیر به کار ببرید: $P_1(4, 5, -7)$ ، $P_2(-3, 6, 12)$ ،

$$V_1 = u_x + u_y + u_z \text{ و } V_2 = u_x(-2) + u_y(1) + u_z(3)$$

۲۴.۳ خطی که از نقطه $P_1(4, 5, -7)$ می گذرد و با $V_1 = -2u_x + u_y - 4u_z$ موازی است و صفحه ای که از نقطه $Q(-3, 6, 12)$ می گذرد و بر بردار $V_2 = u_x - u_y + 2u_z$ عمود است داده شده اند. (الف) معادله هر کدام را در دستگاه مختصات قایم بنویسید. (ب) محل تقاطع خط و صفحه را پیدا کنید. (ج) زاویه بین خط و صفحه را به دست آورید.

۲۵.۳ معادله خطی را پیدا کنید که از نقطه $P(4, 5, -7)$ می گذرد و با فصل مشترک صفحه های $10 = 3x + 2y + 5z$ و $4 = x + y - z$ موازی است. معادله فصل مشترک دو صفحه را نیز به دست آورید.

۲۶.۳ اگر برآیند سه بردار V_1 ، V_2 و V_3 برابر صفر باشد، ثابت کنید که رابطه های زیر برقرارند:

$$V_1 \times V_3 = V_3 \times V_2 = V_2 \times V_1$$

از این رابطه ها نتیجه بگیرید که

$$\frac{V_1}{\sin \angle V_2 V_3} = \frac{V_2}{\sin \angle V_3 V_1} = \frac{V_3}{\sin \angle V_1 V_2}$$

$\angle V_i V_j$ علامت زاویه بین بردارهای V_i و V_j است.

۲۷.۳ اگر دو بردار دارای بزرگی یکسان V باشند و با یکدیگر زاویه θ بسازند، ثابت

کنید که بزرگی مجموع آنها برابر $S = 2V \cos(\theta/2)$ و تفاضل آنها $D = 2V \sin(\theta/2)$ است.

۲۸.۳. با استفاده از مؤلفه‌های V_1 و V_2 در دستگاه مختصات کروی [معادله (۱۰.۳)]، ثابت کنید که زاویه بین دو بردار را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\cos \theta_{12} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

که θ_{12} زاویه بین دو بردار است. از این نتیجه در محاسبه‌های اخترشناسی زیاد استفاده می‌کنند. این رابطه را برای محاسبه زاویه بین قایمهای سافرانسیسکو (با عرض جغرافیایی $37^\circ 45'$ شمالی و طول $122^\circ 27'$ غربی) و نیویورک (با عرض جغرافیایی $40^\circ 40'$ شمالی و طول جغرافیایی $73^\circ 50'$ غربی) به کار برید. پاسخ این مسئله را با پاسخ مسئله ۱۷.۲ مقایسه کنید.

۲۹.۳. اگر سه بردار a_1, a_2, a_3 هم‌صفحه نباشند، بردارهای

$$a^1 = \frac{a_2 \times a_3}{a_1 \cdot a_2 \times a_3}, \quad a^2 = \frac{a_3 \times a_1}{a_1 \cdot a_2 \times a_3}, \quad a^3 = \frac{a_1 \times a_2}{a_1 \cdot a_2 \times a_3}$$

را بردارهای متقابل^۱ می‌نامند. ثابت کنید که $a^i \cdot a_j = \delta^i_j$ و $a^i \cdot a_i = 1$ است. i و j می‌توانند مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را به‌خود بگیرند. در وضع هندسی بردارهای متقابل a^1, a^2, a^3 نسبت به بردارهای a_1, a_2, a_3 بحث کنید.

۳۰.۳. ثابت کنید که هر برداری مانند V را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$V = (V \cdot a^1)a_1 + (V \cdot a^2)a_2 + (V \cdot a^3)a_3 = \sum_i (V \cdot a^i)a_i$$

$$V = (V \cdot a_1)a^1 + (V \cdot a_2)a^2 + (V \cdot a_3)a^3 = \sum_i (V \cdot a_i)a^i$$

۳۱.۳. با نامگذاری $V \cdot a_i = V_i$ و $V \cdot a^i = V^i$ که آنها را بترتیب مؤلفه‌های هم‌ردی^۲ و پادوردی^۳ بردار V می‌خوانیم، و با نشان دادن $g_{ij} = a_i \cdot a_j$ و $g^{ij} = a^i \cdot a^j$ ثابت کنید

$$V^j = \sum_i V_i g^{ij}, \quad V_j = \sum_i V^i g_{ij}$$

و

$$V^2 = \sum_i V_i V^i = \sum_{ij} V_i V_j g^{ij} = \sum_{ij} V^i V^j g_{ij}$$

این رابطه‌ها در محاسبات برداری در هر دستگاه مختصات غیر قایم بسیار اهمیت دارند و بویژه در بحث ساختمان بلورین جامدات در فیزیک حالت جامد^۴ بسیار سودمند هستند.

۳۲.۳. ثابت کنید که

$$a^1 \cdot a^2 \times a^3 = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \times a_3}$$

۳۳.۳. ثابت کنید که $r = aS^2 + bS + c$ (که در آن a, b, c بردارهای ثابت و S یک اسکالر متغیر می‌باشد) نمایش یک سهمی است که در صفحه حاصل از بردارهای a و

1. reciprocal vectors 2. covariant 3. contravariant

4. solid-state physics

b قرار دارد و این صفحه از نقطه‌ای که بردار مکان آن **c** است می‌گذرد.

۳۴.۳. ثابت کنید که یک بردار یکا را در فضای سه بعدی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{u} = u_x \cos \alpha + u_y \cos \beta + u_z \cos \theta.$$

در این رابطه زاویه‌های α ، β و θ مطابق شکل ۱۷.۳ تعریف می‌شوند.

۳۵.۳. با استفاده از اینکه بردار نمایش یک سطح بسته برابر صفر است، ثابت کنید هر دو سطح که مرزهایشان یک منحنی بسته باشد با بردار یکسانی نشان داده می‌شوند.

۳۶.۳. سطح غیر مسدودی به مثلی به رأسهای $(0, 0, 0)$ و $(2, 0, 0)$ و $(0, 2, 0)$ و $(0, 0, 2)$ محدود شده است. این سطح از سه رویه مثلی شکل تشکیل شده که هر کدام دارای یک ضلع مشترک با مثلث محدود کننده سطح و یک رأس مشترک در نقطه (a, b, c) می‌باشند. ثابت کنید که بردار نمایش کل سطح بستگی به نقطه (a, b, c) ندارد. آیا از جواب مسئله ۳۵.۳ می‌توان چنین نتیجه‌ای انتظار داشت؟

۳۷.۳. چهار وجهی حجمی است که به چهار رویه مثلی شکل محدود می‌شود. یک چهار وجهی با رأسهایی به مختصات $(0, 0, 0)$ ، $(2, 0, 0)$ ، $(0, 2, 0)$ و $(1, 1, 1)$ را در نظر می‌گیریم. (الف) بردار نمایش هر رویه؛ (ب) بردار نمایش مجموعه چهار وجهی؛ (ج) بزرگی سطح چهار وجهی را پیدا کنید. آیا انتظار چنین نتیجه‌ای را برای سؤال (ب) داشتید؟

۳۸.۳. با استفاده از شیوه‌های برداری، (الف) طول قطرهای یک مکعب؛ (ب) زاویه‌هایی که این قطرها با یالهای مجاور می‌سازند؛ (ج) زاویه بین قطرها با رویه‌های مجاور؛ (د) زاویه بین قطرها را پیدا کنید.

۳۹.۳. رویه‌های یک چهار وجهی منتظم از مثلثهای متساوی الاضلاع به ضلع a تشکیل شده‌اند. با استفاده از روشهای برداری، زاویه‌ای که هریال با رویه مقابل می‌سازد و فاصله یک رأس از رویه مقابل را پیدا کنید.

مقدمه	۱.۴
ترکیب نیروهای همرس	۲.۴
گشتاور نیرو	۳.۴
گشتاور چند نیروی همرس	۴.۴
ترکیب نیروهای وارد بر یک جسم سخت	۵.۴
ترکیب نیروهای همصفحه	۶.۴
ترکیب نیروهای موازی	۷.۴
مرکز جرم	۸.۴
ایست شناسی: ترازمندی یک ذره	۹.۴
ایست شناسی: ترازمندی یک جسم سخت	۱۰.۴

یکی از موارد بسیار مهم کاربرد جبر برداری در ترکیب نیروهاست. در فصل ۷، هنگام بررسی دینامیک حرکت، تعریف دقیق نیرو خواهد آمد. با این حال، برای به دست آوردن مهارت بیشتر در کار کردن با بردارها، در اینجا ترکیب نیروها، و بویژه ترازمندی^۱ آنها را که کاربرد گسترده‌ای در مهندسی دارد، مطالعه می‌کنیم.

ما فعلاً برای نیرو همان معنای حسی و شهودی را که از تجربیات روزانه ناشی می‌شود می‌پذیریم، مانند نیرویی که برای کشیدن یا هل دادن یک وزنه معلوم لازم است، یا نیرویی که بعضی اسبابها وارد می‌کنند و غیره. این تعریف ایجاب می‌کند که نیرو یک کمیت برداری بوده و دارای بزرگی (باشدت)، راستا و سو باشد. آزمایش نشان می‌دهد که نیروها بنا به قواعد جبر برداری باهم ترکیب می‌شوند. ما در این فصل، تنها به بحث در مورد نیروهای وارد بر نقطه‌های مادی و یا ذرات و اجسام سخت^۲ می‌پردازیم.

در دستگاه MKSC یکای نیرو نیوتون (با علامت اختصاری N) است که در بخش ۸.۷ تعریف خواهد شد. با این حال، در این فصل، نیرو را بر حسب یکاهای دیگر، از قبیل کیلوگرم - نیرو (kgf) پوند - نیرو (lbf)، پوندال (pdl) و ژن (T) نیز بیان خواهیم کرد. این یکاها که غالباً به وسیلهٔ مهندسين به کار می‌روند، بر حسب نیوتون برابرند با

$$1 \text{ kgf} = 9.8 \text{ N}, \quad 1 \text{ lbf} = 0.4536 \text{ kgf} \approx 4.448 \text{ N},$$

$$1 \text{ pdl} = 0.031 \text{ lbf} \approx 0.138 \text{ N}, \quad 1 \text{ T} = 2000 \text{ lbf} \approx 8900 \text{ N}.$$

معمولاً در صنعت به جای پوند-نیرو و کیلوگرم-نیرو به طور ساده یکاهای جرم یعنی «پوند» و «کیلوگرم» را به کار می‌برند.

۲.۴ ترکیب نیروهای هم‌مس

اگر نیروها، هم‌مس^۳ باشند (یعنی همگی به یک نقطه وارد شوند)، برآیندشان از جمع برداری آنها، مطابق روش به کار رفته در بخش ۶.۳ به دست می‌آید. بنا بر این R، برآیند نیروهای هم‌مس $F_1, F_2, F_3, \dots$ برابر است یا

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \dots = \sum_i F_i \quad (1.4)$$

اگر نیروها در یک صفحه، به عنوان مثال در صفحه YX، قرار گرفته باشند، بنا به معادله (۱.۳) داریم

$$R = u_x R_x + u_y R_y$$

که در آن

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i \\ R_y &= \sum F_{iy} = \sum F_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (۲.۴)$$

بزرگی بردار R برابر است با $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ و راستای آن را زاویه α مشخص می‌کند به طوری که $\tan \alpha = R_y/R_x$ است. باید بپذیریم که برآیند R از نظر فیزیکی هم ارز مؤلفه‌های $F_1, F_2, F_3, \dots$ می‌باشد.

مثال ۱.۴. برآیند نیروهای وارد بر نقطه O در شکل ۱.۴ را به دست آورید. نیروی F_1 برابر 1200 N ، نیروی F_2 برابر 900 N ، نیروی F_3 برابر 300 N و نیروی F_4 برابر 800 N است. سوو راستای نیروها در شکل مشخص شده است.

حل: ابتدا، با استفاده از زاویه‌ای که هر نیرو با سوی مثبت محور X ها می‌سازد، هر نیرو را بر حسب مؤلفه‌های آن بر روی OX و OY می‌نویسیم. در این صورت به دست می‌آید

$$F_1 = u_x(1200)\text{N}$$

$$F_2 = u_x(F_2 \cos 40^\circ) + u_y(F_2 \sin 40^\circ) = u_x(689.4) + u_y(578.5)\text{N}$$

$$F_3 = u_x(F_3 \cos 120^\circ) + u_y(F_3 \sin 120^\circ) = u_x(-150) + u_y(259.8)\text{N}$$

$$F_4 = u_x(F_4 \cos 23^\circ) + u_y(F_4 \sin 23^\circ)$$

$$= u_x(-514.2) + 2u_y(-612.8)\text{N}.$$

چون $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ است، داریم

$$R_x = 1200 + 689.4 - 150 - 514.2 = 1225.2\text{N}$$

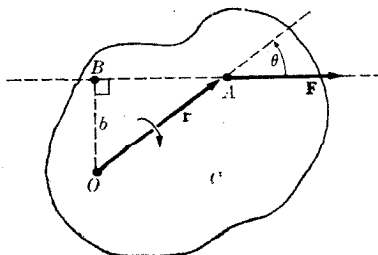
$$R_y = 0 + 578.5 + 259.8 - 612.8 = 225.5\text{N}.$$

بنابراین

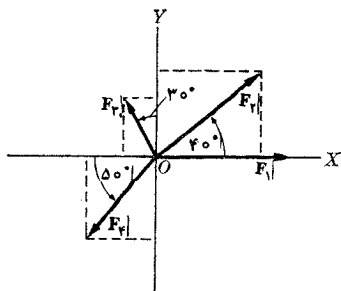
$$R = u_x(1225.2) + u_y(225.5)\text{N}.$$

از اینجای بزرگی و راستای نیروی برآیند بترتیب برابر می‌شوند با

$$R = 1245.4\text{N} \text{ و } \alpha = 10.4^\circ$$



شکل ۲.۴. گشتاور یک نیرو



شکل ۱.۴

۳.۴ گشتاور نیرو

فرض کنیم نیروی F بر روی جسم C که می تواند دور نقطه O بچرخد وارد می شود (شکل ۲.۴). اگر راستای F از نقطه O نگذرد، بر اثر این نیرو جسم حول نقطه O می چرخد. تجربیات روزانه نشان می دهند که شدت تأثیر نیروی F در چرخاندن جسم C متناسب با $OB = b$ (به نام بازوی اهرم) یا فاصله نقطه O از راستای (خط اثر) نیرو افزایش می یابد. به عنوان مثال، هنگامی که دری را بازمی کنیم، همیشه از فاصله خیلی دور از لولا آن را می کشیم و یا فشار می دهیم و نیز سعی می کنیم راستای نیروی وارد بر در هنگام کشیدن یا فشار دادن بر آن عمود باشد. از این آزمایش نتیجه می گیریم که می توان یک کمیت فیزیکی، به نام گشتاور نیرو^۱ با رابطه زیر تعریف کرد:

$$\tau = Fb \quad (۳.۴)$$

یا، گشتاور نیرو = نیرو $\times$ بازوی اهرم. بنابراین گشتاور نیرو را می توان بر حسب حاصل ضرب یک واحد نیرو و یک واحد فاصله بیان کرد. بدین طریق در دستگاه یکاهای MKSC گشتاور نیرو بر حسب نیوتون $\times$ متر، یا Nm بیان می شود. یکاهای دیگر مانند $kgfm$ یا $lbf \cdot ft$ نیز برای بیان گشتاور نیرو به کار می روند.

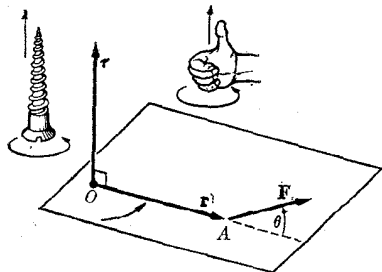
با توجه به شکل ۲.۴ که $b = r \sin \theta$ است، می توان نوشت

$$\tau = Fr \sin \theta. \quad (۴.۴)$$

با مقایسه این رابطه با معادله (۲۱.۳)، نتیجه می گیریم که گشتاور نیرو را می توان یک کمیت برداری در نظر گرفت و با حاصل ضرب برداری زیر نشان داد:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (۵.۴)$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه A یا نقطه اثر نیرو نسبت به نقطه O است. بنا به خواص ضرب برداری، گشتاور نیرو را با برداری در راستای عمود بر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ یعنی عمود بر صفحه حاصل از $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ نمایش می دهند. سوی آن، چنانکه در شکل ۳.۴ نشان داده شده است، در سوی پیشروی یک پیچ راستگرد است که در سو و راستای F دور نقطه O می پیچد.



شکل ۳.۴. رابطه برداری بین گشتاور، نیرو و بردار مکان

با توجه به اینکه $\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$ و $\mathbf{F} = F_x\mathbf{u}_x + F_y\mathbf{u}_y + F_z\mathbf{u}_z$

است و با به کار بردن معادله (۶.۳) داریم

$$\tau = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{u}_x(yF_z - zF_y) + \mathbf{u}_y(zF_x - xF_z) + \mathbf{u}_z(xF_y - yF_x) \quad (6.4)$$

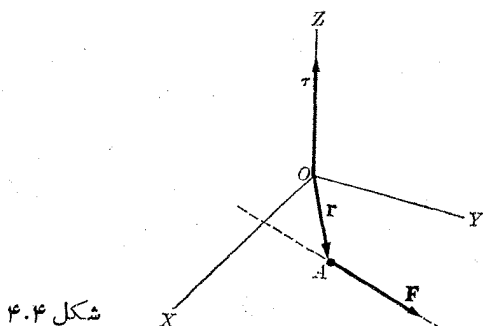
یا $\tau_z = xF_y - yF_x$ و $\tau_y = zF_x - xF_z$ و $\tau_x = yF_z - zF_y$ به ویژه، اگر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ هر دو در صفحه OXY باشند، یعنی $z = 0$ و $F_z = 0$ باشد، خواهیم داشت

$$\tau = \mathbf{u}_z(xF_y - yF_x). \quad (7.4)$$

و همچنانکه شکل ۴.۴ نشان می‌دهد، بردار τ موازی محور Z هاست. بزرگی این بردار برابر است با

$$\tau = xF_y - yF_x. \quad (8.4)$$

باید یادآوری کرد که با جا بجا شدن نقطه اثر نیرو در راستای آن، گشتاور نیرو تغییر نمی‌کند، زیرا فاصله b بدون تغییر باقی می‌ماند. همچنین به ازای مقادیر اختیاری x و y ، رابطه (۸.۴) معادله خط اثر نیرویی را بیان می‌کند که گشتاور آن τ می‌باشد.



شکل ۴.۴

مثال ۲.۴. گشتاور نیروی وارد بر جسم شکل ۵.۴ را تعیین کنید که در آن بزرگی F برابر 6 N است و راستای آن با محور X زاویه 30° می‌سازد و بزرگی $r = 45\text{ cm}$ است و با سوی مثبت محور X زاویه 50° می‌سازد. همچنین معادله خط اثر این نیرو را پیدا کنید.

حل: می‌توان مسئله را به دو راه مختلف حل کرد. ابتدا، از روی شکل پیدا است که بازوی اهرم F برابر است با

$$b = r \sin 20^\circ = (0.45\text{ m})(0.342) = 0.154\text{ m}.$$

بنابراین گشتاور نیرو نسبت به نقطه O برابر است با

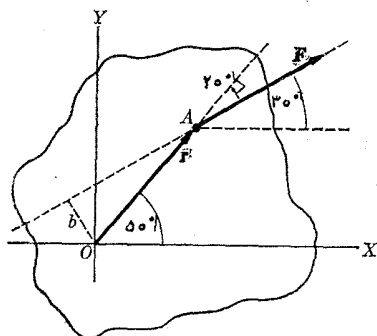
$$\tau = Fb = (6\text{ N})(0.154\text{ m}) = 0.924\text{ N m}.$$

به عبارت دقیقتر، باید نوشت 0.924 N m —، زیرا چرخش F دور نقطه O در جهت ساعتگرد صورت می‌گیرد، که متناظر است با پیشروی پیچ راستگرد در سوی Z های منفی، یا به سوی داخل کاغذ.

به عنوان روش دوم، می‌توان معادله (۸.۴) را به کار برد، زیرا مسئله در صفحه (دو بعدی) است. داریم

$$x = r \cos 50^\circ = 0.289\text{ m}, \quad y = r \sin 50^\circ = 0.345\text{ m},$$

$$F_x = F \cos 30^\circ = 5.196\text{ N}, \quad F_y = F \sin 30^\circ = 3.0\text{ N}$$



شکل ۵.۴

و در نتیجه

$$\tau = xF_y - yF_x = 0.867 - 1.792 = -0.925\text{ N m}$$

که با پاسخ قبلی تطبیق می‌کند. برتری روش دوم در این است که علامت را نیز مشخص می‌کند.

برای به دست آوردن معادله خط اثر نیروی F ، تنها کافی است، x و y را در معادله (۸.۴) مجهول اختیار کنیم؛ به دست می‌آید

$$-0.925 = 3x - 5.196y$$

یا به طور ساده‌تر

$$y = 0.577x + 0.178$$

۴.۴ گشتاور چند نیروی هم‌رس

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که چند نیروی $F_1, F_2, F_3, \dots$ به نقطه‌ای مانند A وارد می‌شوند (شکل ۴.۴). گشتاور نیرویی مانند F_i نسبت به نقطه O برابر است با $\mathbf{T}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i$.

توجه داشته باشید نوشتیم $\mathbf{r}$ نه $\mathbf{r}_i$ زیرا تمام نیروها به یک نقطه (A) وارد می‌شوند. گشتاور نیروی برآیند ($\mathbf{R}$) برابر است با

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

که در آن $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$ همان بردار مکان مشترک نیروهاست. با استفاده از خاصیت توزیع پذیری ضرب برداری، داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \dots\end{aligned}$$

در نتیجه

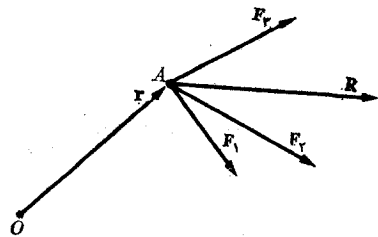
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \dots = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \quad (9.4)$$

رابطه (۹.۴) بدین طریق بیان می‌شود: گشتاور برآیند چند نیروی هم‌رس برابر است با جمع برداری گشتاورهای نیروهای مؤلفه.

اگر همه نیروها در یک صفحه باشند و نقطه O نیز در همین صفحه باشد، تمام گشتاورهایی که در معادله (۹.۴) ظاهر می‌شوند، در راستای عمود بر صفحه می‌باشند و معادله برداری (۹.۴) به صورت اسکالر زیر نوشته می‌شود:

$$\tau = \sum_i \tau_i \quad (10.4)$$

شکل ۶.۴. هنگامی که نیروها هم‌رس باشند، گشتاور نیروی برآیند برابر است با جمع برداری گشتاورهای نیروهای مؤلفه.



معادله (۹.۴) ثابت می‌کند که یک نیروی واحد را می‌توان جانشین یک دستگاه نیروهای هم‌رس کرد. این نیروی واحد برآیند نیروهای هم‌رس است و تازمانی که موضوع مطالعه پدیده‌های انتقال و چرخش باشد کاملاً هم‌ارز دستگاه نیروهاست.

مثال ۳.۴. سه نیرو مطابق شکل ۷.۴ به نقطه A وارد می‌شوند که $r = 1.5 \text{ m}$ است و

$$\mathbf{F}_1 = u_x(6) + u_y(0) + u_z(0) \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = u_x(6) - u_y(7) + u_z(14) \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_3 = u_x(5) + u_y(0) - u_z(3) \text{ N}.$$

با انتخاب نقطه O به عنوان مبدأ مختصات، گشتاور برآیند این نیروها را به دست آورید.

حل: ابتدا با به کار بستن رابطه $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$ که در آن $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ است، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{u}_x(6 + 6 + 5) + \mathbf{u}_y(0 - 7 + 0) + \mathbf{u}_z(0 + 14 - 3) \\ &= \mathbf{u}_x(17) - \mathbf{u}_y(7) + \mathbf{u}_z(11) \text{ N} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x(1.06) + \mathbf{u}_y(1.06) \text{ m}$ است و با استفاده از معادله (۶.۴) گشتاور برآیند را به دست می آوریم:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{u}_x(11.66) - \mathbf{u}_y(11.66) - \mathbf{u}_z(2.534) \text{ Nm}.$$

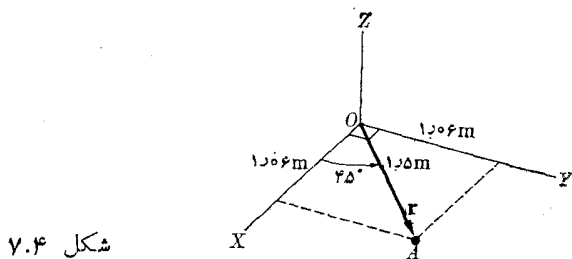
همچنین گشتاور برآیند را می توان با استفاده از معادله (۹.۴) نیز پیدا کرد. با به کار بردن معادله (۶.۴) برای هر نیرو می توانیم بنویسیم

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{u}_x(0) + \mathbf{u}_y(0) - \mathbf{u}_z(6.36) \text{ Nm}$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{u}_x(14.748) - \mathbf{u}_y(14.748) - \mathbf{u}_z(13.778) \text{ Nm}$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 = -\mathbf{u}_x(3.18) + \mathbf{u}_y(3.18) - \mathbf{u}_z(5.30) \text{ Nm}.$$

از جمع سه گشتاور فوق، بردار $\boldsymbol{\tau}$ که قبلاً پیدا کرده بودیم، به دست می آید. بدین طریق، رابطه (۹.۴) یک بار دیگر تأیید می شود. تحقیق کنید که $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} = 0$ است، این رابطه نشان می دهد هنگامی که نیروها همسر باشند $\boldsymbol{\tau}$ و $\mathbf{R}$ برهم عمودند.



شکل ۷.۴

۵.۴ ترکیب نیروهای وارد بر یک جسم سخت

هنگامی که نیروها به یک نقطه وارد نمی شوند، ولی بر یک جسم سخت اثر می کنند، لازم است دو اثر انتقال و چرخش از یکدیگر متمایز شوند. انتقال یک جسم سخت با جمع برداری نیروها، یعنی

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (11.4)$$

مشخص می شود. در این مورد نقطه اثر نیروی برآیند $\mathbf{R}$ هنوز معلوم نیست. حرکت چرخشی جسم را جمع برداری گشتاور نیروها، که همگی نسبت به یک نقطه به دست آمده باشند مشخص می کند:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \dots = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \quad (12.4)$$

در نظر اول، منطقی به نظر می رسد بپذیریم که نقطه اثر نیروی $\mathbf{R}$ باید چنان باشد که گشتاور نیروی $\mathbf{R}$ برابر $\boldsymbol{\tau}$ باشد، وضعی که همیشه در مورد نیروهای همسر صادق است. اگر این امر

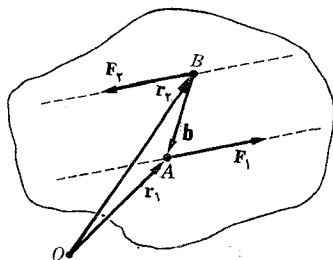
ممکن باشد، نیرویی که بدین طریق اثر می کند هم ارز دستگاه نیروهاست چه در انتقال و چه در چرخش.

ولی معمولاً چنین امری ممکن نیست زیرا گشتاور نیروی R برداری است عمود بر R و در بیشتر موارد R و T که از معادله های (۱۱.۴) و (۱۲.۴) به دست می آیند برهم عمود نیستند. بنا بر این در حالت کلی، یک دستگاه نیروهای وارد بر یک جسم سخت را نمی توان به یک نیروی واحد یا برآیند نیروها کاهش داد.

به عنوان مثال ساده، یک جفت^۱ را در نظر می گیریم. یک جفت، مجموعه دو نیروی مساوی ولی با علامت مخالف است که در دو راستای موازی اثر می کنند (شکل ۸.۴). بدیهی است برآیند یا جمع برداری این دو نیرو برابر صفر است، $R = F_1 + F_2 = 0$ ، و نشان می دهد که یک جفت هرگز اثر انتقالی روی جسم ندارد. برعکس با توجه به اینکه $F_1 = -F_2$ است، جمع برداری گشتاورها برابر است با

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = r_1 \times F_1 - r_2 \times F_1 \\ &= (r_1 - r_2) \times F_1 = b \times F_1 \end{aligned} \quad (13.4)$$

که در آن $b = r_1 - r_2$ بازوی اهرم جفت^۲ نامیده می شود. بنا بر این $T \neq 0$ است و جفت موجب یک حرکت چرخشی می شود. لازم است یادآوری شود که b به نقطه O بستگی ندارد، در نتیجه گشتاور یک جفت مستقل از مبدایی است که محاسبه نسبت به آن صورت می گیرد. بدیهی است که امکان ندارد یک نیروی واحد دارای تمام این شرایط باشد.



شکل ۸.۴. جفت نیرو

به حالت کلی باز می گردیم. ملاحظه می شود که یک دستگاه نیرو را می توان به یک نیرو و یک جفت کاهش داد. برای حرکت انتقالی، نیروی هم ارز را برابر R انتخاب می کنیم و این نیرو به نقطه ای وارد می شود که گشتاورها نسبت به آن نقطه حساب شده اند، به طوری که گشتاور خود R برابر صفر است. برای هم ارزی چرخشی، جفتی اختیار می شود که گشتاور آن T باشد.

مثال ۴.۴. نیروی برآیند و گشتاور برآیند دستگاه نیروهای شکل ۹.۴ را به دست آورید. در این شکل

$$F_1 = u_x(3) + u_y(4) + u_z(4)N$$

و

$$F_2 = u_x(-2) + u_y(5) + u_z(1)N$$

 و نقطهٔ اثر نیروهای F_1 و F_2 بترتیب

$A(0.4\text{ m}, 0.5\text{ m}, 0)$ و $B(0.4\text{ m}, -0.1\text{ m}, 0.8\text{ m})$ است.

حل: ابتدا برآیند را پیدا می‌کنیم:

$$R = F_1 + F_2 = u_x(1) + u_y(9) + u_z(5)N.$$

سپس گشتاور هر نیرو را نسبت به نقطهٔ O ، مبدأ مختصات، حساب می‌کنیم:

$$\tau_1 = r_1 \times F_1 = u_x(2) + u_y(-16) + u_z(0.1)Nm$$

$$\tau_2 = r_2 \times F_2 = u_x(-41) + u_y(-20) + u_z(1.8)Nm.$$

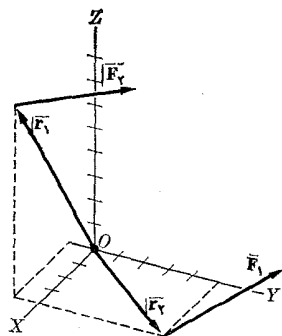
بنابراین

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = u_x(-21) + u_y(-36) + u_z(1.9)Nm.$$

اکنون بررسی می‌کنیم که آیا R را می‌توان به‌گونه‌ای قرار داد تا گشتاور آن برابر τ باشد؟ برای این کار ابتدا باید ببینیم که آیا R و τ برهم عمودند یا نه. بنا به معادلهٔ (۲۰.۳) پیدا می‌کنیم

$$\tau \cdot R = (-21)(1) + (-36)(9) + (1.9)(5) = 250\text{ N}^2\text{ m}$$

$\tau \cdot R$ مخالف صفر است. بنابراین دستگاه نیروهای شکل ۹.۴ را نمی‌توان به یک نیروی واحد کاهش داد.



شکل ۹.۴

۶.۴ ترکیب نیروهای هم‌صفحه

هنگامی که همهٔ نیروها در یک صفحه قرار دارند، همیشه می‌توان دستگاه نیروها را به یک نیروی R ، نیروی برآیند که از معادلهٔ (۱.۴) به‌دست می‌آید کاهش داد (مگر اینکه $R = 0$).

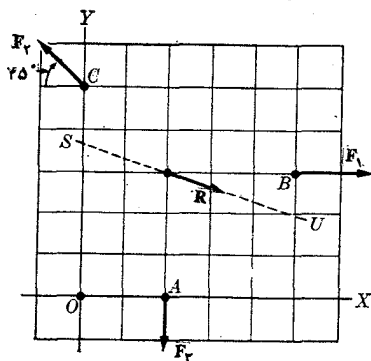
ولی $\tau \neq 0$ باشد). زیرا در این حالت همیشه τ بر R عمود است. با قراردادن O مبدأ مختصات در مرکز گشتاورها (نقطه‌ای که گشتاور نیروها نسبت به آن نقطه حساب می‌شوند) در صفحه نیروها، مشاهده می‌شود که $\tau_x, \tau_y, \dots$ و همچنین $\sum_i \tau_i$ همگی بر صفحه عمودند، چنانکه با به‌کار بردن معادله (۶.۴) یا (۷.۴) و نیز از روی شکل ۴.۴ مشاهده می‌شود. بنابراین R و τ برهم عمودند. R را می‌توان در فاصله r از O قرار داد به‌طوری‌که گشتاور آن برابر τ باشد، یعنی $r \times R = \tau$. در این صورت رابطه اسکالر $\tau = \sum_i \tau_i$ را می‌توان جانشین رابطه برداری $\tau = \sum_i \tau_i$ کرد، زیرا تمام بردارهای τ_i همراستا هستند. τ_i ها از معادله (۸.۴) محاسبه می‌شوند. بنابراین اگر R_x و R_y مؤلفه‌های R در یک دستگاه مختصات قایم باشند، در این صورت R را باید در نقطه (x, y) قرار داد، به‌گونه‌ای که

$$xR_y - yR_x = \tau. \quad (۱۴.۴)$$

باشد. رابطه فوق معادله خط اثر برآیند نیروهاست. بنابراین یک نقطه اثر وجود ندارد بلکه یک خط اثر وجود دارد.

با یک اثبات ظریفتر می‌توان نشان داد که این نتیجه حتی برای حالتی که مرکز گشتاور نیروها در خارج از صفحه نیروها باشد نیز معتبر است.

مثال ۵.۴. برآیند دستگاه نیروهای نشان داده شده در شکل ۱۰.۴ را، که تمام آنها در یک صفحه قرار دارند، تعیین کنید. $F_1 = 10\text{ N}$ و $F_2 = 8\text{ N}$ و $F_3 = 7\text{ N}$ و ضلع هر مربع برابر 1 m است.



شکل ۱۰.۴

حل: ابتدا نیروها را به‌صورت برداری می‌نویسیم:

$$F_1 = u_x(10)\text{ N}$$

$$F_2 = u_x(F_2 \cos 135^\circ) + u_y(F_2 \sin 135^\circ) = u_x(-5.66) + u_y(5.66)\text{ N}$$

$$F_3 = -u_y(7)\text{ N}.$$

بنابراین نیروی برآیند $R = F_1 + F_2 + F_3$ برابر است با

$$R = u_x(4.34) + u_y(-1.34)\text{ N}$$

یا $R = ۴۵۴ \text{ N}$ و زاویه آن با محور X ها برابر می شود با $\alpha = -۱۷۱^\circ$. نقطه اثر نیروها عبارتند از $A(۰.۲ \text{ m}, ۰)$ و $B(۰.۵ \text{ m}, ۰.۳ \text{ m})$ و $C(۰, ۰.۵ \text{ m})$. با استفاده از معادله (۸.۴) گشتاور نیروها را حساب می کنیم:

$$\tau_1 = - (۰.۳ \text{ m})(۱۰ \text{ N}) = - ۳۰۰ \text{ Nm}$$

$$\tau_2 = - (۰.۵ \text{ m})(-۵۶۶ \text{ N}) = ۲۸۳ \text{ Nm}$$

$$\tau_3 = (۰.۲ \text{ m})(-۷ \text{ N}) = - ۱.۴۰ \text{ Nm}.$$

بنابراین $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = - ۱۵۷ \text{ Nm}$ برداری است در راستای محور Z ها. برای یافتن خط اثر برآیند، معادله (۱۴.۴) را با x و y اختیاری به کار می بریم:

$$x(-۱۳۴) - y(۴۳۴) = - ۱۵۷$$

و یا

$$۱۳۴x + ۴۳۴y = ۱۵۷$$

که مربوط است به خط SU .

۷.۴ ترکیب نیروهای موازی

یک دستگاه نیروهای موازی با بردار یکای $\mathbf{u}$ را در نظر می گیریم. در این مورد $\mathbf{F}_i = uF_i$ است. در اینجا F_i ، اگر $\mathbf{F}_i$ با $\mathbf{u}$ همسو باشد، مثبت، و اگر در سوی مخالف آن باشد، منفی است. جمع برداری آنها

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i uF_i = u(\sum_i F_i) \quad (۱۵.۴)$$

نیز موازی $\mathbf{u}$ است. از این رو بزرگی برآیند برابر می شود با

$$R = \sum_i F_i \quad (۱۶.۴)$$

جمع برداری گشتاور نیروها برابر است با

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{r}_i \times uF_i = (\sum_i \mathbf{r}_i F_i) \times \mathbf{u}$$

که بر $\mathbf{u}$ و در نتیجه بر $\mathbf{R}$ عمود است. پس با جا دادن $\mathbf{R}$ در نقطه مناسب با بردار مکان $\mathbf{r}_c$ ، گشتاور آن می تواند برابر $\boldsymbol{\tau}$ شود یعنی $\mathbf{r}_c \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\tau}$. با استفاده از رابطه های $\mathbf{R}$ و $\boldsymbol{\tau}$ که در بالا آمد می توان نوشت

$$\mathbf{r}_c \times u(\sum_i F_i) = (\sum_i \mathbf{r}_i F_i) \times \mathbf{u}$$

یا

$$[\mathbf{r}_c(\sum_i F_i)] \times \mathbf{u} = (\sum_i \mathbf{r}_i F_i) \times \mathbf{u}.$$

این معادله هنگامی تحقق پیدا می کند که $\mathbf{r}_c(\sum_i F_i) = \sum_i \mathbf{r}_i F_i$ یا

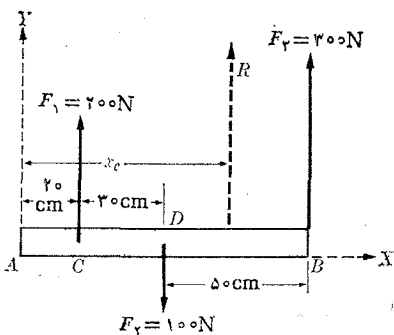
$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i F_i}{\sum_i F_i} = \frac{\mathbf{r}_1 F_1 + \mathbf{r}_2 F_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} \quad (۱۷.۴)$$

باشد. نقطه تعریف شده با بردار مکان $\mathbf{r}_c$ ، مرکز نیروهای موازی نام دارد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که یک دستگاه نیروهای موازی را می‌توان به نیروی واحدی موازی با هریک از نیروها، که از رابطه (۱۵.۴) به دست می‌آید، کاهش داد. نقطه اثر این نیرو از رابطه (۱۷.۴) تعیین می‌شود.

معادله برداری (۱۷.۴) را می‌توان به سه معادله تجزیه کرد که هر معادله مربوط به یکی از مؤلفه‌ها روی محورهای مختصات است:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}, \quad y_c = \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}, \quad z_c = \frac{\sum_i z_i F_i}{\sum_i F_i} \quad (18.4)$$

که در آن x_c ، y_c و z_c مختصات نقطه‌ای است که با $\mathbf{r}_c$ تعریف می‌شود. مثال ۶.۴. برآیند نیروهای وارد بر میله شکل ۱۱.۴ را به دست آورید.



شکل ۱۱.۴

حل: با انتخاب سوی مثبت به سمت بالا و با به کار بردن معادله (۱۶.۴) بزرگی برآیند به دست می‌آید:

$$R = \sum_i F_i = F_1 - F_2 + F_3 = 400 \text{ N}.$$

برای پیدا کردن نقطه اثر $\mathbf{R}$ از معادله‌های (۱۸.۴) استفاده می‌کنیم. ما در اینجا تنها به معادله اول نیاز داریم زیرا تمام نیروها موازی هستند. با انتخاب نقطه A به عنوان مبدأ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i} \\ &= \frac{(200 \text{ N})(20 \text{ cm}) + (-100 \text{ N})(50 \text{ cm}) + (300 \text{ N})(100 \text{ cm})}{400 \text{ N}} \\ &= 72.5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

انتخاب مبدأ اصلاً مهم نیست. برای نشان دادن این امر، نقطه دیگری مانند D را به عنوان

مبدأ اختیار می‌کنیم. در این صورت داریم

$$x_c = \frac{(200 \text{ N})(-30 \text{ cm}) + (-100 \text{ N})(0) + (300 \text{ N})(50 \text{ cm})}{400 \text{ N}}$$

$$= 22.5 \text{ cm}.$$

این نقطه عیناً مطابق با نقطه‌ای است که قبلاً پیدا کردیم زیرا $AD = 50 \text{ cm}$ است.

۸.۴ مرکز جرم

به هر ذره واقع در زیر تأثیر گرانی زمین، نیرویی مانند W به نام وزن وارد می‌شود. امتداد راستای این نیرو از مرکز زمین می‌گذرد. در بخش ۶ از فصل ۷ خواهیم دید که اگر m جرم ذره و g شتاب گرانی باشد، رابطه زیر را داریم

$$W = mg. \quad (19.4)$$

اگر چه نیروهای وزن یکدیگر را در مرکز زمین قطع می‌کنند، هنگامی که بر ذرات جسمی با ابعاد نسبتاً کوچک وارد می‌شوند، می‌توان آنها را بر دارهای موازی در نظر گرفت. بنا بر این وزن کل یک جسم از رابطه $W = \sum_i m_i g$ به دست می‌آید. این جمع تمام ذرات تشکیل دهنده جسم را در بر می‌گیرد و به نقطه‌ای وارد می‌شود که بردار مکان آن از این رابطه به دست می‌آید:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i m_i g}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (20.4)$$

با توجه به معادله (۱۷.۴) و با به کار بردن معادله (۱۸.۴)، مؤلفه‌های معادله (۲۰.۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}. \quad (21.4)$$

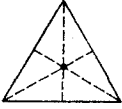
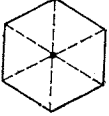
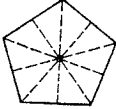
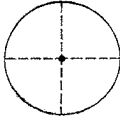
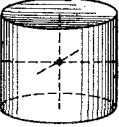
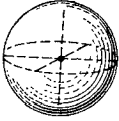
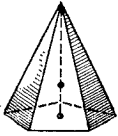
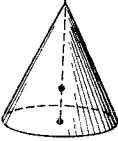
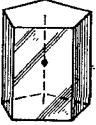
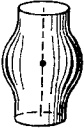
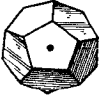
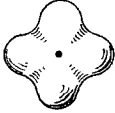
نقطه‌ای که با معادله (۲۰.۴) یا (۲۱.۴) تعریف می‌شود مرکز جرم^۱ دستگاه ذرات نام دارد و آن را با علامت اختصاری CM نشان می‌دهند*. مفهوم مرکز جرم تنها مربوط به ترکیب نیروهای موازی نیست. بلکه، چنانکه در فصلهای ۹ و ۱۰ خواهد آمد، مرکز جرم نقش اساسی در تحلیل حرکت یک دستگاه ذرات، بویژه یک جسم سخت، بازی می‌کند.

اگر جسمی را در نظر بگیریم که از ذرات بسیار زیاد و متراکم تشکیل شده باشد، می‌توان ساختار جسم را پیوسته فرض کرد. چنانچه چگالی در هر نقطه p باشد، می‌توان حجم

1. center of mass

نیروی وزن عملاً بر نقطه‌ای وارد می‌شود که تفاوت اندکی با مرکز جرم دارد و گرانیگاه (center of gravity) خوانده می‌شود. برای مقاصد عملی هیچ فرقی بین این دو نقطه قائل نمی‌شویم مگر آنکه جسم خیلی بزرگ باشد.

جدول ۱.۴. مرکز جرم چند شکل هندسی

شکل	جای مرکز جرم
	صفحه مثلث شکل در محل تقاطع میانه‌ها
  	صفحه به شکل چند ضلعی منتظم و دایره در مرکز هندسی شکل
 	استوانه و کره در مرکز هندسی شکل
 	هرم و مخروط روی خطی که رأس را به مرکز قاعده وصل می‌کند و به فاصله $1/4$ ارتفاع آن از مرکز قاعده
 	شکل با تقارن محوری در نقطه‌ای روی محور تقارن
 	شکل با مرکز تقارن در مرکز تقارن

جسم را به حجمهای جزئی dV تجزیه کرد. بنا براین جرم هر جزء برابر می‌شود با $dm = \rho dV$. در این صورت اگر در معادلات (۲۱.۴) علامت جمع را به انتگرال تبدیل کنیم، مرکز جرم از روابط زیر به دست می‌آید:

$$x_c = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV}, y_c = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV}, z_c = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV}. \quad (22.4)$$

اگر جسم همگن باشد ρ ثابت است و می توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد و نوشت

$$x_c = \frac{\int x dV}{\int dV} = \frac{1}{V} \int x dV. \quad (23.4)$$

برای y_c و z_c نیز معادلات مشابهی می توان نوشت. در این حالت، مرکز جرم تنها از خصوصیات هندسی جسم تعیین می شود.

هرگاه جسم همگن دارای نوعی تقارن باشد، محاسبات ساده تر می شود، زیرا مرکز جرم باید بر عنصر تقارن منطبق باشد. در اجسامی مانند کره، متوازی السطوح، ... و غیره که دارای مرکز تقارن هستند، مرکز جرم جسم بر مرکز تقارن منطبق است. اگر جسم دارای محور تقارن باشد، مانند مخروط، مرکز جرم روی محور تقارن قرار دارد. (در جدول ۱۰۴ مرکز جرم چند جسم که دارای شکل هندسی و گونه ای تقارن هستند مشخص شده است.)

مثال ۷۰۴. مرکز جرم ذرات پراکنده در شکل ۱۲۰۴ را پیدا کنید. ضلع هر مربع ۵ cm و جرمها عبارتند از: $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 30 \text{ kg}$, $m_3 = 20 \text{ kg}$ و $m_4 = 15 \text{ kg}$.
حل: ابتدا باید جرم کل m را به دست آوریم:

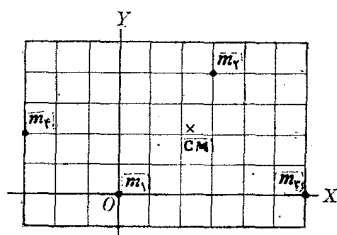
$$m = \sum_i m_i = 5 \text{ kg} + 30 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 15 \text{ kg} = 70 \text{ kg}.$$

سپس از رابطه های اول و دوم معادله های (۲۱۰۴) استفاده کرده x_c و y_c را حساب می کنیم. جهت اختصار از نوشتن یکاها جلو اعداد صرف نظر می شود. به دست می آید

$$x_c = \frac{(5)(0) + (30)(15) + (20)(30) + (15)(-15)}{70} = 11.8 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{(5)(0) + (30)(20) + (20)(0) + (15)(+10)}{70} = 10.7 \text{ cm}.$$

بنابراین مرکز جرم در نقطه ای به مختصات ۱۱.۸ cm و ۱۰.۷ cm قرار دارد که در شکل ۱۲۰۴ با CM مشخص شده است.



شکل ۱۲۰۴

۹۰۴ ایست شناسی: توازنندی یک ذره

ایست شناسی^۱ شاخه ای از مکانیک است که توازنندی اجسام را بررسی می کند. ذره ای در

حال ترازمندی است که برآیند تمام نیروهای وارد بر آن برابر صفر باشد و یا

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (۲۴.۴)$$

معادله (۲۴.۴) معادل است با

$$\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i F_{iy} = 0, \sum_i F_{iz} = 0 \quad (۲۵.۴)$$

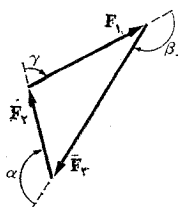
اکنون با آوردن چند مثال ساده، نحوه حل مسائل مربوط به ترازمندی یک ذره را نشان می‌دهیم.

مثال ۸.۴. ترازمندی ذره‌ای را که سه نیرو بر آن اثر می‌کنند بررسی کنید.

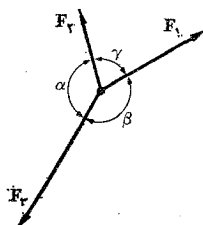
حل: فرض کنیم سه نیرو مطابق شکل ۱۳.۴ به ذره اثر می‌کند. اگر نیروها اثر هم راخنشی کنند باید داشته باشیم: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$. در این صورت، اگر با این سه نیرو یک چند ضلعی بسازیم، باید یک مثلث به دست آید (شکل ۱۴.۴). این امر نشان می‌دهد که سه نیروی هم‌رس در حال تعادل باید در یک صفحه باشند. همچنین با استفاده از قانون سینوسها (پ.۱۵) در این مثلث به دست می‌آید

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma} \quad (۲۶.۴)$$

و این فرمول مهمی است که بزرگی نیروها را با زاویه‌هایی که با هم می‌سازند، مربوط می‌کند.



شکل ۱۴.۴



شکل ۱۳.۴

مثال ۹.۴. درباره ترازمندی ذره‌ای که روی یک سطح شیب‌دار بدون مالش قرار دارد بحث کنید.

حل: به ذره O واقع روی سطح شیب‌دار AB ، مطابق شکل ۱۵.۴، نیروهای زیر وارد می‌شوند: W نیروی وزن خود ذره، F نیروی کشش و N نیروی واکنش عمودی صفحه. اکنون F و N را بر حسب W ، α و θ حساب می‌کنیم. می‌توان با دوروش مختلف عمل کرد. با به کار بردن قانون سینوسها، معادله (۲۶.۴) و با در نظر گرفتن وضع هندسی شکل ۱۵.۴، داریم

$$\frac{F}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{N}{\sin(90^\circ + \alpha + \theta)} = \frac{W}{\sin(90^\circ - \theta)}$$

و یا

$$\frac{F}{\sin \alpha} = \frac{N}{\cos(\alpha + \theta)} = \frac{W}{\cos \theta}$$

از اینجا برای F و N می توان نوشت

$$F = W \frac{\sin \alpha}{\cos \theta} \quad \text{و} \quad N = W \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos \theta}$$

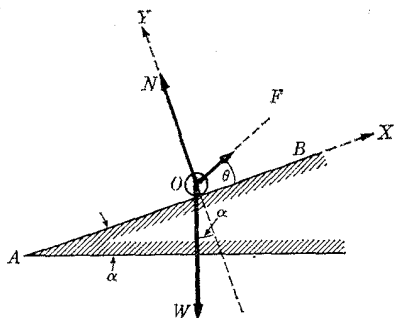
روش دیگر عبارت است از وارد کردن محورهای OY و OX . مطابق شکل ۱۵.۴، و با استفاده از رابطه اول معادلات (۲۵.۴) نتیجه زیر به دست می آید:

$$\sum_i F_{ix} = F \cos \theta - W \sin \alpha = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = F \sin \theta - W \cos \alpha + N = 0$$

از معادله اول داریم

$$F \cos \theta = W \sin \alpha \quad \text{یا} \quad F = W \frac{\sin \alpha}{\cos \theta}$$



شکل ۱۵.۴. ترازمندی روی یک سطح شیب دار

که با نتیجه اولی برای F تطبیق می کند. از معادله دوم، با استفاده از مقدار به دست آمده برای F ، داریم

$$\begin{aligned} N &= W \cos \alpha - F \sin \theta = W \cos \alpha - \frac{W \sin \alpha \sin \theta}{\cos \theta} \\ &= W \frac{\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta}{\cos \theta} = W \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos \theta} \end{aligned}$$

که با مقدار به دست آمده از روش اول تطبیق می کند. به عهده دانشجو است که تشخیص دهد هر مسئله ویژه ای را با کدام روش حل کند تا زودتر و راحت تر به نتیجه برسد.

۱۰.۴ ایست شناسی: ترازمندی یک جسم سخت

هنگامی که نیرو بر یک جسم سخت اثر می کند لازم است ترازمندی را هم نسبت به انتقال و هم نسبت به چرخش در نظر گرفت. بنابراین دوشرط زیر لازم است:

(۱) جمع تمام نیروها باید برابر صفر باشد (ترازمندی در انتقال):

$$\sum_i F_i = 0 \quad (27.4)$$

۲) جمع تمام گشتاور نیروها نسبت به یک نقطه اختیاری باید برابر صفر باشد (ترازندی در چرخش):

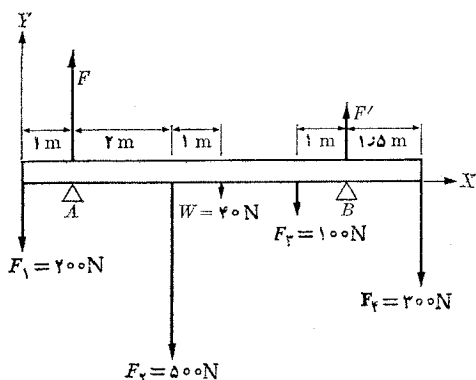
$$\sum_i \tau_i = 0 \quad (28.4)$$

اگر تمام نیروها در یک صفحه باشند، دو شرط فوق به سه معادله جبری زیر کاهش پیدا می‌کند:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \text{ و } \sum_i F_{iy} = 0, \sum_i F_{iz} = 0 \quad (29.4)$$

چون در آن واحد سه معادله مستقل وجود دارد مسایل ایست شناسی در صفحه قابل حل نیستند مگر اینکه سه مجهول وجود داشته باشد. اکنون شما را با شیوه حل چند مسئله نمونه در ایست شناسی، در صفحه، آشنا می‌کنیم.

مثال ۱۰.۴. میله‌ای به طول ۸m و وزن ۴۰N، تحت تأثیر نیروهایی که در شکل ۱۶.۴ نشان داده شده‌اند، روی نقطه‌های A و B در حال ترازندی قرار دارد. نیروهایی را که در نقطه‌های A و B بر میله وارد می‌شوند پیدا کنید.



شکل ۱۶.۴

حل: ابتدا با به کار بستن شرط (۲۷.۴) برای ترازندی در انتقال، داریم

$$\sum_i F_i = F + F' - 200 - 500 - 40 - 100 - 300 = 0$$

و یا

$$F + F' = 1140 \text{ N.} \quad (30.4)$$

سپس برای رسیدن به ترازندی در چرخش از معادله (۲۸.۴) استفاده می‌کنیم. بهتر است گشتاور نیروها را نسبت به نقطه A حساب کنیم، چون گشتاور نیروی F صفر خواهد شد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \sum_i \tau_i &= (-200)(-1) + (F)(0) + (-500)(2) \\ &+ (-40)(3) + (-100)(4.5) + (F')(5.5) + (-300)(7) = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $F' = ۶۳۰۹۹\text{N}$. با قرار دادن بزرگی F در رابطه (۳۰.۴) به دست می‌آید

$$F = ۵۰۹۱۱\text{N}.$$

مثال ۱۱.۴. نردبان AB به وزن ۴۰N با تکیه بر دیواری قائم با زمین زاویه ۶۰° می‌سازد. نیروهای وارد بر نردبان را در نقطه‌های A و B پیدا کنید. غلظکی در نقطه A بر نردبان سوار شده به گونه‌ای که مالش دیوار ناچیز است.

حل: نیروهای وارد بر نردبان را در شکل ۱۷.۴ نشان داده‌ایم. نیروی وزن W در نقطه C وسط نردبان به آن وارد می‌شود. نیروی F_y برای جلوگیری از لغزش نردبان لازم است و از مالش زمین به وجود می‌آید. F_y و F_x واکنشهای عمودی زمین و دیوارند. با استفاده از سه شرط ترازمندی که در معادلات (۲۹.۴) نوشته شده‌اند، برای دو معادله اول داریم

$$\sum_i F_{ix} = -F_1 + F_3 = 0 \quad (۳۱.۴)$$

$$\sum_i F_{iy} = -W + F_1 = 0$$

به فرض اینکه طول نردبان برابر L باشد، گشتاور نیروها را نسبت به نقطه B پیدا می‌کنیم، تا گشتاور نیروهای مجهول F_1 و F_3 برابر صفر باشد. برای معادله سوم ترازمندی به دست می‌آید

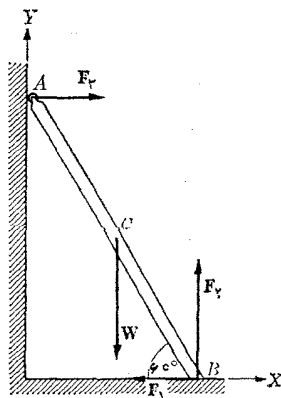
$$\sum_i \tau_i = W \left(\frac{1}{2} L \cos 60^\circ \right) - F_3 (L \sin 60^\circ) = 0$$

یا

$$F_3 = \frac{W \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} = ۱۱۵۵۲\text{N}.$$

در این صورت از معادلات (۳۱.۴) نتیجه می‌شود

$$F_1 = F_3 = ۱۱۵۵۲\text{N}$$



شکل ۱۷.۴

$$F_y = W = 40 \text{ N.}$$

لازم به یادآوری است که هرگاه نردبان در نقطه A غلتک نداشته باشد، یک نیروی مالش موازی با دیوار قایم در این نقطه به وجود می آید. در این صورت چهار نیروی مجهول وجود دارد و برای حل مسئله یک فرض اضافی دیگر نیز لازم است.

فهرست منابع

1. *Physical Mechanics* (third edition), by R. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Section 1-7.
2. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 3, 4, 10, and 11.
3. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapters 3, 5, 6, and 8.
4. *The Feynman Lectures on Physics*, volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 12.
5. *Foundations of Modern Physical Science*, by G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapter 4.

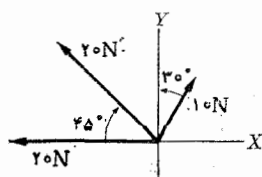
۶. سایمون، کیت، ر. مکانیک، ترجمه اعظم فیرومندراد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخش ۳-۲.

مسئله ها

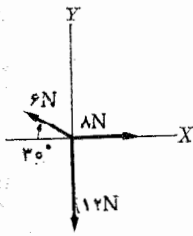
۱۰۴. تیر تلفنی به کمک یک کابل به طور قایم نگهداشته می شود. هرگاه یک سر کابل در ارتفاع ۱۰ متری تیر ثابت و سر دیگر آن در ۷ متری پای تیر به زمین محکم شده باشد و نیروی کششی کابل 500 N باشد، نیروی افقی و قایم وارد به تیر تلفن چقدر است؟

۲۰۴. جسمی به وزن 60 N روی سطح افقی همواری قرار دارد و توسط میله ای (که با افق زاویه 30° می سازد) با نیروی 60 N بر آن فشار می آورند. (الف) نیروی مؤثر در راستای عمود بر سطح چقدر است؟ (ب) نیروی موازی با سطح چقدر است؟

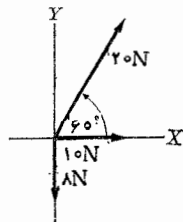
۳۰۴. قطعه سنگی به وزن 100 N روی یک صفحه شیب دار به ارتفاع ۲ متر و طول ۵ متر



(ج)



(ب)



(الف)

توسط یک مانع نگهداری می شود. نیرویی را که از طرف این قطعه سنگ (الف) بروی صفحه، و (ب) بر مانع وارد می شود پیدا کنید.

۴۰۴. بزرگی و راستای برآیند دستگاه نیروهای نشان داده شده در شکل ۱۸۰۴ را پیدا کنید.

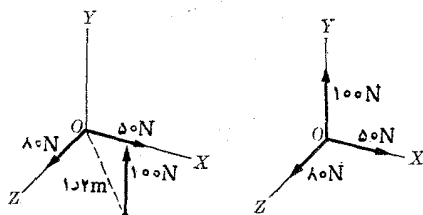
۵۰۴. چهار نیروی هم صفحه (30 N ، 40 N ، 20 N و 50 N) روی یک نقطه از جسمی اثر می کنند. زاویه هایی که این چهار نیرو باهم می سازند بترتیب عبارتند از 50° ، 30° و 60° . بزرگی برآیند را به دست آورده و زاویه آن را با نیروی 30 N پیدا کنید.

۶۰۴. سه نیروی $F_1 = u_x(500)\text{ N}$ ، $F_2 = u_x(100) + u_y(-200) + u_z(100)\text{ N}$ ، $F_3 = u_x(-100) + u_y(50) + u_z(-400)\text{ N}$ در دست است. (الف) بزرگی و راستای نیروی برآیند را تعیین کنید. (ب) اگر هر سه نیرو به نقطه واحد $(4, -3, 15)$ اثر کنند، گشتاور برآیند این نیروها را نسبت به مبدأ O به دست آورید. برای تعیین گشتاور برآیند از نیروی برآیند استفاده کنید.

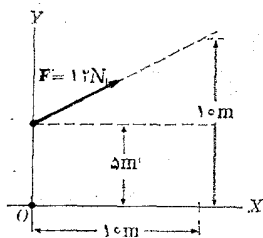
۷۰۴. هرگاه هر سه نیروی مسئله ۶۰۴ به نقطه ای مانند $(4, -3, 15)$ وارد شوند، گشتاور هر یک از این نیروها را نسبت به مبدأ O پیدا کنید. ثابت کنید که گشتاور برآیند بر نیروی برآیند عمود است.

۸۰۴. (الف) هرگاه نیروهای مسئله ۶۰۴ بترتیب F_1 به نقطه $(3, 8, 10)$ ، F_2 به نقطه $(-2, 0, 4)$ و F_3 به نقطه $(4, -25, 10)$ اثر کنند گشتاور برآیند این نیروها را نسبت به مبدأ O پیدا کنید. (ب) $R \cdot T$ را پیدا کنید و کاهش کمینه دستگاه را نشان دهید.

۹۰۴. گشتاور نیروی نشان داده شده در شکل ۱۹۰۴ را نسبت به مبدأ مختصات حساب کنید. معادله خط اثر نیرو را تعیین کنید.



شکل ۲۰۰۴



شکل ۱۹۰۴

۱۰۰۴. نیروی برآیند سه نیروی عمود برهم 50 N ، 80 N و 100 N (شکل ۲۰۰۴) و گشتاور برآیند آنها را نسبت به نقطه O در حالتی که (الف) سه نیرو هم رس باشند، (ب) خط اثر نیروی 100 N از محل تقاطع دو نیروی دیگر 1.2 m فاصله داشته باشد، پیدا کنید.

۱۱۰۴. روی مستطیل سخت $ABCD$ ، به اضلاع

$$BC = DA = ۰.۰۶ \text{ m و } AB = CD = ۰.۰۴ \text{ m}$$

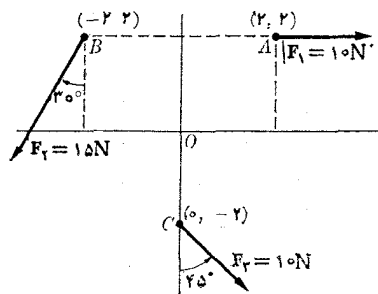
پنج نیرو بدین ترتیب اثر می‌کنند: در نقطه A یک نیرو N در راستای AB ، یک نیرو N در راستای AC و یک نیرو N در راستای AD ؛ و در نقطه C یک نیرو N در راستای CD و نیروی دیگر N در راستای CB . نیروی برآیند و همچنین گشتاور نیروها را نسبت به نقطه‌های A ، B و مرکز هندسی مستطیل را پیدا کنید.

۱۲.۴. دو نیرو موازی و همسو به فاصله ۰.۰۲ m از یکدیگر قرار دارند. اگر یکی از نیروها N و نیز خط اثر نیروی برآیند به فاصله ۰.۰۸ m از نیروی دیگر باشد، (الف) بزرگی نیروی برآیند، و (ب) بزرگی نیروی دیگر را پیدا کنید.

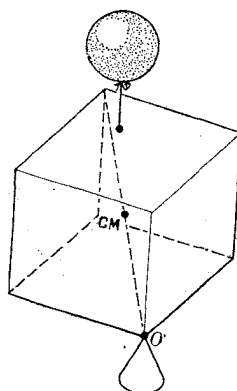
۱۳.۴. بزرگی دو نیرو موازی و همسو N و N می‌باشد. فاصله خط اثر نیروی برآیند از نیروی بزرگتر ۰.۰۸ m است. فاصله بین دو نیرو را پیدا کنید.

۱۴.۴. در صورتی که نیروهای دو مسئله بالا ناهمسو باشند جوابهای خواسته شده را یک بار دیگر پیدا کنید.

۱۵.۴. مکعبی با چگالی یکنواخت با وزن N و طول هر ضلع ۶۰ cm روی یکی از رأسهایش قرار گرفته است (شکل ۲۱.۴). بالن پر از گازی را (که دارای نیروی بالابرد N است) به کجای آن وصل کنیم تا مکعب در وضع افقی نشان داده شده در شکل «معلق» بماند؟ نیرو در نقطه O چقدر است؟



شکل ۲۲.۴

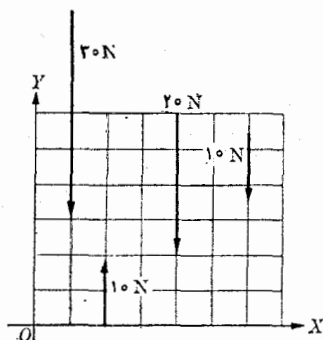


شکل ۲۱.۴

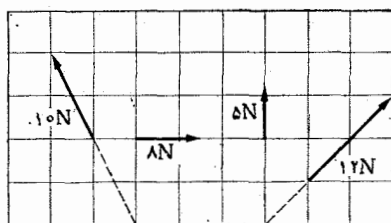
۱۶.۴. بزرگی و وضع برآیند دستگاه نیروهای نشان داده شده در شکل ۲۲.۴ را پیدا کنید. مختصات نقطه‌های A ، B و C بر حسب متر داده شده‌اند.

۱۷.۴. بزرگی و وضع برآیند دستگاه نیروهای نشان داده شده در شکل ۲۳.۴ را پیدا کنید. ضلع هر مربع یک سانتی متر است.

۱۸.۴. دستگاه نیروهای شکل ۲۴.۴ را به حداقل کاهش دهید. سطح هر مربع ۱ cm^2 است.

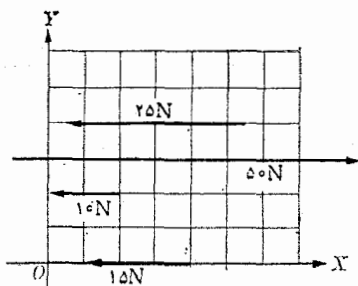


شکل ۲۴.۴



شکل ۲۳.۴

۱۹.۴. دستگاه نیروهای شکل ۲۵.۴ را به حداقل کاهش دهید. مساحت هر مربع 1 cm^2 است.



شکل ۲۵.۴

۲۰.۴. اگر $R = \sum_i F_i$ بر آیند یک دستگاه نیروهای هم‌مس و τ_0 گشتاور آنها نسبت به نقطه O باشد، ثابت کنید که گشتاور نسبت به A برابر است با

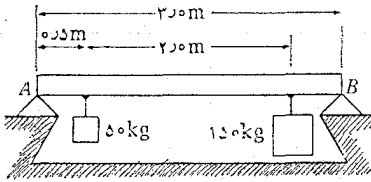
$$\tau_A = \tau_0 + r_{AO} \times R.$$

۲۱.۴. میله‌ای 2 m و طول $10^{-2} \text{ N} \times 49$ (۴۹۰۰ دین) وزن دارد. نیروهای قائم 3000 و 2000 دین به ترتیب از فاصله 50 ، 200 سانتی‌متری از یک سر آن به سوی پایین و نیروهای قائم 5000 و 1300 دین به فاصله 20 cm و 100 cm از همان سر به سوی بالا بر این میله اثر می‌کنند. بزرگی و خط اثر بر آیند را پیدا کنید.

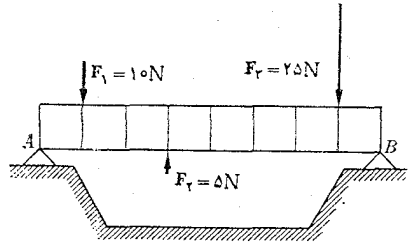
۲۲.۴. بزرگی و وضع بر آیند دستگاه نیروهای نشان داده‌شده در شکل ۲۶.۴ را پیدا کنید. هر قطعه از تیر AB یک دسی‌متر طول دارد. همچنین نیروهای لازم در نقاط A و B برای متعادل کردن سایر نیروها را پیدا کنید.

۲۳.۴. تیر AB یک‌نواخت و دارای 100 kg جرم است و در دو انتهای A و B روی دو تکیه‌گاه قرار گرفته است و جرمهایی مطابق شکل ۲۷.۴ به آن اثر می‌کنند. واکنش تکیه‌گاهها را حساب کنید.

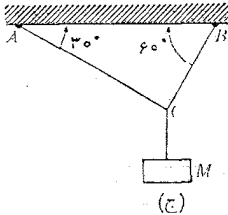
۲۴.۴. در شکل ۲۸.۴ اگر M دارای 40 N وزن باشد، کشش بندهای AC و BC را پیدا کنید.



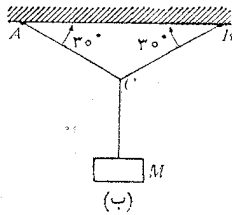
شکل ۲۷.۴



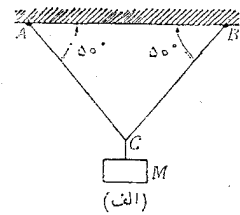
شکل ۲۹.۴



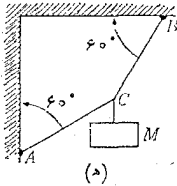
(ج)



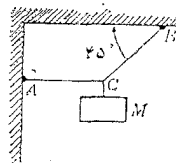
(ب)



(الف)



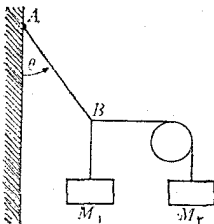
(د)



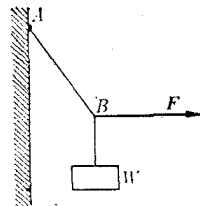
(د)

شکل ۲۸.۴

۲۵.۴. جسم نشان داده شده در شکل ۲۹.۴، دارای 400 N وزن است. این جسم توسط ریسمان AB و نیروی افقی F در حال تعادل قرار دارد. اگر $AB = 150 \text{ cm}$ و فاصله بین دیوار و جسم 90 cm باشد، نیروی F و کشش نخ را حساب کنید.



شکل ۳۰.۴



شکل ۲۹.۴

۲۶.۴. در شکل ۳۰.۴، اگر $M_1 = 300 \text{ N}$ و $M_2 = 400 \text{ N}$ باشد، زاویه θ و کشش AB را حساب کنید.

۲۷.۴. پسری به وزن 500 N از میله‌ای آویزان شده است. نیروهایی را که هریک از بازوهای وی به میله وارد می‌کند در حالات زیر حساب کنید: (الف) بازوها موازی هم هستند؛

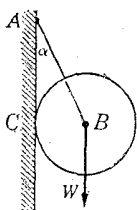
(ب) زاویه هر بازو با قائم 30° است. نیرو را به صورت تابعی از زاویه نمایش دهید. از این نمودار چه نتیجه می گیرید؟

۲۸.۴. نخ $ABCD$ از نقاط ثابت A و D آویزان شده است. در نقطه B وزنه 120 N و در نقطه C وزنه نامعلوم W وجود دارد. اگر زاویه AB با سطح افق 60° ، AC افقی و CD با سطح افق زاویه 30° بسازد، مقدار W را هنگامی که دستگاه در حال تعادل است معین کنید.

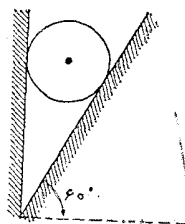
۲۹.۴. سه نخ واقع در یک صفحه قائم، از نقاط مختلف یک سقف افقی آویزان اند. انتهای نخها را در نقطه A به هم می بندیم و وزنه W را از آن آویزان می کنیم. زاویه ای که هر یک از سه نخ با افق می سازند بترتیب عبارتند از 30° ، 100° و 160° . کشش دو نخ اولی بترتیب 1000 N و 750 N است. کشش نخ سوم و همچنین وزن W را حساب کنید. ۳۰.۴. برای اینکه سه نیرو در حال تعادل باشند ثابت کنید باید همرس باشند، یعنی اگر خط اثر آنها را امتداد دهند همدیگر را در یک نقطه قطع کنند.

۳۱.۴. کره ای به وزن 500 N روی دو صفحه شیب دار بدون مالش که بترتیب با سطح افق زاویه های 30° و 45° می سازند تکیه دارد. واکنشهای دو صفحه را روی کره حساب کنید.

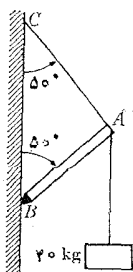
۳۲.۴. کره ای به وزن 500 N (شکل ۳۱.۴) توسط یک صفحه شیب دار که با افق زاویه 60° می سازد مقابل دیواری بدون مالش نگهداری می شود. واکنشهای دیوار و صفحه را روی کره حساب کنید.



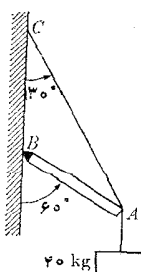
شکل ۳۲.۴



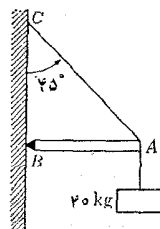
شکل ۳۱.۴



(الف)



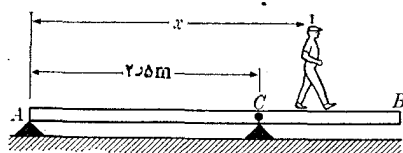
(ب)



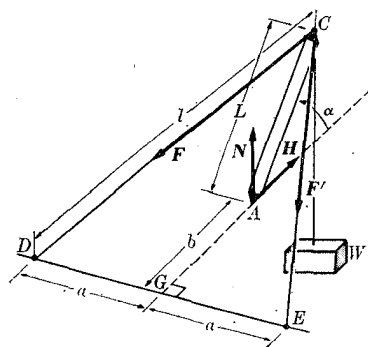
(ج)

شکل ۳۳.۴

- ۳۳.۴. کره‌ای به وزن W از نخ AB آویزان و روی دیوار قائم بدون مالش AC تکیه دارد. اگر α زاویه بین دیوار و نخ باشد، کشش نخ و واکنش دیوار را روی کره تعیین کنید.
- ۳۴.۴. به فرض اینکه در شکل ۳۳.۴، وزن M برابر 400 N و وزنه‌ای تیر و کابل قابل چشم پوشی باشند، نیروهایی را که تیر BA و کابل AC به نقطه A وارد می‌کنند حساب کنید.
- ۳۵.۴. به فرض اینکه در شکل ۳۳.۴ جرم تیر 20 kg باشد، واکنشهای افقی و قائم در نقطه B و کشش کابل AC را تعیین کنید.
- ۳۶.۴. در شکل ۳۴.۴ نیروهای F ، F' و H را پیدا کنید. CE و DC کابل هستند و وزن AC قابل اغماض است.
- ۳۷.۴. هنگامی که فاصله $b = AG$ به سمت صفر میل کند، در نتیجه مسئله پیش بحث کنید.

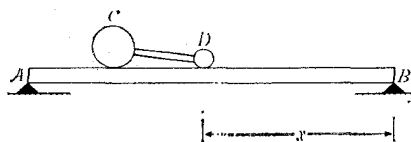


شکل ۳۵.۴

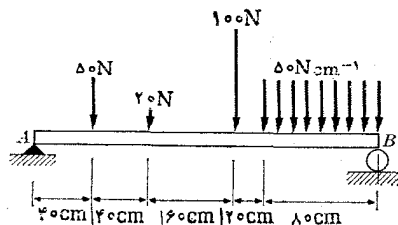


شکل ۳۴.۴

- ۳۸.۴. تیر یکنواخت AB در شکل ۳۵.۴ دارای 4 m طول و 100 N وزن می‌باشد و می‌تواند دور نقطه ثابت C بچرخد. تیر روی نقطه A تکیه دارد. شخصی به وزن 750 N از A شروع به راه رفتن روی تیر می‌کند. بیشینه فاصله این شخص از نقطه A را در هنگام ترازمندی پیدا کنید. نمودار واکنش نقطه A را بر حسب x رسم کنید.
- ۳۹.۴. چنانکه شکل ۳۶.۴ نشان می‌دهد نیروهایی روی تیر AB اثر می‌کنند. بزرگی و مکان نیروی برآیند را تعیین کنید.
- ۴۰.۴. تیر AB در شکل ۳۷.۴ دارای 1.2 m طول و وزن قابل اغماض می‌باشد. کره‌های C و D (بترتیب 40 و 20 کیلوگرم جرم)، که به وسیله بازویی به هم متصل‌اند، روی تیر قرار گرفته‌اند. فاصله بین مرکزهای دو کره 3 m است. فاصله x را به گونه‌ای اختیار



شکل ۳۷.۴



شکل ۳۶.۴

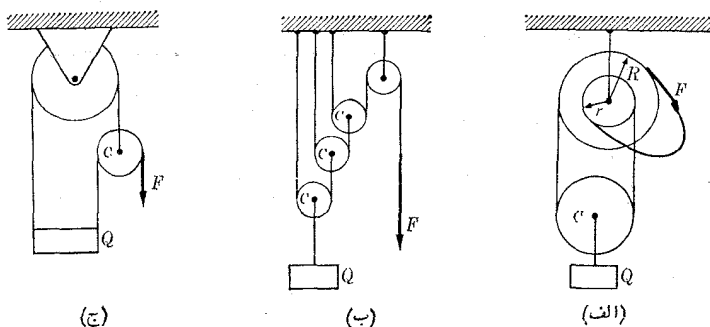
کنید که واکنش نقطه B نصف واکنش نقطه A باشد.

۴۱.۴. دوسر پلی به طول ۱۰۰m و وزن ۱۰۰۰۰۰N روی دوستون قرار دارند. هنگامی که سه اتومبیل روی پل به فاصله‌های ۳۰m ، ۶۰m و ۸۰m از یک سر آن قرار گرفته باشند و وزن اتومبیلها بترتیب ۱۵۰۰۰N ، ۱۰۰۰۰N و ۱۲۰۰۰N باشد واکنش پایه‌ها چقدر است؟

۴۲.۴. فرض کنید اتومبیلهای مسئله ۴۱.۴ با سرعت یکسان ۱۰ms^{-1} و در یک جهت جا بجا می‌شوند. واکنش پایه‌ها را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید. مبدأ زمان $t = 0$ برای اتومبیلها وضع مسئله ۴۱.۴ است. نمودار واکنشها را تا هنگامی که هر سه اتومبیل از پل بگذرند امتداد دهید.

۴۳.۴. دوسر الواری به طول ۸m و جرم ۲۰kg به دوکنار نه‌ری تکیه دارد. مردی به جرم ۱۰۰kg از روی الوار می‌گذرد. نمودار واکنش هر سر الوار را، بر حسب فاصله شخص از یکی از دوسر آن، رسم کنید.

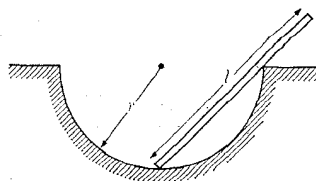
۴۴.۴. برای هریک از حالت‌های نشان داده شده در شکل ۳۸.۴، نیروی لازم برای حفظ ترازمندی را بر حسب Q پیدا کنید. قرقره‌هایی که با C نشان داده شده‌اند متحرک هستند.



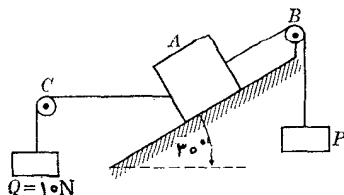
شکل ۳۸.۴

۴۵.۴. در شکل ۳۹.۴، A ، ۱۰۰۰N و Q ، ۱۰۰N وزن دارند. وزن لازم P برای حفظ ترازمندی دستگاه را پیدا کنید. صفحه و قرقره‌ها بدون مالش می‌باشند. بند AC افقی و بند AB موازی صفحه است. همچنین واکنش صفحه روی وزنه A را حساب کنید.

۴۶.۴. میله‌ای به جرم m و طول l را توی یک نیمکره کاملاً صیقلی به شعاع r قرار می‌دهیم



شکل ۴۰.۴

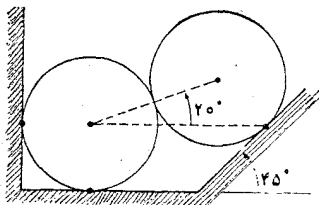


شکل ۳۹.۴

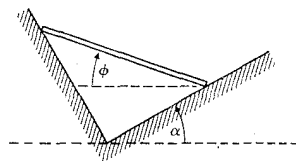
(شکل ۴۰.۴). وضع ترازمندی میله را پیدا کنید. واکنشهای نیمکره روی میله را حساب کنید. پاسخ را درحالتی که $l > 2r$ و $l < 2r$ باشد مورد بحث قرار دهید.

۴۷.۴. میله‌ای به جرم 6 kg و طول 8 m روی زاویه قائمه کاملاً صیقلی مطابق شکل ۴۱.۴ قرار داده شده است. وضعیتهای ترازمندی و نیروهای واکنش را برحسب زاویه α پیدا کنید.

۴۸.۴. دوکره یکسان در دستگاهی که در شکل ۴۲.۴ نشان داده شده قرار دارند. واکنش سطوح را روی کره‌ها حساب کنید. ثابت کنید که هر کره به‌طور مستقل دروضع ترازمندی است.

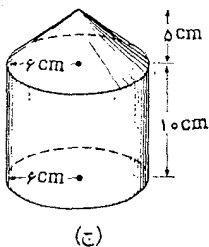


شکل ۴۲.۴

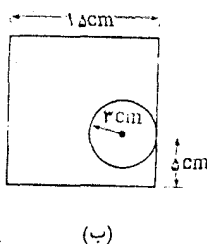


شکل ۴۱.۴

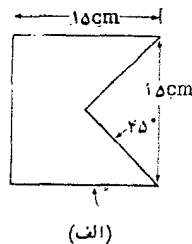
۴۹.۴. مثال ۱۱.۴ داده شده دراین فصل را، بدون تغییر داده‌های آن، با اضافه کردن نیروی مالشی (قایم) که همواره برابر $F_f = 3r$ است، حل کنید.



(ع)



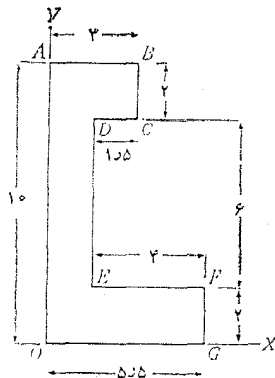
(ب)



(الف)

شکل ۴۳.۴

۵۰.۴. ثابت کنید که برآیند دو نیروی F_1 و F_2 از محل تقاطع F_3 و W می‌گذرد و برابر و درجهت مخالف برآیند آنهاست. آیا این نتیجه را می‌شد پیش‌بینی کرد؟



شکل ۴۴.۴

- ۵۱.۴. مرکز جرم سه جسم همگن نشان داده شده در شکل ۴۳.۴ را پیدا کنید.
- ۵۲.۴. با استفاده از جدول ۱.۱۳، مرکز جرم دستگاههای زیر را پیدا کنید: (الف) زمین - ماه، (ب) زمین - خورشید.
- ۵۳.۴. مرکز جرم جسم همگن داده شده در شکل ۴۴.۴ را پیدا کنید. $AB = 3\text{cm}$ ، $BC = 2\text{cm}$ ، $CD = 15\text{cm}$ ، $DE = 6\text{cm}$ ، $EF = 4\text{cm}$ و $FG = 2\text{cm}$ می باشند.
- ۵۴.۴. مکان مرکز جرم مولکولهای زیر را پیدا کنید:
- (الف) CO ، فاصله بین اتمهای C و O برابر $10^{-10}\text{m} \times 1.13$ است. (ب) CO_2 ، که یک مولکول خطی است با اتم C در وسط به فاصله برابر از دو اتم O. (ج) H_2O ، این مولکول به صورت زاویه ای است که O در رأس آن قرار دارد. فاصله O-H برابر $10^{-10}\text{m} \times 9.1$ و زاویه بین دو O-H برابر 105° است. (د) NH_3 ، مولکولی است به شکل هرم، N در رأس، فاصله N-H برابر $10^{-10}\text{m} \times 10.1$ و زاویه بین دو پیوند N-H برابر 108° است.
- ۵۵.۴. چهار جرم برابر در رأسهای یک چهار وجهی منتظم به ضلع a قرار دارند. مکان مرکز جرم آنها را پیدا کنید.

بخش اول مکانیک

۵	سینماتیک
۶	حرکت نسبی
۷	دینامیک ذره
۸	کار و انرژی
۹	دینامیک دستگاه ذرات
۱۰	دینامیک جسم سخت
۱۱	دینامیک انرژیهای بالا
۱۲	حرکت نوسانی

حرکت اساسی ترین و روشن ترین پدیده‌ای است که اطراف خود مشاهده می‌کنیم. وزش باد، امواج اقیانوسها، پرواز پرندگان، دویدن حیوانات، افتادن برگها و . . . همگی پدیده‌های حرکتی هستند. عملاً می‌توان در هرفرآیند قابل تصور رد حرکت چیزی را پیدا کرد. زمین و سیاره‌ها اطراف خورشید می‌گردند؛ حرکت الکترون‌ها در داخل اتم موجب جذب و گسیل نور می‌شود، جابجایی الکترون‌ها در داخل یک فلز موجب جریان الکتریکی می‌شود؛ حرکت مولکولهای گاز تولید فشار می‌کند. تجارب روزانه ما حاکی از آنند که حرکت هر جسم تحت تأثیر اجسامی است که آن را احاطه کرده‌اند، یا به‌گفته دیگر در تأثیر متقابل یکدیگر قرار دارند. کار اساسی یک فیزیکدان و یا یک مهندس، قرار دادن اشیاء به‌گونه‌ای است که تحت تأثیر برهم کنشهای یکدیگر نوع خاصی از حرکت را به وجود آورند. در لامپ تصویر تلویزیون باریکه الکترون‌ها باید طوری حرکت کند تا تصویر روی صفحه تلویزیون ظاهر شود. در یک موتور حرارتی، مولکولهای ماده آتش‌زای سوخته شده باید به‌گونه‌ای حرکت کنند تا پیستون یا توربینی را در سوی مورد نظر جابجا کنند. یک واکنش شیمیایی نتیجه بعضی حرکات اتمی و حاصل آن نظم نوینی است که مولکولهای جدیدی به وجود می‌آورد. نقش یک فیزیکدان کشف علل تمام این حرکتهای و نقش یک مهندس برقرار کردن نظم جهت ایجاد حرکتهای مفید است، حرکتهایی که زندگی را آسانتر می‌کنند. ماهیت برهم کنش هر چه باشد، چند قاعده و اصل کلی وجود دارد که در هر حرکتی به کار می‌روند. مجموعه این اصول و نظریه‌ای که این اصول بر آن متکی است مکانیک نام دارد. برای تحلیل و پیش‌بینی ماهیت حرکتهای ناشی از برهم کنشهای گوناگون، مفاهیم مهمی مانند اندازه حرکت، نیرو و انرژی ابداع و تعریف شده‌اند. اگر ابتدا اندازه حرکت، نیرو و (یا) انرژی شناخته شوند، آنگاه می‌توان آنها را به‌طور کمی بیان کرد و قوانینی ساخت که با بهره‌گیری از این قوانین حرکات حاصل را پیش‌بینی کرد. اندازه حرکت، نیرو و انرژی بقدری مهم‌اند که بندرت می‌توان پدیده‌ای را بدون استفاده از این کمیتهای تحلیل کرد. مکانیک که علم حرکت است، علم اندازه حرکت، نیرو و انرژی نیز هست و یکی از شاخه‌های اساسی فیزیک را تشکیل می‌دهد. پیش از آغاز به بررسی هر برهم کنش و ویژه باید مکانیک را کاملاً شناخت. در عصر گالیله^۱ نیز نقش اساسی مکانیک را می‌شناختند، جمله کوتاه «هر که حرکت را نشناسد، طبیعت را نمی‌شناسد»^{*} مؤید این اندیشه است. در این کتاب، از فصل ۵ تا فصل ۱۲، مکانیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

آنچه که امروز به نام علم مکانیک شناخته می‌شود، ثمره نبوغ سرایزاک نیوتون^۲ است. او نظریه بزرگی عرضه داشت که اصول نیوتون نامیده می‌شوند. البته بسیاری کسان دیگر، از جمله نام آوران^۳ مانند ارشمیدس^۳، گالیله^۴، دکارت^۵، هویگنز، لاگرانژ^۶، هامیلتون^۷، ماکس^۸، و اینشتین^۹ نیز در پیشرفت این علم سهم بسزایی داشته‌اند.

* Ignorato motu, ignoratur natura.

1. Galileo	2. Sir Isaac Newton	3. Archimedes
4. Kepler	5. Descartes	6. Lagrange
7. Hamilton	8. Mach	9. Einstein

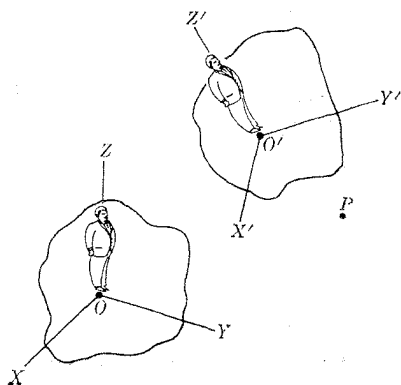


سینماتیک

مقدمه	۱۰۵
حرکت مستقیم الخط: سرعت	۲۰۵
حرکت مستقیم الخط: شتاب	۳۰۵
نمایش برداری سرعت و شتاب در حرکت مستقیم الخط	۴۰۵
حرکت منحنی الخط: سرعت	۵۰۵
حرکت منحنی الخط: شتاب	۶۰۵
حرکت با شتاب ثابت	۷۰۵
مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب	۸۰۵
حرکت دایره‌ای: سرعت زاویه‌ای	۹۰۵
حرکت دایره‌ای: شتاب زاویه‌ای	۱۰۰۵
حرکت منحنی الخط در صفحه در حالت کلی	۱۱۰۵

هرگاه جای یک جسم نسبت به جسم دیگری برحسب زمان تغییر کند، گوئیم آن جسم نسبت به جسم دوم در حال حرکت است. برعکس، هرگاه محل نسبی جسم برحسب زمان تغییر نکند گوئیم در سکون نسبی است. سکون و حرکت هر دو مفاهیمی نسبی هستند، یعنی به شرایط جسم نسبت به جسم دیگری که به عنوان مرجع به کار می رود، بستگی دارند. یک درخت و یک خانه نسبت به زمین ساکن ولی نسبت به خورشید در حال حرکت هستند. وقتی تری از ایستگاهی می گذرد، گوئیم تری نسبت به ایستگاه در حال حرکت است. با این حال یک مسافر در داخل قطار می تواند بگوید ایستگاه نسبت به تری در حال حرکت است و در جهت خلاف جا بجا می شود.

بنا بر این برای تشریح حرکت، ناظر باید یک چارچوب مرجع^۱ تعریف و حرکت را نسبت به آن تجزیه و تحلیل کند. شکل ۱۰۵ دو ناظر O و O' و ذره P را نشان می دهد. این دو ناظر بر تیب چارچوبهای مرجع XYZ و $X'Y'Z'$ را به کار می برند. اگر O و O' نسبت به هم در حال سکون باشند حرکت ذره P را یکسان مشاهده می کنند. ولی چنانچه O و O' نسبت به هم در حرکت باشند، حرکت ذره P را یکسان مشاهده نمی کنند.



شکل ۱۰۵. دو ناظر مختلف حرکت ذره P را بررسی می کنند.

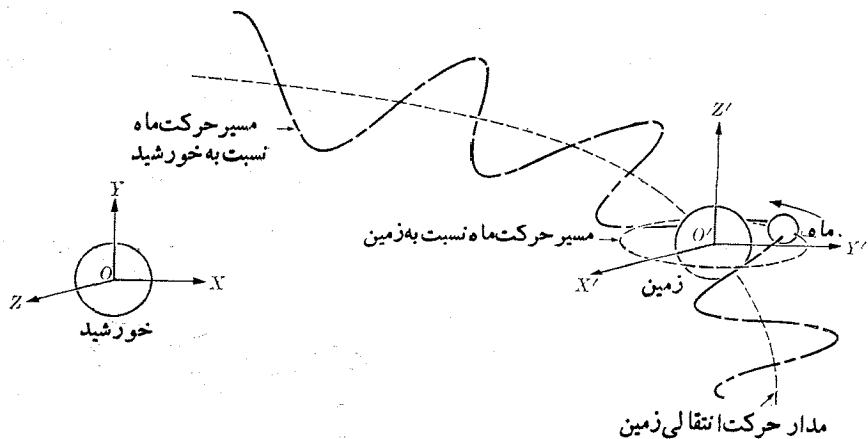
به عنوان مثال، فرض کنیم دو ناظر یکی روی خورشید و دیگری روی زمین قرار دارند (شکل ۲۰۵) و هر دو حرکت ماه را مطالعه می کنند. برای ناظر زمینی که چارچوب $X'Y'Z'$ را به کار می برد، ماه یک حرکت تقریباً دایره ای دور زمین دارد. ولی برای ناظر روی خورشید که چارچوب XYZ را به کار می برد مسیر حرکت ماه یک خط منحنی موج دار به نظر می رسد. با این حال هرگاه دو ناظر از حرکت نسبی یکدیگر آگاه باشند، بر راحتی می توانند مشاهدات خود را با هم تطبیق دهند. در فصل ۶ به طور مفصل در مسئله مهم مقایسه داده های به دست آمده از مشاهده ناظرهایی که نسبت به هم در حال حرکت هستند بحث خواهیم کرد. در حال حاضر فرض می کنیم چارچوب مرجع کاملاً مشخصی در اختیار داریم.

۲.۵ حرکت مستقیم الخط: سرعت

اگر مسیر حرکت جسمی خط مستقیم باشد آن را حرکت مستقیم الخط^۱ می نامند. در شکل ۳.۵ محور X هارا منطبق بر مسیر حرکت فرض می کنیم. جای جسم به وسیله جابجایی x آن از یک نقطه اختیاری مانند O به نام مبدأ، معین می شود. اصولا جابجایی را می توان با تابعی مانند $x = f(t)$ به زمان مربوط ساخت. بدیهی است، x امکان دارد منفی یا مثبت باشد. فرض کنیم در لحظه t جسم در مکان A با $OA = x$ و در لحظه بعدی t' در نقطه B با $OB = x'$ باشد. سرعت میانگین^۲ جسم بین A و B را با رابطه زیر تعریف می شود:

$$v_{ave} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.5)$$

که در آن $\Delta x = x' - x$ جابجایی جسم و $\Delta t = t' - t$ زمان لازم برای انجام این جابجایی است. بنا بر این سرعت میانگین در طول یک زمان معین برابر است با جابجایی



شکل ۲.۵. مسیر حرکت ماه نسبت به خورشید و زمین. فاصله زمین تا ماه 3.8×10^8 برابر فاصله زمین تا خورشید است. روی شکل، اعوجاج مسیر ماه خیلی اغراق آمیز رسم شده است.

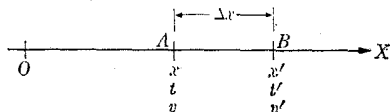
میانگین در واحد زمان در طول همین فاصله زمانی. برای تعیین سرعت لحظه ای^۳ در نقطه ای مانند A ، باید فاصله زمانی Δt تا آنجا که ممکن است کوچک باشد، به گونه ای که عملاً در طول زمان Δt هیچگونه تغییری در حالت حرکت به وجود نیاید. به زبان ریاضی، سرعت لحظه ای برابر است با حد کسر در معادله (۵.۱)، هنگامی که مخرج آن، Δt ، به سمت صفر میل می کند. این نکته را به شکل زیر می نویسد:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{ave} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

این رابطه همان تعریف مشتق x نسبت به t است؛ یعنی

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (۲.۵)$$

به طوری که رابطه (۲.۵) نشان می‌دهد سرعت لحظه‌ای از مشتق جابجایی نسبت به زمان به دست می‌آید. عملاً سرعت لحظه‌ای را با مشاهده حرکت جسم در دو نقطه خیلی نزدیک به هم به فاصله خیلی کوچک dx ، و با اندازه‌گیری فاصله زمانی کوچک dt لازم برای رفتن جسم از وضع اول به وضع بعدی پیدا می‌کنند. ما از این پس، همیشه به جای سرعت لحظه‌ای کلمه سرعت را به کار خواهیم برد.



شکل ۳.۵

اگر $v = f(t)$ را بشناسیم، می‌توانیم مکان x را با انتگرال‌گیری از معادله (۲.۵) پیدا کنیم. در واقع، بنا به رابطه (۲.۵) داریم $dx = v dt$ و با انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$$

که در آن x مقدار x در لحظه t است. چون $\int_{x_0}^x dx = x - x_0$ است، بنا براین

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt. \quad (۳.۵)$$

برای درک معنای فیزیکی معادله (۳.۵) باید توجه داشت که $v dt$ نمایش جابجایی جسم در طول زمان کوتاه dt است. بدین طریق هرگاه فاصله زمانی $t - t_0$ را به فاصله‌های زمانی پیاپی $dt_1, dt_2, dt_3, \dots$ تقسیم کنیم، جابجایی مربوط به آنها به ترتیب $v_1 dt_1, v_2 dt_2, v_3 dt_3, \dots$ و جابجایی کل بین t_0 و t مجموع آنهاست. گوشزد می‌کنیم که $v_1, v_2, v_3, \dots$ مقادیر سرعت در طی هریک از فاصله‌های زمانی است. در این صورت بنا به تعریف انتگرال معین داریم

$$x - x_0 = v_1 dt_1 + v_2 dt_2 + v_3 dt_3 + \dots$$

$$= \sum_i v_i dt_i = \int_{t_0}^t v dt.$$

بدیهی است این جابجایی، $x - x_0$ ، با معادله (۳.۵) تطبیق می‌کند. باید توجه داشت که جابجایی Δx (یا dx) بسته به اینکه حرکت ذره به سمت راست یا چپ باشد مثبت یا منفی است، در نتیجه علامت سرعت نیز + یا - خواهد بود. بنابراین در حرکت مستقیم الخط، علامت سرعت سوی حرکت را نشان می‌دهد. اگر سرعت مثبت باشد حرکت در جهت OX و برای سرعتهای منفی حرکت در سوی OX - خواهد بود.

گاهی مفهوم تندی^۱ را که به صورت نسبت فاصله بر زمان تعریف می‌شود به کار می‌برند. این کمیت همیشه مثبت و مقدار عددی آن برابر است با قدر مطلق سرعت؛ یعنی تندی $= |v|$. با این حال، معمولاً تندی میانگین با سرعت میانگین یکسان نیست. همچنین نباید $x - x_0$ ، «جابجایی» در طول زمان $t - t_0$ را با مسافت پیموده شده در همین فاصله زمانی یکسان گرفت. جابجایی از روی معادله (۵.۳) محاسبه می‌شود، ولی مسافت پیموده شده از رابطه $\int_{t_0}^t |v| dt$ به دست می‌آید. به عنوان مثال، برای رفتن از شهر A به شهر B که در ۱۰۰ کیلومتری شرق A قرار دارد، یک راننده می‌تواند ابتدا به شهر C واقع در ۵۰ کیلومتری غرب A رفته و سپس برگشته به شهر B برود. در این صورت مسافت پیموده شده برابر ۲۰۰ km و لسی جابجایی، همان ۱۰۰ km است. اگر راننده ۴ ساعت در راه باشد تندی میانگین $50 \text{ km hr}^{-1} = 200 \text{ km} / 4 \text{ hr}$ ، ولی سرعت میانگین $25 \text{ km hr}^{-1} = 100 \text{ km} / 4 \text{ hr}$ است.

دردستگاه یکاهای MKSC سرعت بر حسب متر بر ثانیه یا m s^{-1} بیان می‌شود و آن سرعت جسمی است که با آهنگ ثابتی، در هر ثانیه یک متر حرکت می‌کند. بدیهی است سرعت را می‌توان با هر ترکیبی از واحد زمان و طول مانند کیلومتر بر ساعت، km hr^{-1} ، فوت بر دقیقه و غیره نیز بیان کرد.

مثال ۱۰۵. ذره‌ای روی محور x ها به گونه‌ای حرکت می‌کند که وضع آن در هر لحظه با رابطه $x = 5t^2 + 1$ که در آن x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است، مشخص می‌شود. سرعت میانگین این ذره را در فاصله زمانی (الف) ۲ s تا ۳ s؛ (ب) ۲ s تا ۲.۱ s؛ (ج) ۲ s تا ۲.۰۰۱ s؛ (د) ۲ s تا ۲.۰۰۰۰۱ s حساب کنید. (ه) سرعت لحظه‌ای این ذره در $t = 2$ چقدر است؟

حل: ۲ ثانیه را که در تمام حالت‌های مسئله مشترک است t_0 می‌نامیم. با قرار دادن $t_0 = 2$ در رابطه $x = 5t^2 + 1$ داریم $x = 5 \times 2^2 + 1 = 21 \text{ m}$ و برای حالت‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) داریم

$$\Delta t = t - t_0 = t - 2 \quad \text{و} \quad \Delta x = x - x_0 = x - 21$$

(الف) برای $t = 3 \text{ s}$ داریم $t = 3 - 2 = 1 \text{ s}$ و $\Delta t = 1$

$$\Delta x = x - 21 = 46 - 21 = 25 \text{ m} \quad \text{و} \quad x = 5 \times 3^2 + 1 = 46 \text{ m}.$$

در نتیجه

$$v_{\text{ave}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 25 \text{ ms}^{-1}$$

(ب) برای $t = 2.1 \text{ s}$ به دست می‌آید $t = 2.1 - 2 = 0.1 \text{ s}$ و

$$\Delta x = 23.05 - 21 = 2.05 \text{ m} \quad \text{و} \quad x = 5 \times (2.1)^2 + 1 = 23.05 \text{ m}.$$

در نتیجه

$$v_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2005 \text{ m}}{0.1 \text{ s}} = 2005 \text{ ms}^{-1}$$

(ج) برای $t = 2001 \text{ s}$ به دست می‌آید $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ و

$$x = 5 \times 2001^2 + = 20020005 \text{ m}$$

$$\Delta x = 102005 - 21 = 0.20005 \text{ m}$$

$$v_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.20005 \text{ m}}{0.001 \text{ s}} = 20005 \text{ ms}^{-1}$$

(د) بر دانشجو است که تحقیق کند به ازای $t = 200001 \text{ s}$ سرعت میانگین

برابر است با $v_{ave} = 2000005 \text{ m s}^{-1}$

(ه) مشاهده می‌شود با کاهش تدریجی Δt ، سرعت میانگین به سمت 20 m s^{-1}

میل می‌کند. بنابراین انتظار داریم 20 m s^{-1} بزرگی سرعت لحظه‌ای در $t = 2 \text{ s}$ باشد. در واقع هرگاه در رابطه

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\Delta t^2 + 1) = 10t$$

به جای t ، 2 s را قرار دهیم، به دست می‌آید $v = 20 \text{ m s}^{-1}$ که پاسخ سؤال (ه) است.

۳.۵ حرکت مستقیم‌الخط: شتاب

در حالت کلی، سرعت یک جسم تابع زمان است. اگر در حرکتی سرعت ثابت بماند، آن حرکت را یک‌نواخت گویند. به شکل ۳.۵ بازمی‌گردیم و فرض کنیم جسم در لحظه t در نقطه A و سرعت آن v و در لحظه t' در نقطه B و سرعت آن v' است. شتاب میانگین بین A و B با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$a_{ave} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (4.5)$$

که در آن $v' - v = \Delta v$ نمایش تغییر سرعت و $t' - t = \Delta t$ مثل همیشه، زمان لازم برای این تغییر سرعت است. بدین طریق، شتاب میانگین در طول یک فاصله زمانی معین برابر است با تغییر سرعت در واحد زمان در طی این فاصله زمانی. حد شتاب میانگین را هنگامی که فاصله زمانی Δt خیلی کوچک باشد شتاب لحظه‌ای

می‌نامند، یعنی

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{ave} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

در نتیجه

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (5.5)$$

بدین ترتیب شتاب لحظه‌ای از مشتق سرعت نسبت به زمان به دست می‌آید. در عمل، شتاب لحظه‌ای را از تغییر جزئی سرعت dv که در زمانی کوتاه dt رخ می‌دهد حساب می‌کنند. از این پس، جهت اختصار، به جای شتاب لحظه‌ای تنها کلمه «شتاب» را به کار خواهیم برد. در حالت کلی شتاب در جریان حرکت تغییر می‌کند. اگر در حرکت مستقیم الخطی شتاب ثابت بماند، حرکت را با شتاب ثابت^۱ می‌نامند.

هرگاه قدر مطلق سرعت با زمان افزایش پیدا کند، حرکت «تندشونده»^۲ و اگر قدر مطلق سرعت با زمان کاهش یابد حرکت «کند شونده»^۳ نامیده می‌شود.

اگر شتاب حرکتی معلوم باشد می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (۵.۵) سرعت را به دست آورد. از معادله (۵.۵) داریم $dv = a dt$ و از انتگرال این رابطه به دست می‌آید

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$$

که در آن v_0 سرعت در لحظه t_0 است. چون $\int_{v_0}^v dv = v - v_0$ است، بنابراین داریم

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt. \quad (6.5)$$

همانند مورد جابجایی، معنی فیزیکی معادله (۶.۵) با آسانی قابل درک است. می‌دانیم adt معرف تغییر سرعت در فاصله زمانی کوتاه dt است. پس بار دیگر، با تقسیم $t - t_0$ به فواصل زمانی کوتاه $dt_1, dt_2, dt_3, \dots$ ، تغییرات سرعت عبارت می‌شوند از $a_1 dt_1, a_2 dt_2, a_3 dt_3, \dots$ که در آنها $a_1, a_2, a_3, \dots$ مقادیر شتاب در هر یک از فواصل زمانی است. تغییر کل سرعت $v - v_0$ بین زمان $t - t_0$ برابر است با مجموع این تغییر سرعتها:

$$\text{تغییر سرعت} = v - v_0 = a_1 dt_1 + a_2 dt_2 + a_3 dt_3 + \dots$$

$$= \sum_i a_i dt_i = \int_{t_0}^t a dt.$$

می‌توان از ترکیب معادله (۵.۲) با معادله (۵.۵) رابطه‌ای بین شتاب و مکان برقرار کرد، یعنی

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

و یا

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (7.5)$$

یک رابطه مهم دیگر بین شتاب و مکان به طریق زیر به دست می‌آید: از روی معادله (۵.۵) می‌نویسیم $dv = a dt$. اگر طرف راست این رابطه را در طرف راست معادله (۲.۵) طرف چپ آن را در طرف چپ همان معادله ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$v dv = a dt \left(\frac{dx}{dt} \right) = a dx$$

و با انتگرال گیری به دست می آوریم $\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx$ یا

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \int_{x_0}^x a dx. \quad (۸.۵)$$

این معادله بخصوص هنگامی که رابطه بین x و a معلوم باشد، یعنی انتگرال سمت راست معادله (۸.۵) را بتوان حساب کرد، برای محاسبه سرعت بسیار مفید است.

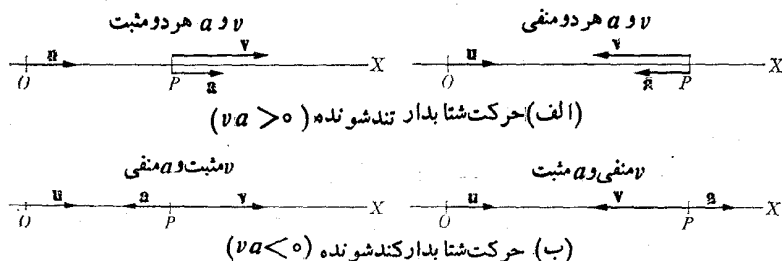
در دستگاه MKSC شتاب را بر حسب متر بر مجذور ثانیه یا m/s^2 بیان می کنند و آن شتاب حرکت جسمی است که سرعت آن با آهنگ ثابتی، در هر ثانیه یک متر بر ثانیه افزایش می یابد. شتاب را می توان با یکاهای دیگری مثلاً $(mi/hr)/s$ نیز بیان کرد.

۴.۵ نمایش برداری سرعت و شتاب در حرکت مستقیم الخط

در یک حرکت مستقیم الخط سرعت را با برداری نشان می دهند که طول آن از معادله (۲.۵) به دست می آید و راستای آن با راستای حرکت تطبیق می کند (شکل ۴.۵). شتاب را نیز با برداری نشان می دهند که بزرگی آن از معادله (۵.۵) به دست می آید، و بسته به اینکه شتاب مثبت یا منفی باشد، سوی بردار شتاب در سوی OX یا در جهت مخالف آن است. اگر u برداری که راستای x های مثبت باشد، می توان نوشت

$$v = u v = u \frac{dx}{dt} \quad \text{و} \quad a = u \frac{dv}{dt}. \quad (۹.۵)$$

بسته به علامت dv/dt و dx/dt ، بردارهای v و a با بردار u همسو یا در سوی مخالف آن می باشند. اگر v و a همسو باشند حرکت تند شونده و اگر در سوی مخالف هم باشند حرکت کند شونده است (شکل ۴.۵). یک قاعده ساده: اگر v و a هم علامت باشند حرکت تند شونده، در غیر این صورت حرکت کند شونده است.

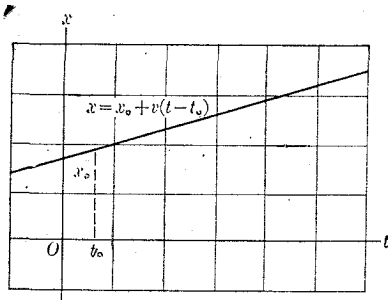


شکل ۴.۵. رابطه برداری بین سرعت و شتاب در حرکت مستقیم الخط

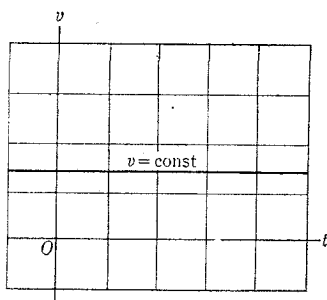
مثال ۲.۵. حرکت مستقیم الخط یکنواخت.

حل: در چنین حرکتی v ثابت است. بنابراین $a = dv/dt = 0$ است، یعنی شتاب وجود ندارد همچنین اگر v ثابت باشد، از معادله (۳.۵) به دست می آید

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0).$$



(ب) نمودار جابجایی



(الف) نمودار سرعت

شکل ۵.۵. نمودار سرعت و جابجایی در حرکت یکنواخت

در شکل ۵.۵ (الف)، v بر حسب t ؛ و در (ب)، x بر حسب t رسم شده است. مثال ۳.۵. حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت.

حل: در چنین حرکتی a ثابت است. بنابراین از معادله (۶.۵) داریم

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt = v_0 + a \int_{t_0}^t dt$$

و یا

$$v = v_0 + a(t - t_0) \quad (۱۰.۵)$$

و با توجه به رابطه (۳.۵) می توان نوشت

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = x_0 + v_0 \int_{t_0}^t dt + a \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

و یا

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \quad (۱۱.۵)$$

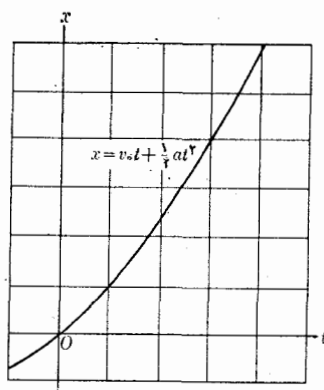
رابطه مفید دیگری نیز از معادله (۸.۵) به دست می آید:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a \int_{x_0}^x dx = a(x - x_0).$$

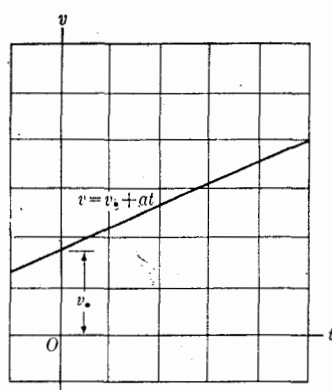
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (۱۲.۵)$$

سقوط آزاد بر اثر نیروی گرانی نمونه بسیار مهمی از حرکت با شتاب ثابت است. در این مورد، اگر جهت مثبت را به سوی بالا انتخاب کنیم، تعریف می‌کنیم $a = -g$. علامت منفی نشان می‌دهد که شتاب گرانی به سمت پایین است. در سطح زمین مقدار g از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند، ولی همیشه خیلی نزدیک به مقدار $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ است. این مقدار برای تمام اجسام یکی است و تاهنگامی که از سطح زمین خیلی دور نشده‌ایم می‌توان آن را مستقل از ارتفاع در نظر گرفت. زیرا با دور شدن از سطح زمین خواه به سمت داخل و خواه به سمت خارج آن، مقدار شتاب گرانی کاهش می‌یابد (فصل ۱۳).

می‌توان نمودار v و x را بر حسب زمان رسم کرد. هرگاه برای سادگی، قرار دهیم $t_0 = 0$ و $x_0 = 0$ ، معادله (۱۰.۵) به صورت $v = v_0 + at$ و معادله (۱۱.۵) به شکل $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ در می‌آید. این دو معادله در شکل ۶.۵ نشان داده شده‌اند. این قبیل نمودارها برای تجزیه و تحلیل هرگونه حرکتی بسیار سودمندند.



(ب) نمودار جابجایی



(الف) نمودار سرعت

شکل ۶.۵. نمودار سرعت و جابجایی در حرکت تند شونده با شتاب ثابت

مثال ۴.۵. جسمی روی محور x ها مطابق رابطه

$$x = 2t^3 + 5t^2 + 5$$

حرکت می‌کند که در آن x بر حسب سانتی‌متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) سرعت و شتاب را در هر لحظه پیدا کنید. (ب) مکان، سرعت و شتاب را در $t = 2 \text{ s}$ و $t = 3 \text{ s}$ حساب کنید. (ج) شتاب و سرعت میانگین را بین $t = 2 \text{ s}$ و $t = 3 \text{ s}$ به دست آورید.

حل: (الف) با استفاده از معادله‌های (۲.۵) و (۵.۵) می‌توان نوشت

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 + 5t^2 + 5) = 6t^2 + 10t \text{ cm s}^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 + 10t) = 12t + 10 \text{ cm s}^{-1}$$

(ب) برای $t = 2 \text{ s}$ و با به کار بردن معادله‌های مربوط، به دست می‌آید

$$x = 41 \text{ cm}, v = 44 \text{ cm s}^{-1}, a = 34 \text{ cm s}^{-2}.$$

همچنین، برای $t = 3 \text{ s}$ داریم

$$x = 104 \text{ cm}, v = 84 \text{ cm s}^{-1}, a = 46 \text{ cm s}^{-2}$$

(ج) برای یافتن سرعت و شتاب میانگین بین $t = 2 \text{ s}$ و $t = 3 \text{ s}$ ، داریم $\Delta t = 1 \text{ s}$ و نیز از قسمت (ب) به دست می‌آید

$$\Delta v = 40 \text{ cm s}^{-1}, \Delta x = 63 \text{ cm}.$$

در نتیجه

$$v_{\text{ave}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{63 \text{ cm}}{1 \text{ s}} = 63 \text{ cm s}^{-1}$$

$$a_{\text{ave}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40 \text{ cm s}^{-1}}{1 \text{ s}} = 40 \text{ cm s}^{-2}.$$

مثال ۵.۵. شتاب جسمی که روی محور x ها حرکت می‌کند برابر است با

$$a = (4x - 2) \text{ m s}^{-2}$$

که در آن x بر حسب متر است. هرگاه $x_0 = 0$ و $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ باشد، سرعت حرکت جسم را برای هر نقطه روی محور به دست آورید.

حل: چون در این مسئله شتاب بر حسب x داده شده است نه بر حسب زمان، برای پیدا کردن سرعت نمی‌توان از تعریف $a = dv/dt$ استفاده کرد. به جای آن، معادله (۸.۵) را به کار می‌گیریم و در آن $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ و $x_0 = 0$ قرار می‌دهیم. به دست می‌آید

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}(10)^2 = \int_0^x (4x - 2) dx$$

و یا

$$v^2 = 100 + 2[2x^2 - 2x]_0^x = 4x^2 - 4x + 100$$

بالاخره

$$v = \sqrt{4x^2 - 4x + 100}.$$

آیا لازم است $\pm$ جلو رادیکال گذاشته شود؟ در صورتی که پاسخ مثبت باشد معنی آن چیست؟ به دانشجوی توصیه می‌کنیم نمودار سرعت را بر حسب x رسم کند.

با استفاده از تعریف $v = dx/dt$ ، x را بر حسب t و از آنجا v و a را بر حسب t

به دست آورید. [برای به دست آوردن $x(t)$ ممکن است لازم شود به جدول انتگرالها مراجعه کنید.]

مثال ۶.۵. از بام ساختمانی به بلندی ۱۰۰ m گلوله‌ای با سرعت $۹۸\text{ m s}^{-۱}$ ، در راستای قائم به سمت بالا شلیک می‌شود. (الف) حداکثر ارتفاعی را که گلوله می‌تواند به آن برسد (از سطح زمین) پیدا کنید. (ب) زمانی که طول می‌کشد تا گلوله به این ارتفاع برسد چقدر است؟ (ج) سرعت آن هنگام برخورد با زمین چیست؟ (د) زمان کل سپری شده تا برخورد گلوله به زمین را حساب کنید.

حل: با استفاده از معادله‌های (۱۰.۵) و (۱۱.۵) و شکل ۷.۵ و به ازای $t_0 = 0$ ،
 $x_0 = x_A = ۱۰۰\text{ m}$ و $v_0 = ۹۸\text{ m s}^{-۱}$ (مبدأ مختصات نقطه C در روی زمین فرض می‌شود) و

$$a = -g = -۹.۸\text{ m s}^{-۲}$$

در هر لحظه، می‌توان نوشت

$$v = ۹۸ - ۹.۸t$$

$$x = ۱۰۰ + ۹۸t - ۴.۹t^۲.$$

(الف) در بیشینه ارتفاع (نقطه اوج) $v = 0$ است، بنابراین $۹۸ - ۹.۸t = 0$ در نتیجه $t = ۱۰\text{ s}$ ، هرگاه در معادله x به جای t مساوی آن یعنی ۱۰ s را قرار دهیم به دست می‌آید

$$x_B = ۱۰۰ + ۹۸ \times ۱۰ - ۴.۹ \times (۱۰)^۲ = ۵۹۰\text{ m}.$$

(ب) برای یافتن زمان لازم برای رسیدن گلوله به سطح زمین (یعنی نقطه C)، x_C را برابر صفر قرار می‌دهیم، زیرا C مبدأ مختصات فرض شده است. در این صورت

$$x_C = 0 = ۱۰۰ + ۹۸t - ۴.۹t^۲.$$

این یک معادله درجه دوم نسبت به t است که جوابهای آن عبارتند از

$$t_C = -۰.۰۹۶\text{ s} \text{ و } t_C = ۲.۰۹۶\text{ s}.$$

زمان منفی، مربوط به زمانی قبل از شلیک گلوله ($t = 0$) است و باید حذف شود، زیرا هیچگونه معنای فیزیکی در این مسئله ندارد (ممکن است در مسایل دیگر معنی داشته باشد).

(ج) برای پیدا کردن سرعت در نقطه C در رابطه $v_C = ۹۸ - ۹.۸t$ به جای t قرار می‌دهیم $t = ۲.۰۹۶\text{ s}$ ؛ به دست می‌آید

$$v_C = ۹۸ - ۹.۸ \times (۲.۰۹۶) = -۱۰.۷۴۱\text{ m s}^{-۱}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که گلوله به سوی پایین حرکت می‌کند.

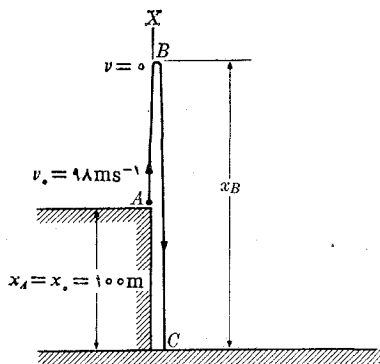
توصیه می‌شود با به کار بردن معادله (۱۲.۵) که در این مسئله بدین صورت نوشته می‌شود

$$v^۲ = ۹۶۰۴ - ۱۹.۶(x - ۱۰۰)$$

صحت نتایج حاصل برای x_B و v_C را بررسی کنید. همچنین دانشجو می‌تواند A را مبدأ

مختصات قرار دهد و مسئله را حل کند. در این صورت به دست می آید

$$x_0 = x_A = 0 \text{ و } x_C = -100 \text{ m.}$$



شکل ۷.۵

مثال ۷.۵. ذره‌ای مطابق قانون $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$ روی محور X ها حرکت می‌کند. در چه فاصله‌های زمانی حرکت ذره به سمت X های مثبت است؛ به سمت X های منفی است؛ تندشونده است؛ کندشونده است؟ نمودار x ، v و a را بر حسب زمان رسم کنید.

حل: با استفاده از معادله (۲.۵) برای سرعت لحظه‌ای داریم

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3).$$

شتاب را می‌توان با استفاده از معادله (۵.۵) به دست آورد:

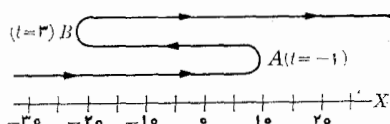
$$a = 6t - 6 = 6(t-1).$$

شکل ۸.۵. نمودار x ، v و a را بر حسب زمان نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که به ازای $t < -1$ سرعت مثبت است و حرکت در سوی X های مثبت صورت می‌گیرد. به ازای $t = -1$ ، $x = 10$ ، $t = 3$ ، $x = 10$ و سرعت برابر صفر است. برای $1 < t < 3$ ، سرعت منفی است و سوی حرکت عوض می‌شود و ذره در جهت X های منفی جابجا می‌شود. به ازای $t = 3$ ، یعنی هنگامی که $x = -22$ ، سرعت دوباره برابر صفر می‌شود. به ازای $t > 3$ ، سرعت از نو مثبت و سوی حرکت مجدداً تغییر می‌کند، ذره در سوی X های مثبت جابجا می‌شود. **شکل ۸.۵ (الف)** مکان تقریبی ذره را نشان می‌دهد. A و B نمایش نقاط برگشت‌اند، یعنی جاهایی که سرعت برابر صفر می‌شود.

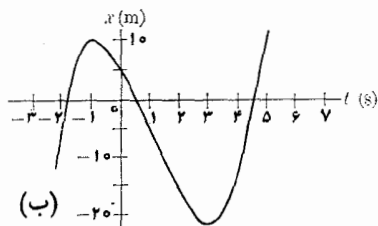
از نمودار سرعت و شتاب مشاهده می‌شود که برای $t < -1$ حرکت کند شونده است (بزرگی v کاهش می‌یابد، به گفته دیگر، علامت a و v مخالف هم می‌باشد). برای $1 < t < 3$ حرکت تند شونده، برای $t > 3$ حرکت کند شونده می‌شود.

این مثال نشان می‌دهد نمودار x ، v و a بر حسب زمان تا چه حد برای آشکار کردن مشخصات

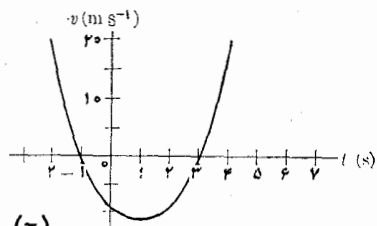
حرکت سودمند است.



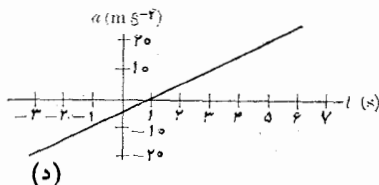
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۸.۵

۵.۵ حرکت منحنی الخط: سرعت

اکنون ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که در حرکت خود مسیر خمیده P را مطابق شکل ۹.۵ طی می‌کند. در لحظه t ذره در نقطه A است که با بردار مکان

$$\vec{r} = \vec{OA} = u_x x + u_y y + u_z z$$

نمایش داده می‌شود. در لحظه t' ذره در نقطه B با مکان

$$\vec{r}' = \vec{OB} = u_x x' + u_y y' + u_z z'$$

قرار دارد. گرچه در این مدت ذره کمان $AB = \Delta s$ را می‌پیماید، بردار جابجایی آن برابر

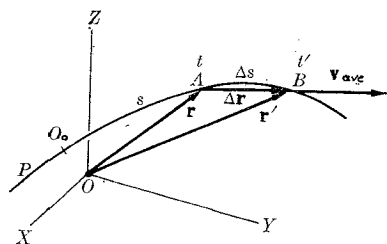
است با $\vec{AB} = \Delta \mathbf{r}$ ، از شکل ۹.۵ پیداست که $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ می باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{AB} = \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{u}_x (x' - x) + \mathbf{u}_y (y' - y) \\ &+ \mathbf{u}_z (z' - z) = \mathbf{u}_x \Delta x + \mathbf{u}_y \Delta y + \mathbf{u}_z \Delta z \end{aligned} \quad (۱۳.۵)$$

که در آن $\Delta x = x' - x$ ، $\Delta y = y' - y$ و $\Delta z = z' - z$ است. سرعت میانگین نیز که یک کمیت برداری است با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{v}_{\text{ave}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (۱۴.۵)$$

شکل ۹.۵. جابجایی و سرعت میانگین در یک حرکت منحنی الخط



با به کار بردن معادله (۱۳.۵) به دست می آید

$$\mathbf{v}_{\text{ave}} = \mathbf{u}_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + \mathbf{u}_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \mathbf{u}_z \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (۱۵.۵)$$

سرعت میانگین با برداری موازی با بردار جابجایی $\vec{AB} = \Delta \mathbf{r}$ نشان داده می شود. برای محاسبه سرعت لحظه ای، چنانکه در پیش عمل کردیم، باید Δt را خیلی کوچک بگیریم، یعنی

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{ave}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (۱۶.۵)$$

اکنون اگر Δt به سمت صفر میل کند ($\Delta t \rightarrow 0$)، نقطه B ، چنانکه نقطه های B' ، B'' ، ... در شکل ۱۰.۵ نشان می دهند، به نقطه A نزدیک می شود. همزمان با آن بزرگی و راستای بردار $\vec{AB} = \Delta \mathbf{r}$ و همچنین سرعت میانگین تغییر می کند. در حد، هنگامی که نقطه B خیلی

نزدیک به A است، بردار $\vec{AB} = \Delta \mathbf{r}$ در راستای مماس بر منحنی در نقطه A یعنی AT قرار می گیرد. بنابراین سرعت لحظه ای در یک حرکت منحنی الخط بر مسیر حرکت مماس است و با رابطه زیر نشان داده می شود:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (۱۷.۵)$$

با توجه به معادله (۱۵.۵)، رابطه سرعت عبارت می شود از

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_x \frac{dx}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dy}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dz}{dt} \quad (18.5)$$

در رابطه (۱۸.۵) عبارتهای

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (19.5)$$

مؤلفه های سرعت روی محوره های OX ، OY و OZ هستند و مقدار عددی سرعت برابر می شود با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (20.5)$$

برای رسیدن از معادله (۱۶.۵) به معادله (۱۷.۵) می توان به گونه مختصر متفاوتی نیز عمل کرد. در شکل ۹.۵، فرض کنیم O یک نقطه مرجع اختیاری روی منحنی مسیر باشد. کمیت $s = O_0A$ جای ذره مورد نظر را در جابجایی آن در طول منحنی اندازه می گیرد. همانند حرکت مستقیم الخط، بسته به جای ذره نسبت به نقطه O ، ممکن است s مثبت یا منفی باشد. هنگامی که ذره از نقطه A به نقطه B می رود، جابجایی Δs روی منحنی با طول کمان AB مشخص می شود. با ضرب و تقسیم معادله (۱۶.۵) به Δs که برابر کمان AB است، به دست می آید

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right).$$

با مراجعه به شکل ۱۰.۵، می بینیم که در پراکنش اول هنگامی که Δt به سمت صفر میل می کند ($\Delta t \rightarrow 0$)، Δs نیز به سمت صفر میل می کند ($\Delta s \rightarrow 0$). از طرف دیگر، از شکل ۹.۵ پیداست که بزرگی کمیت برداری $\Delta \mathbf{r}$ تقریباً با Δs برابر است و هر چه نقطه A به نقطه B نزدیکتر شود این دو مقدار بیشتر به هم نزدیک می شوند. هنگامی که Δs به سمت صفر میل می کند، حد کسر $\Delta \mathbf{r} / \Delta s$ نمایش برداری است به بزرگی واحد و در راستای مماس به منحنی مسیر، یعنی

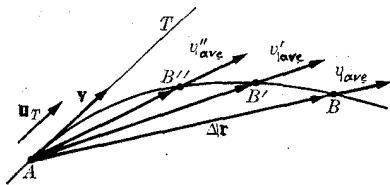
$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{u}_T \quad (21.5)$$

از طرف دیگر

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (22.5)$$

بنابراین می توان $\mathbf{v}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_T \frac{ds}{dt} = \mathbf{u}_T v \quad (23.5)$$



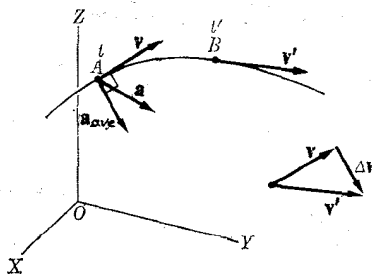
شکل ۱۰.۵. در یک حرکت منحنی الخط سرعت بر مسیر مماس است

که در آن ds/dt مقدار سرعت و برداریکای u_T راستای آنرا نشان می‌دهد. فرض $v = ds/dt$ برای مقدار سرعت با تعریف سرعت در معادله (۲.۵) سازگار است، زیرا در اینجا ds جایجایی ذره در مدت زمان dt روی مسیر منحنی می‌باشد. بدین طریق نقش ds در این حرکت همانند نقش dx در حرکت مستقیم الخط است. تنها فرق بین معادله (۳.۲.۵) و معادله (۲.۵) دخالت عنصر راستای برداریکای u_T روی مماس است که پیش از این در بخش ۴.۵ وارد شده بود.

۶.۵ حرکت منحنی الخط: شتاب

در حالت کلی، در یک حرکت منحنی الخط هم بزرگی و هم راستای سرعت تغییر می‌کند. بزرگی سرعت تغییر می‌کند زیرا حرکت ذره ممکن است تند یا کند شود. راستای سرعت تغییر می‌کند زیرا سرعت بر مسیر مماس است و راستای مسیر دائماً تغییر می‌کند. شکل ۱۱.۵ سرعت ذره را در لحظه‌های t و t' هنگامی که ذره بترتیب در نقطه‌های A و B قرار دارد به دست می‌دهد. تغییر برداری سرعت در حرکت از نقطه A تا نقطه B در مثلی که از بردارها تشکیل شده با Δv نشان داده شده است، به گفته دیگر، چون در شکل ۱۱.۵، در مثلث بردارها $v + \Delta v = v'$ است، در نتیجه $\Delta v = v' - v$ می‌شود. از اینجا شتاب میانگین در طول زمان Δt را که یک کمیت برداری است چنین تعریف می‌کنیم:

$$a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (۲۴.۵)$$



شکل ۱۱.۵. شتاب در حرکت منحنی الخط

یعنی موازی Δv است. چون $v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ است داریم

$$\Delta v = u_x \Delta v_x + u_y \Delta v_y + u_z \Delta v_z$$

$$\mathbf{a}_{\text{ave}} = \mathbf{u}_x \frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \mathbf{u}_y \frac{\Delta v_y}{\Delta t} + \mathbf{u}_z \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \quad (25.5)$$

شتاب لحظه‌ای که از این به بعد فقط «شتاب» نامیده می‌شود، با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_{\text{ave}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

و یا

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (26.5)$$

شتاب برداری است در راستای تغییر لحظه‌ای سرعت. چون سرعت در راستای انحنای منحنی تغییر پیدا می‌کند، در حالت کلی شتاب نه عمود بر مسیر است و نه مماس بر آن، بلکه همیشه به سمت کاوی منحنی می‌باشد (شکل ۱۲.۵). با استفاده از معادله (۱۷.۵) می‌توان معادله (۲۶.۵) را به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (27.5)$$

بنا به معادله (۲۵.۵) داریم

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_x \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dv_y}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dv_z}{dt} \quad (28.5)$$



شکل ۱۲.۵. رابطه برداری بین سرعت و شتاب در حرکت منحنی الخط

به طوری که اندازه مؤلفه‌های شتاب در راستای محوره‌های OX ، OY و OZ عبارتند از

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (29.5)$$

یا، بنا به معادله‌های (۱۹.۵) یا (۲۷.۵)

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (30.5)$$

و بزرگی شتاب برابر است با

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (31.5)$$

معمولا در یک حرکت منحنی الخط معادله مسیر، یا به گفته دیگر، مختصات ذره متحرک به صورت تابعی از زمان معلوم است. این مختصات با معادله‌های زیر داده می‌شوند:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

با به کار بستن معادله‌های (۱۹.۵) و (۲۹.۵) می‌توان سرعت و شتاب را حساب کرد. در حالت‌های دیگر، مسئله درست برعکس است: مؤلفه‌های شتاب بر حسب زمان معلوم می‌باشند، یعنی

$$a_x = a_x(t), a_y = a_y(t), a_z = a_z(t)$$

در این صورت با استفاده از معادله (۲۹.۵) و انتگرال گیری از آن، مؤلفه‌های سرعت، و با انتگرال گیری از معادله (۱۹.۵) مختصات ذره به صورت توابعی از زمان به دست می‌آیند.

۷.۵ حرکت با شتاب ثابت

حالتی که در آن بزرگی و راستای شتاب ثابت باشد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با ثابت بودن $\mathbf{a}$ از انتگرال معادله (۲۶.۵) به دست می‌آید

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t \mathbf{a} dt = \mathbf{a} \int_{t_0}^t dt = \mathbf{a}(t - t_0) \quad (۳۲.۵)$$

که در آن v سرعت در لحظه t است. چون $\int_{v_0}^v dv = v - v_0$ است، بنا بر این داریم

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0). \quad (۳۳.۵)$$

می‌توان در هر لحظه سرعت را از این معادله به دست آورد. با قرار دادن $\mathbf{v}$ از معادله (۳۳.۵) در معادله (۱۷.۵) و با انتگرال گیری به دست می‌آید

$$\int_{r_0}^r d\mathbf{r} = \int_{t_0}^t [\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0)] dt = \mathbf{v}_0 \int_{t_0}^t dt + \mathbf{a} \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

که در آن $\mathbf{r}$ جای ذره در لحظه t است. پس

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2. \quad (۳۴.۵)$$

از این معادله جای ذره در هر لحظه به دست می‌آید. می‌توان این نتایج را با معادله‌های (۱۰.۵) و (۱۱.۵) که برای حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت به دست آوردیم مقایسه کرد. در حرکت مستقیم الخط سرعت و شتاب در راستای یکسان و سوی موافق (یا مخالف) هم هستند. در حالت کلی که مورد بحث ماست، $\mathbf{v}_0$ و $\mathbf{a}$ می‌توانند راستاهای مختلف داشته باشند. بنا بر این $\mathbf{v}$ که از معادله (۳۳.۵) به دست می‌آید با $\mathbf{a}$ موازی نیست، ولی همیشه در صفحه حاصل از $\mathbf{v}_0$ و $\mathbf{a}$ قرار دارد. همچنین معادله (۳۴.۵) نشان می‌دهد که انتهای بردار $\mathbf{r}$ همیشه در صفحه موازی با صفحه $\mathbf{v}_0$ و $\mathbf{a}$ که از نقطه مشخص شده با $\mathbf{r}$ می‌گذرد قرار دارد. از مطالب فوق نتیجه می‌گیریم که حرکت با شتاب ثابت همیشه در یک صفحه است. همچنین معادله (۳۴.۵) نشان می‌دهد که مسیر حرکت به صورت سهمی است (به مسئله ۳۳.۳ مراجعه کنید).

یکی از موارد استفاده بسیار جالب و مفید این معادله‌ها کاربرد آنها در حرکت یک

پرتابه^۱ است. در این مورد $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ برابر شتاب گرانی، یعنی $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ است. دستگاه مختصات OXY را در صفحه $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ انتخاب می‌کنیم. سوی مثبت Y ها به سمت بالاست، به گونه‌ای که $\mathbf{g} = -\mathbf{u}_y g$ و مبدأ O بر $\mathbf{r}_0$ منطبق است (شکل ۱۳.۵). در این صورت

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_x v_{0x} + \mathbf{u}_y v_{0y}$$

که در آن

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{0x} = v_0 \cos \alpha. \quad (۳۵.۵)$$

معادله (۳۳.۵) را می‌توان بر حسب مؤلفه‌ها نوشت (با قرار دادن $t_0 = 0$):

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v_x + \mathbf{u}_y v_y = (\mathbf{u}_x v_{0x} + \mathbf{u}_y v_{0y}) - \mathbf{u}_y g t$$

یا

$$v_y = v_{0y} - g t, \quad v_x = v_{0x} \quad (۳۶.۵)$$

این معادله نشان می‌دهد که مؤلفه v_x ، چنانکه می‌بایست، در راستای OX ثابت باقی می‌ماند زیرا در این راستا شتاب وجود ندارد. همچنین، هرگاه رابطه (۳۴.۵) را به صورت معادله‌ای بنویسیم که مؤلفه‌ها از هم جدا شده باشند و در آن به جای $t_0 = 0$ ، $\mathbf{r}_0 = 0$ قرار دهیم به دست می‌آید

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y = (\mathbf{u}_x v_{0x} + \mathbf{u}_y v_{0y}) t - \mathbf{u}_y \frac{1}{2} g t^2$$

یا

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2, \quad x = v_{0x} t \quad (۳۷.۵)$$

که مختصات ذره را به صورت توابعی از زمان به دست می‌دهد. هرگاه در معادله (۳۶.۵) به جای v_y صفر قرار دهیم زمان لازم برای رسیدن پرتابه به بالاترین نقطه، A (نقطه اوج) به دست می‌آید، زیرا در این نقطه راستای سرعت افقی است. بنابراین

$$t = \frac{v_{0y}}{g} \quad \text{یا} \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (۳۸.۵)$$

برای به دست آوردن h ، ارتفاع بیشینه‌ای که پرتابه به آن می‌رسد در معادله دوم (۳۷.۵) مقدار t را از معادله (۳۸.۵) قرار می‌دهیم:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (۳۹.۵)$$

زمان پرواز، زمانی که لازم است تا پرتابه مجدداً به تراز زمین در نقطه B برگردد، از قرار دادن $y = 0$ در معادله (۳۷.۵) به دست می‌آید. بدیهی است این زمان دو برابر زمانی خواهد بود که از معادله (۳۸.۵) پیدا می‌شود، یعنی $2v_0 \sin^2 \alpha / 2g$.

بود، $R = OB$ ، مسافت پیموده شده افقی است که از قرار دادن زمان پرواز در اولین معادله از دو معادله (۳۷.۵) به دست می‌آید:

$$R = v_{0x} \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

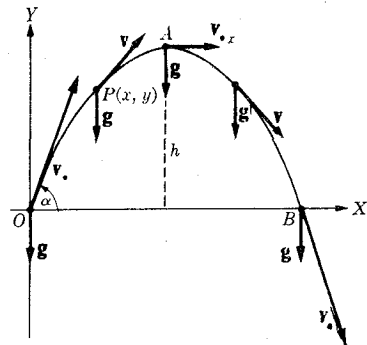
یا

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (40.5)$$

یادآوری می‌شود که به ازای $\alpha = 45^\circ$ برد بیشینه است. از حذف t بین دو معادله (۳۷.۵) معادله مسیر به دست می‌آید:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \quad (41.5)$$

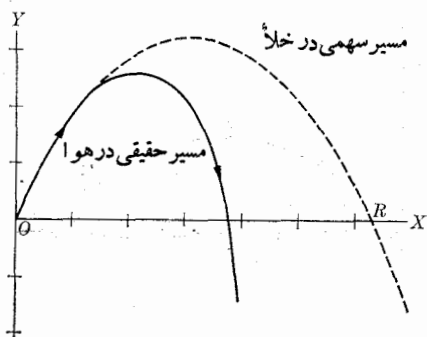
را بطة فوق معادله یک سهمی است زیرا $\tan \alpha$ و ضریب x^2 هر دو ثابت می‌باشند.



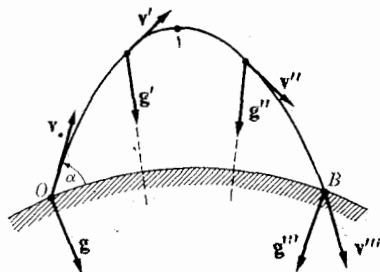
شکل ۱۳.۵. هرگاه شتاب ثابت باشد، مسیر حرکت یک سهمی است.

نتایجی که به دست آوردیم تا هنگامی ارزش دارند که: (۱) برد به قدر کافی کوچک باشد تا بتوان از انحناى زمین صرف نظر کرد؛ (۲) ارتفاع از سطح زمین به قدر کافی کوچک باشد تا بشود تغییر شتاب گرانی را نادیده گرفت؛ (۳) سرعت اولیه به قدر کافی کوچک باشد تا بتوان از مقاومت هوا چشم پوشید. برای پرتابه‌های با برد خیلی زیاد، مانند موشکهای قاره پیمای، وضع مطابق شکل ۱۴.۵ است، که در آن تمام بردارهای g متوجه مرکز زمین هستند و با ارتفاع تغییر می‌کنند. در این حالت مسیر پرتابه کمائی از بیضی است که در فصل ۱۳ مورد بحث قرار خواهد گرفت. هرگاه مقاومت هوا را به حساب آوریم نیز، مسیر از حالت سهمی خارج می‌شود و برد کاهش می‌یابد. شکل ۱۵.۵ مسیر واقعی پرتابه را در هوا نشان می‌دهد.

مثال ۸.۵. گلوله‌ای با سرعت 200 m s^{-1} و با زاویه 40° با سطح زمین از تفنگی شلیک می‌شود. سرعت و محل گلوله را در آغاز ثانیه بیستم پیدا کنید. همچنین برد و زمان لازم برای برگشت گلوله به سطح زمین را حساب کنید.



شکل ۱۴.۵. اثر مقاومت هوا روی حرکت یک پرتابه



شکل ۱۴.۵. مسیر یک پرتابه با برد زیاد به جای سهمی کمائی از بیضی است.

حل: بنا به شکل ۱۴.۵ و با توجه به اینکه $v_0 = 200 \text{ m s}^{-1}$ و $\alpha = 40^\circ$ است، به دست می آید

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 153.72 \text{ m s}^{-1}$$

و

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 128.96 \text{ m s}^{-1}.$$

بنابراین مؤلفه های سرعت در هر لحظه عبارتند از

$$v_x = 153.72 \text{ m s}^{-1} \text{ و } v_y = (128.96 - 9.8t) \text{ m s}^{-1}$$

مختصات پرتابه در هر لحظه برابرند با

$$x = (153.72)t \text{ m}, \quad y = (128.96t - 4.9t^2) \text{ m}.$$

به ازای $t = 20 \text{ s}$ با سانی به دست می آید

$$v_x = 153.72 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_y = -67.94 \text{ m s}^{-1}.$$

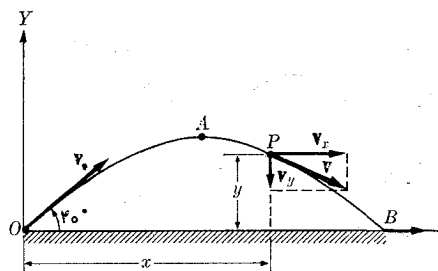
علامت منفی در مقابل v_y نشان می دهد که گلوله در حال پایین آمدن است. بزرگی سرعت برابر می شود با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 167.94 \text{ m s}^{-1}.$$

همچنین مختصات گلوله در نقطه P عبارتند از

$$x = 3074 \text{ m}, \quad y = 612 \text{ m}.$$

خواننده حساب خواهد کرد که ارتفاع A ، نقطه اوج، برابر 843.7 m و برد $R = OB$ برابر 4021 m و زمان لازم برای رفتن از نقطه O به نقطه B برابر 26.34 s است.



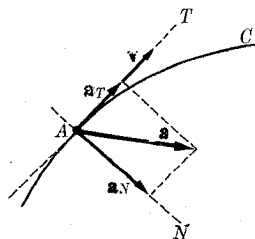
شکل ۱۶.۵. سرعت در حرکت یک پرتابه

۸.۵ مؤلفه‌های مماسی و قایم شتاب

ذره‌ای را که مسیر حرکت آن یک منحنی است در نظر می‌گیریم (شکل ۱۷.۵). برای سادگی فرض می‌کنیم منحنی مسیر در یک صفحه تخت قرار دارد، ولی نتایجی که به دست خواهند آمد برای حرکت روی هر منحنی دیگری معتبر انبساط. در لحظه t ذره با سرعت v و شتاب a در نقطه A است. نظر به اینکه سوی شتاب a به سمت تقعر منحنی است، می‌توان آن را به مؤلفه مماسی a_T — موازی مماس AT به نام شتاب مماسی ^{1} — و مؤلفه قایم a_N — موازی قایم AN به نام شتاب قایم ^{2} — تجزیه کرد. هریک از این دو شتاب دارای معنای فیزیکی کاملاً مشخصی هستند. هنگامی که ذره حرکت می‌کند، بزرگی سرعت ممکن است تغییر کند. این تغییر مربوط به شتاب مماسی است. راستای سرعت نیز احتمال دارد تغییر کند که این تغییر به شتاب قایم مربوط می‌شود. به گفته دیگر:

شتاب مماسی: تغییر در بزرگی سرعت.

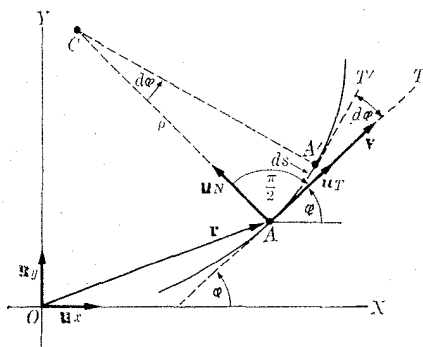
شتاب قایم: تغییر در راستای سرعت.



شکل ۱۷.۵. شتاب مماسی و قایم در یک حرکت منحنی‌الخط

بردار یکای u_T را در نقطه A و مماس بر منحنی رسم می‌کنیم (شکل ۱۸.۵). بنا به معادله (۲۳.۵) سرعت به صورت $v = u_T v$ نوشته می‌شود. بنابراین شتاب عبارت خواهد بود از

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(u_T v) = u_T \frac{dv}{dt} + \frac{du_T}{dt} v.$$



شکل ۱۸.۵

برای مسیرهای مستقیم الخط راستا و بزرگی بردار $\mathbf{u}_T$ ثابت و $du_T/dt = 0$ است. در مسیرهای منحنی، چون راستای $\mathbf{u}_T$ در طول منحنی مسیر تغییر می‌کند، بزرگی du_T/dt برابر صفر نیست. بنابراین du_T/dt را حساب می‌کنیم. برداری که $\mathbf{u}_N$ را عمود بر منحنی و در سوی کاوی آن در نظر می‌گیریم. اگر زاویه بین مماس بر منحنی و راستای محور X ها در نقطه A باشد، با استفاده از معادله (۹.۳) می‌توان نوشت

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_x \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \varphi$$

$$\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_x \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + \mathbf{u}_y \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -\mathbf{u}_x \sin \varphi + \mathbf{u}_y \cos \varphi.$$

بنابراین

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = -\mathbf{u}_x \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \mathbf{u}_y \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{u}_N \frac{d\varphi}{dt}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که بردار du_T/dt بر منحنی عمود است. همچنین می‌توان نوشت

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\varphi}{ds}$$

که در آن $ds = AA'$ کمان کوچکی است که ذره در فاصله زمانی dt می‌پیماید. عمود بر منحنی در نقاط A و A' یکدیگر را در نقطه C به نام مرکز انحنا^۱ قطع می‌کنند. با به کار بردن معادله (۴.۲) و با قرار دادن $\rho = CA$ می‌توان نوشت $\rho = ds / d\varphi$ یا $d\varphi/ds = 1/\rho$ بنا بر این $(d\varphi/dt) = (v/\rho)$

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \mathbf{u}_N \frac{v}{\rho}. \quad (۴۲.۵)$$

ρ شعاع انحنا^۲ منحنی نام دارد. بالاخره با وارد کردن این نتیجه در رابطه $d\mathbf{v}/dt$ به -

دست می آید

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_T \frac{dv}{dt} + \mathbf{u}_N \frac{v^2}{\rho} \quad (۴۳.۵)$$

جمله اول سمت راست رابطه فوق، $\mathbf{u}_T (dv/dt)$ برداری است مماس بر منحنی، و متناسب با مشتق بزرگی بردار سرعت نسبت به زمان؛ و مربوط است به شتاب مماسی $\mathbf{a}_T$. جمله دوم، $\mathbf{u}_N (v/\rho)$ برداری است عمود بر منحنی و مربوط به شتاب قائم $\mathbf{a}_N$ است. $\mathbf{a}_N$ وابسته به تغییر راستاست زیرا به بردار $d\mathbf{u}_T/dt$ مربوط است. برای بزرگی هریک از این شتابها می توان نوشت

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad (۴۴.۵)$$

در این صورت بزرگی شتاب در نقطه A برابر می شود با

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

در حرکت منحنی الخط یکنواخت چون بزرگی سرعت ثابت باقی می ماند، $\mathbf{a}_T = 0$ است یعنی شتاب مماسی وجود ندارد. برعکس در حرکت مستقیم الخط، چون راستای سرعت تغییر نمی کند، شعاع انحنا بینهایت می شود ($\rho = \infty$)، در این صورت $\mathbf{a}_N = 0$ خواهد بود یعنی شتاب قائم وجود ندارد. باید در نظر داشت که نتایج به دست آمده برای هر حرکتی، خواه در صفحه و خواه در فضا، معتبرند.

مثال ۹.۵. دیسک D آزادانه دور یک محور افقی می چرخد (شکل ۱۹.۵)، و نخ به دور محیط خارجی دیسک پیچیده است. جسم A که به انتهای نخ بسته شده است بر اثر سنگینی سقوط می کند. حرکت جسم A با شتاب ثابت و تند شونده است، ولی چنانکه در فصل ۱۰ خواهد آمد، شتاب آن از شتاب گرانی کمتر است. سرعت جسم A در لحظه $t = 0$ برابر 0.04 m s^{-1} و دو ثانیه بعد جسم 0.2 m به سمت پایین سقوط کرده است. شتاب مماسی و قائم جسم را در هر لحظه برای یک نقطه اختیاری روی لبه دیسک به دست آورید.

حل: در صورتی که مبدأ مختصات را در نقطه $t = 0$ بگیریم، معادله حرکت با شتاب ثابت و تند شونده جسم A عبارت می شود از $x = v_0 t + (1/2)at^2$ چون $v_0 = 0.04 \text{ m s}^{-1}$ است، در نتیجه داریم

$$x = 0.04t + \frac{1}{2}at^2 \text{ m.}$$

به ازای $t = 2 \text{ s}$ باید $x = 0.2 \text{ m}$ باشد. بنابراین داریم $a = 0.06 \text{ m s}^{-2}$ ، و بالاخره

$$x = 0.04t + 0.03t^2 \text{ m.}$$

در این صورت سرعت A برابر است با

$$v = \frac{dx}{dt} = 0.04 + 0.06t \text{ m s}^{-1}$$

این معادله سرعت را در هر نقطه دیگری مانند B روی لبه دیسک نیز نشان می‌دهد. شتاب مماسی نقطه B برابر با شتاب مماسی نقطه A است:

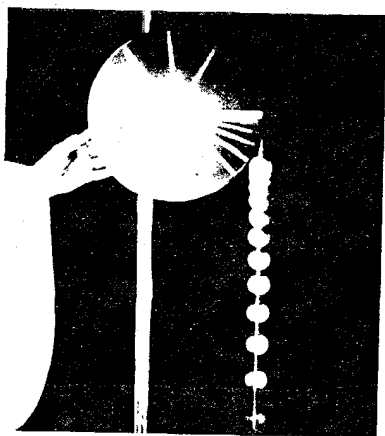
$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0.06 \text{ m s}^{-2}.$$

چون مطابق شکل $\rho = 0.1 \text{ m}$ است، شتاب قائم در نقطه B برابر می‌شود با

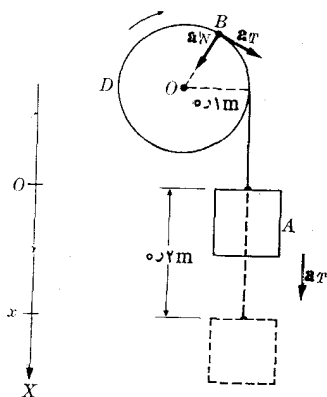
$$\begin{aligned} a_N &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0.04 + 0.06t)^2}{0.1} \\ &= (0.016 + 0.048t + 0.036t^2) \text{ m s}^{-2}. \end{aligned}$$

شتاب کل در نقطه B برابر است با

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}.$$



(ب)



(الف)

شکل ۱۹.۵. عکس چند درختی^۱ (ب) نشان می‌دهد که حرکت با شتاب ثابت و تند شونده است. (با اندازه‌گیری روی شکل صحت این موضوع را بررسی کنید).

۹.۵ حرکت دایره‌ای: سرعت زاویه‌ای

اکنون حالت ویژه‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن مسیر حرکت یک دایره است، یعنی حرکت دایره‌ای^۲. سرعت v ، مماس بر دایره، بر شعاع $R = CA$ عمود است. هرگاه فاصله گردش را از مبدا O واقع روی محیط دایره اندازه بگیریم، بنا به شکل (۲۰.۵) خواهیم

داشت $s = R\theta$. بنابراین، با به کار بردن معادله (۲۳.۵) و با توجه به اینکه R ثابت است به دست می آید

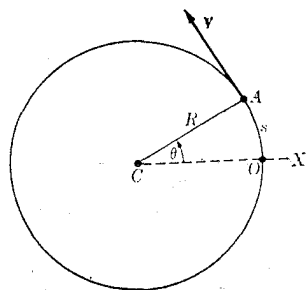
$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \quad (۴۵.۵)$$

کمیت

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (۴۶.۵)$$

یا مشتق زاویه نسبت به زمان، را سرعت زاویه ای می نامند. سرعت زاویه ای بر حسب رادیان بر ثانیه (rad s^{-1})، یا به طور ساده تر s^{-1} بیان می شود. پس رابطه (۴۵.۵) به صورت

$$v = \omega R \quad (۴۷.۵)$$



شکل ۲۰.۵. حرکت دایره ای

درمی آید. سرعت زاویه ای را می توان به صورت یک کمیت برداری در راستای عمود بر سطح دایره و در سوی یک پیچ راستگرد که در جهت جابجایی ذره روی دایره می چرخد در نظر گرفت (شکل ۲۱.۵). با توجه به شکل ملاحظه می شود که $R = r \sin \gamma$ و $\omega = \mathbf{u}_z (d\theta/dt)$ است، بنابراین به جای معادله (۴۷.۵) می توان نوشت $v = \omega r \sin \gamma$ که نشان می دهد رابطه برداری زیر هم از لحاظ بزرگی و هم از لحاظ راستا، برقرار است:

$$\mathbf{u} = \omega \times \mathbf{r} \quad (۴۸.۵)$$

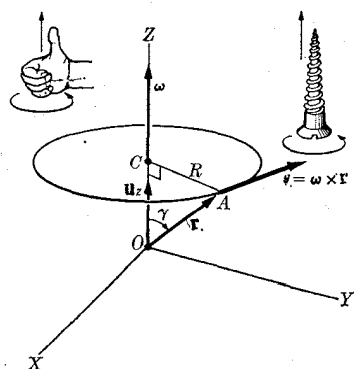
این رابطه تنها هنگامی ارزش دارد که حرکت دایره ای یا چرخشی (حرکتی با r و γ ثابت) باشد.

یک حالت بسیار جالب، حرکت دایره ای یکنواخت است، یعنی حرکتی که در آن ω ثابت باشد. در این حالت، حرکت دوره ای^۱ است یعنی ذره متحرک در فاصله های زمانی ثابتی از یک نقطه دایره می گذرد. دوره P زمان لازم برای پیمودن یک دور کامل دایره و بسا ν تعداد دوره هایی است که متحرک در واحد زمان انجام می دهد. به عنوان مثال، اگر ذره در t ثانیه n بار دور دایره بچرخد، $p = t/n$ و $\nu = n/t$ است. رابطه زیر که موارد استعمال متعدد دارد دو کمیت فوق را به هم مربوط می کند:

$$\nu = \frac{1}{P} \quad (۴۹.۵)$$

هنگامی که دوره بر حسب ثانیه باشد بسامد را باید بر حسب s^{-1} (ثانیه) یا s^{-1} بیان کرد. این واحد هرگز نام دارد و با علامت اختصاری Hz نشان داده می‌شود. معمولاً به جای Hz یا s^{-1} اصطلاح دور بر ثانیه (rps) به کار می‌رود. کلمه هرتز از نام فیزیکدان آلمانی [۱۸۵۷-۱۸۹۴ (۱۲۳۶-۱۲۷۳ ه. ش.)] گرفته شده است، که برای اولین بار وجود امواج الکترومغناطیسی را به‌طور تجربی اثبات کرد. گاهی اوقات بسامد یک حرکت را بر حسب دور بر دقیقه (rpm) نشان می‌دهند که همان s^{-1} (دقیقه) است. واضح است که

$$1 \text{ (دقیقه)}^{-1} = \frac{1}{60} \text{ Hz.}$$



شکل ۲۱.۵. رابطه برداری بین سرعت زاویه‌ای، سرعت خطی و بردار مکان در حرکت دایره‌ای

دوره و بسامد در همه فرایندهای تناوبی که به صورت دوره‌ای انجام می‌گیرند یعنی پس از پایان هر چرخش به‌طور کامل تکرار می‌شوند به کار می‌رود. به عنوان مثال، حرکت زمین دور خورشید نه دایره‌ای و نه یکنواخت، بلکه دوره‌ای است. این حرکت، هر بار که زمین مدار خود را به پایان می‌رساند از نو تکرار می‌شود. دوره، زمان لازم برای انجام یک دور و بسامد تعداد این دورها در یک ثانیه است. یک هرتز معادل یک دور بر ثانیه است.

اگر ω ثابت باشد با انتگرال‌گیری از معادله (۴۶.۵) به دست می‌آید

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt = \omega \int_{t_0}^t dt \quad \text{یا} \quad \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0).$$

این رابطه را که برای حرکت دایره‌ای یکنواخت معتبر است با رابطه‌ای که در مثال ۲.۵ برای حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت به دست آوردیم مقایسه کنید. معمولاً θ_0 و t_0 را برابر صفر قرار می‌دهند. بدین طریق به دست می‌آید

$$\theta = \omega t \quad \text{یا} \quad \omega = \frac{\theta}{t}. \quad (50.5)$$

برای یک گردش کامل، $t = P$ و $\theta = 2\pi$ است، در نتیجه

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu. \quad (51.5)$$

مثال ۱۰.۵. سرعت زاویه‌ای زمین را در حرکت وضعی آن به دور محورش به دست آورید.
حل: ابتدا اگر توجه نشود، ممکن است دانشجو معادله (۵۱.۵)، $\omega = 2\pi/P$ را به کار ببرد و به جای P مقدار 86400×10^4 s که مربوط به روز خورشیدی میانگین است قرار دهد و نتیجه نادرست به دست آورد. در شکل ۲۲.۵ نقطه P را در نظر می‌گیریم (در این شکل برای وضوح بیشتر، مقیاس مراعات نشده است). هنگامی که زمین یک بار به طور کامل دور محور خودش چرخید، که روز نجومی^۱ نام دارد، به سبب حرکت انتقالی زمین دور خورشید از نقطه E به نقطه E' منتقل می‌شود و در P' قرار می‌گیرد. برای اینکه یک روز کامل بگذرد باید نقطه P' در جای P'' یعنی از نو در مقابل خورشید قرار گیرد. به گفته دیگر، زمین هنوز باید به اندازه زاویه γ بچرخد. بنابراین دوره حرکت وضعی زمین (روز نجومی) مختصری کمتر از 86400×10^4 s است. این مقدار با اندازه‌گیری،

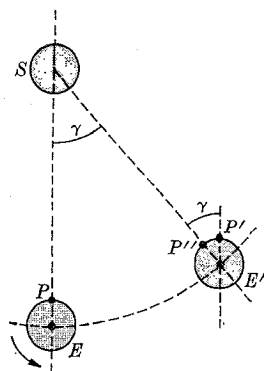
$$P = 86164 \times 10^4 \text{ s}$$

به دست می‌آید که تقریباً 240 s کوتاه‌تر از روز خورشیدی میانگین است. در این صورت سرعت زاویه‌ای برابر می‌شود با

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}.$$

این اختلاف 240 s را می‌توان به‌شیوه نسبتاً آسانی برآورد کرد. زمین در 365 روز مدار کامل خود دور خورشید را به پایان می‌برد. بنا به رابطه γ در یک روز مختصری کمتر از 1° یعنی 0.9856 رادیان می‌باشد. بنا به رابطه (۵۰.۵)، زمان لازم برای چرخیدن این زاویه با سرعت زاویه‌ای داده شده در فوق، برابر می‌شود با

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{0.9856 \times 10^{-2} \text{ rad}}{7.292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}} = 239 \text{ s}$$



شکل ۲۲.۵. روز نجومی

که به بهترین نحو با نتیجه قبلی تطبیق می‌کند.

۱۰۰۵ حرکت دایره‌ای: شتاب زاویه‌ای

هنگامی که سرعت زاویه‌ای حرکت ذره‌ای با زمان تغییر کند، شتاب زاویه‌ای با بردار زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (52.5)$$

چون حرکت دایره‌ای در صفحه صورت می‌گیرد، راستای ω یکسان باقی می‌ماند و رابطه (52.5) را می‌توان برای بزرگی بردارها نیز به کار برد، یعنی

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (53.5)$$

هرگاه شتاب زاویه‌ای ثابت باشد (یعنی، هنگامی که حرکت دایره‌ای و با شتاب ثابت است)، با انتگرال‌گیری از معادله (53.5) داریم

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \alpha dt = \alpha(t - t_0)$$

یا

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \quad (54.5)$$

که در آن ω مقدار ω در لحظه t است. با قرار دادن معادله (54.5) در معادله (46.5) به دست می‌آید $d\theta/dt = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$ و با انتگرال‌گیری مجدد داریم

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt + \alpha \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

به طوری که

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad (55.5)$$

این رابطه، مکان زاویه‌ای ذره را در هر لحظه به دست می‌دهد.

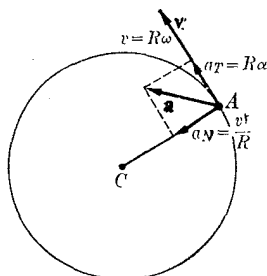
درحالت خاص حرکت دایره‌ای، از ترکیب معادله‌های (43.5) و (47.5) با معادله (53.5) شتاب مماسی (یا عرضی^۱) به دست می‌آید:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha \quad (56.5)$$

و شتاب قایم (یا مرکزگرا) برابر است با

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (57.5)$$

شکل ۲۳.۵، مؤلفه‌های قایم و مماسی را در یک حرکت دایره‌ای یکنواخت نشان می‌دهد.



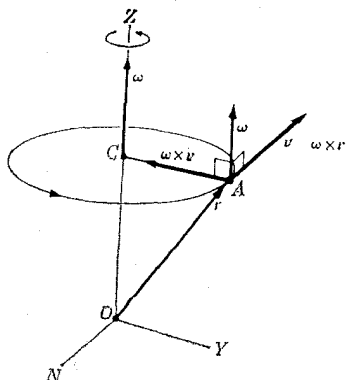
شکل ۲۳.۵. شتاب مماسی و شتاب قایم در یک حرکت دایره‌ای

باید توجه داشت که در یک حرکت دایره‌ای یکنواخت (بدون شتاب زاویه‌ای، $\alpha = 0$) شتاب مماسی وجود ندارد، ولی چون راستای سرعت تغییر می‌کند شتاب قایم یا مرکزگرا وجود دارد.

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، می‌توان با به کار بردن معادله (۴۸.۵) شتاب را مستقیماً حساب کرد. چون ω ثابت است بنابراین داریم

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (58.5)$$

زیرا $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ است. با استفاده مجدد از معادله (۴۸.۵)، می‌توان شتاب را به‌صورت دیگری نیز نوشت:



شکل ۲۴.۵

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (59.5)$$

چون حرکت دایره‌ای یکنواخت است، شتاب داده شده به وسیله معادله‌های (58.5) یا (59.5) باید شتاب مرکزگرا باشد. درستی این امر با آسانی قابل بررسی است. با توجه به شکل ۲۴.۵ مشاهده می‌شود که بردار $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ به سمت مرکز دایره است و بزرگی آن برابر است با $\omega^2 R = \omega v$ زیرا $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = \omega v$ و $\mathbf{v}$ بر هم عموداند و $v = \omega R$ است. این مقدار با نتیجه (57.5) که قبلاً به دست آوردیم تطبیق می‌کند.

مثال ۱۱.۵. زمین به طور یکنواخت با سرعت زاویه‌ای $\omega = 7.293 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ دور محور خود می‌گردد. سرعت و شتاب یک نقطه از سطح زمین را بر حسب عرض جغرافیایی آن نقطه به دست آورید.

حل: به سبب حرکت وضعی زمین، هر نقطه از سطح آن با یک حرکت دایره‌ای یکنواخت جایجا می‌شود. عرض جغرافیایی نقطه‌ای مانند A زاویه‌ای است که شعاع $r = CA$ با شعاع CD واقع در صفحه استوا می‌سازد (شکل ۲۵.۵). با گردش زمین دور NS ، نقطه A دایره‌ای به مرکز B و شعاع $R = AB$ طی می‌کند، به طوری که

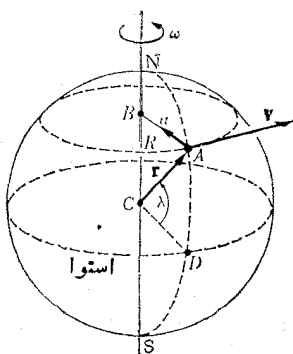
$$R = r \cos \lambda.$$

سرعت هر نقطه از سطح زمین مماس بر این دایره و در نتیجه موازی استوا است و بنا به معادله (۴۷.۵) بزرگی آن برابر است با

$$v = \omega R = \omega r \cos \lambda.$$

a یعنی شتاب مرکزگرا به سمت B است، زیرا حرکت یکنواخت است و بنا به معادله (57.5) بزرگی آن برابر است با

$$a = \omega^2 R = \omega^2 r \cos \lambda. \quad (60.5)$$



شکل ۲۵.۵. سرعت و شتاب یک نقطه از سطح زمین

با قرار دادن مقادیر سرعت زاویه‌ای ($\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) و شعاع زمین

$$(r = 6.35 \times 10^6 \text{ m}), \text{ داریم}$$

$$v = (459 \cos \lambda) \text{ ms}^{-1}$$

و

$$a = 3.34 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ ms}^{-2}. \quad (61.5)$$

در استوا مقدار v بیشینه است، یعنی $v = 459 \text{ ms}^{-1}$ یا 1625 km hr^{-1} یا تقریباً 1030 mi hr^{-1} می باشد. ما اثر چنین سرعت بزرگی را احساس نمی کنیم، زیرا همیشه با چنین سرعتی جا بجا می شویم: بدن ما همانند حواس ما به آن عادت کرده است. ولی بدیهی است اگر کوچکترین تغییری در آن رخ دهد متوجه خواهیم شد. همچنین، مقدار بیشینه شتاب برابر $3.34 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$ است و این مقدار حدود ۰.۳ درصد شتاب گرانی زمین است.

۱۱.۵ حرکت منحنی الخط در صفحه در حالت کلی

مطابق شکل ۲۶.۵، فرض کنیم ذره ای یک مسیر منحنی در صفحه می پیماید. هنگامی که ذره در نقطه A است، سرعت آن با رابطه $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ داده می شود. با به کار بردن برداریکای $\mathbf{u}_r$ (موازی $\mathbf{r}$) و $\mathbf{u}_\theta$ (عمود بر $\mathbf{r}$)، می توان نوشت $\mathbf{r} = u_r \mathbf{r}$ در این صورت

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(u_r \mathbf{r}) = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}. \quad (62.5)$$

اکنون اگر مؤلفه های دو برداریکای در مختصات قایم را به کار ببریم، به دست می آید

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x \cos \theta + \mathbf{u}_y \sin \theta \quad \text{و} \quad \mathbf{u}_\theta = -\mathbf{u}_x \sin \theta + \mathbf{u}_y \cos \theta.$$

مشاهده می شود که

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -\mathbf{u}_x \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{u}_y \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

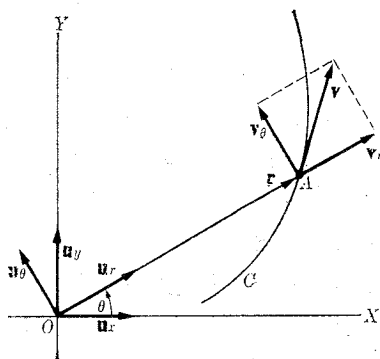
است. بنابراین سرعت ذره را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + \mathbf{u}_\theta r \frac{d\theta}{dt}. \quad (63.5)$$

اولین جمله این معادله $[\mathbf{u}_r (dr/dt)]$ برداری است موازی با $\mathbf{r}$ و سرعت شعاعی نامیده می شود و از تغییر فاصله ذره از نقطه O ناشی می شود. جمله دوم $[\mathbf{u}_\theta r (d\theta/dt)]$ برداری است عمود بر $\mathbf{r}$ و از تغییر راستای $\mathbf{r}$ یا چرخش ذره دور نقطه O ناشی می شود و آن را سرعت عرضی می نامند. بدین طریق داریم

$$v_r = \frac{dr}{dt} \text{ و } v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r. \quad (۴۴.۵)$$

در اینجا $\omega = d\theta/dt$ سرعت زاویه‌ای است. در حرکت دایره‌ای سرعت شعاعی وجود ندارد، زیرا شعاع ثابت است ($dr/dt = 0$)؛ سرعت منحصراً عرضی است. این نکته را می‌توان با مقایسه معادله (۴۵.۵) با رابطه دوم معادله‌های (۴۴.۵) روشن کرد.



شکل ۲۶.۵

فهرست منابع

1. «The Perception of Motion,» H. Wallach. *Sci. Am.*, July 1959, page 56
2. «Aristotle's Notion of Speed,» R. Seeger. *Am. J. Phys.* 31, 138 (1963)
3. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. New York: Van Nostrand, 1961, Sections 1-4 and 1-5, Chapters 2 and 3.
4. *Introduction to Engineering Mechanics*, John V. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapter 5, Sections 6-5 and 6-6.
5. *Vector Mechanics*, D.E. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapter 5.
6. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I. R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 5 and 8.
7. *Source Book in Physics*, W.F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 1 (Galileo); Page 50 (Descartes); Page 51 (Leibniz); Page 55 (d'Alembert).
8. *Foundations of Modern Physical Science*, Gerald Holton and D.H.D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapters 1-2, and 3.

۹. سایمون، کیث، ر. هکانیک، ترجمه اعظم نیرومند راد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۱-۲، ۳-۴، ۵ و ۳-۱۱.

مسئله‌ها

۱۰۵. الکترونی با سرعت $10^6 \text{ m s}^{-1} \times 3$ به صفحه تلوویزیون می‌رسد. به فرض اینکه الکترون از حالت سکون و از فاصله 0.04 m به حرکت درآمده باشد، شتاب میانگین آن را به دست آورید.

۲۰۵. جسمی با سرعت اولیه 3 m s^{-1} جابجا می‌شود و دارای شتاب ثابت 4 m s^{-2} در سو و راستای سرعت می‌باشد. سرعت جسم و مسافتی را که تا انتهای ثانیه هفتم می‌پیماید پیدا کنید. همین مسئله را برای حالتی که شتاب و سرعت در سوی مخالف هم باشند حل کنید. رابطه جابجایی را به صورت تابعی از زمان بنویسید.

۳۰۵. هواپیمایی برای بلند شدن از زمین، مسیر ۶۰۰ متری را در 15 s می‌پیماید. به فرض اینکه شتاب ثابت باشد، سرعت هواپیما را در هنگام بلند شدن حساب کنید. همچنین شتاب آن را بر حسب m s^{-2} به دست آورید.

۴۰۵. اتومبیلی در مدت 15 s از حالت سکون به سرعت 60 km hr^{-1} می‌رسد. (الف) شتاب میانگین اتومبیل را بر حسب m min^{-2} (متر بر مجذور دقیقه) و مسافت پیموده شده را پیدا کنید. (ب) به فرض ثابت بودن شتاب، چند ثانیه دیگر اتومبیل باید راه برود تا سرعت آن به 80 km hr^{-1} برسد؟ در این صورت کل مسافت پیموده شده چقدر است؟

۵۰۵. اتومبیلی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب 1 m s^{-2} به مدت یک ثانیه جابجا می‌شود. در این موقع راننده موتور را خاموش می‌کند و می‌گذارد سرعت اتومبیل به سبب وجود مالش، با شتاب در خلاف جهت حرکت 5 cm s^{-2} کندتر شود. سپس ترمز می‌کند و اتومبیل 5 s بعد از ترمز کردن می‌ایستد. مسافت کل پیموده شده توسط اتومبیل را حساب کنید. نمودار x ، v و a را بر حسب زمان رسم کنید.

۶۰۵. جسمی با حرکت مستقیم الخط شتابدار تند شونده، 55 cm را در 2 s و سپس 77 cm را در 2 s بعدی می‌پیماید. سرعت اولیه و شتاب جسم را حساب کنید. جسم در 4 ثانیه بعدی چه مسافتی را خواهد پیمود؟

۷۰۵. اتومبیلی در طول خط OX با شتاب ثابت حرکت می‌کند. در لحظه‌های t_1 و t_2 بترتیب در x_1 و x_2 می‌باشد. ثابت کنید که شتاب اتومبیل برابر است با

$$a = \frac{2(x_2 t_1 - x_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}$$

۸۰۵. اتومبیلی از حالت سکون با شتاب 4 m s^{-2} به مدت 4 s راه می‌رود، بعد به مدت 10 s به طور یکنواخت حرکت می‌کند. سپس راننده ترمز می‌کند و به اتومبیل شتابی برابر با 8 m s^{-2} در خلاف جهت حرکت تا هنگام ایستادن وارد می‌شود. نموداری از سرعت بر حسب زمان رسم کنید و ثابت کنید مساحت محدود بین منحنی و محور زمان برابر است با کل مسافت پیموده شده.

۹۰۵. اتومبیلی جلو چراغ قرمز ایستاده است. به محض سبز شدن چراغ، اتومبیل به مدت 6 s با شتاب 2 m s^{-2} سرعت می‌گیرد، بعد از آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند. هنگام شروع به حرکت اتومبیل با سبز شدن چراغ، کامیونی با سرعت یکنواخت 10 m s^{-1} از آن سبقت می‌گیرد. بعد از چه مدتی و پیمودن چه مسافتی این اتومبیل به کامیون می‌رسد؟

۱۰۰۵. راننده‌ای که اتومبیل خود را با سرعت 45 km hr^{-1} می‌راند، در چهارراهی، متوجه چراغ قرمز می‌شود. اگر زمان واکنش راننده 0.7 s و شتاب حاصل از ترمز

$\gamma m s^{-2}$ باشد، مسافتی را که اتومبیل از لحظه مشاهده چراغ به وسیله راننده تا هنگام ایستادن پیموده است حساب کنید. «زمان واکنش» فاصله زمانی بین لحظه مشاهده چراغ قرمز و اقدام به ترمز اتومبیل است.

۱۱.۵. دو اتومبیل، A و B ، بترتیب با سرعتهای v_B و v_A در یک سو حرکت می کنند. هنگامی که اتومبیل A به فاصله d در عقب اتومبیل B است، A با شتاب a ترمز می کند. ثابت کنید برای اینکه برخورد بین اتومبیلهای A و B صورت گیرد لازم است که $v_B - v_A > \sqrt{2ad}$ باشد.

۱۲.۵. دو اتومبیل، A و B ، در یک سو حرکت می کنند. در لحظه $t = 0$ سرعت آنها بترتیب $1 m s^{-1}$ و $3 m s^{-1}$ و شتاب آنها بترتیب $2 m s^{-2}$ و $1 m s^{-2}$ است. اگر در لحظه $t = 0$ اتومبیل A ، $15 m$ جلوتر از اتومبیل B باشد، حساب کنید که این اتومبیلها چه زمانی پهلو به پهلو می خواهند بود.

۱۳.۵. جسمی مطابق با رابطه $x = 16t - 6t^2$ در طول یک خط مستقیم جابجا می شود؛ در این رابطه x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) جای جسم را در لحظه $t = 1 s$ پیدا کنید. (ب) این جسم چه موقع از مبدأ می گذرد؟ (ج) سرعت میانگین را در فاصله زمانی $0 < t < 2 s$ حساب کنید. (د) رابطه کلی سرعت میانگین را در فاصله زمانی $t_0 < t < t_0 + \Delta t$ پیدا کنید. (ه) سرعت لحظه ای را حساب کنید. (و) سرعت لحظه ای را در $t = 0$ پیدا کنید. (ز) کی و در کجاها جسم به حالت سکون درمی آید؟ (ح) رابطه کلی شتاب میانگین را در فاصله زمانی $t_0 < t < t_0 + \Delta t$ به دست آورید. (ط) رابطه کلی شتاب لحظه ای را پیدا کنید. (ی) چه زمانهایی شتاب لحظه ای برابر صفر می شود؟ (ک) در دستگاه مختصات یکسانی تغییرات x بر حسب t ، v بر حسب t و a بر حسب t را رسم کنید. (ل) چه موقع (واقعی) حرکت تندشونده و در چه موقع (واقعی) کندشونده است؟

۱۴.۵. جسمی طبق رابطه $v = t^3 + 4t^2 + 2$ در طول یک خط مستقیم حرکت می کند. اگر در هنگامی که $t = 2 s$ است، $x = 4 m$ باشد، مقدار x را در $t = 3 s$ پیدا کنید. شتاب را نیز حساب کنید.

۱۵.۵. شتاب جسمی که روی یک خط راست حرکت می کند با رابطه $a = 4 - t^2$ داده شده است، که در آن a بر حسب $m s^{-2}$ و t بر حسب s است، در صورتی که در $t = 3 s$ ،

$$x = 9 m \text{ و } v = 2 m s^{-1}$$

باشد، رابطه سرعت و جابجایی را به صورت تابعی از زمان بیابید.

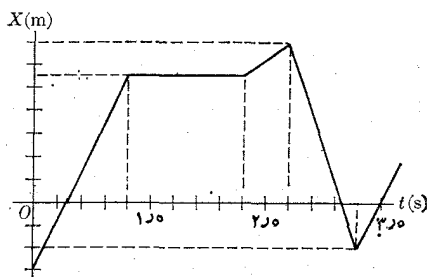
۱۶.۵. جسمی روی یک خط راست حرکت می کند. شتاب آن برابر است با $a = -2x$ ، که در آن x بر حسب متر و a بر حسب $m s^{-2}$ می باشد. در صورتی که در $x = 0$ ، $v = 4 m s^{-1}$ باشد، رابطه بین سرعت و جابجایی را پیدا کنید.

۱۷.۵. شتاب جسمی که روی یک خط راست حرکت می کند برابر است با $a = -Kv^2$ ، در این رابطه K یک ثابت است و نیز در $t = 0$ داریم $v = v_0$. سرعت و جابجایی را به صورت

توابعی از زمان پیدا کنید. همچنین x را بر حسب t و v را بر حسب x به دست آورید.

۱۸۰۵. سرعت جسمی را که با حرکت مستقیم الخط و شتاب $a = ۳۲ - ۴v$ (با شرط اولیه $x = ۰, t = ۰, v = ۴$) جابجا می شود به صورت تابعی از t پیدا کنید. همچنین x را به صورت تابعی از t و به صورت تابعی از v به دست آورید.

۱۹۰۵. مکان متحرکی بر حسب زمان در شکل ۲۷۰۵ نشان داده شده است. معلوم کنید (الف) حرکت در چه محلی در سوی x های مثبت یا منفی است؟ (ب) کی حرکت کند شونده یا تند شونده است؟ (ج) چه موقع جسم از مبدأ می گذرد، و (د) چه وقت سرعت برابر صفر است؟ همچنین نمودارهای سرعت و شتاب را بر حسب زمان رسم کنید. برای فاصله های زمانی (الف) $t = ۱s$ و $t = ۳s$ ، (ب) $t = ۱s$ و $t = ۲۲s$ و (ج) $t = ۱s$ و $t = ۱۸s$ ، سرعت میانگین را از روی نمودار بر آورد کنید.



شکل ۲۷۰۵

۲۰۰۵. از بالایی که با سرعت ثابت ۱۲ m s^{-1} در حال پایین آمدن است سنگی رها می شود. سرعت سنگ را بعد از $۱۰s$ پیدا کنید. در این مدت چه مسافتی را پیموده است؟ همین مسئله برای حالتی که بالن با همان سرعت بالا می رود حل کنید.

۲۱۰۵. سنگی با سرعت ۲۰ m s^{-1} به طور قائم به سوی بالا پرتاب می شود. چه موقع سرعت آن به ۶ m s^{-1} می رسد و ارتفاع این نقطه چقدر است؟

۲۲۰۵. سنگی از ته چاهی به ژرفای ۴۰ m با سرعت اولیه ۳۰ m s^{-1} به سمت بالا پرتاب می شود. چه مدت طول می کشد تا سنگ به لب چاه برسد و در این هنگام سرعت آن چقدر است؟ در پاسخهای ممکن بحث کنید.

۲۳۰۵. شخصی از بالای ساختمانی گلوله ای را با سرعت ۱۲ m s^{-1} در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می کند. گلوله $۴۲۵s$ بعد به زمین برمی گردد. ارتفاع بیشینه ای که گلوله به آن رسیده چقدر است؟ بلندی ساختمان چقدر است؟ گلوله با چه سرعتی به زمین می رسد؟

۲۴۰۵. جسم در حال سقوطی در ثانیة آخر حرکت خود ۷۵ m را طی می کند. به فرض اینکه جسم از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، تعیین کنید از چه ارتفاعی رها شده است. چه مدت طول کشیده تا به زمین برسد؟

۲۵۰۵. سنگی از پشت بام ساختمانی با سرعت ۲۹۴ m s^{-1} در راستای قائم به سوی بالا پرتاب می شود. $۴s$ بعد از پرتاب سنگ اول، سنگ دیگری رها می شود تا پایین بیفتد.

ثابت کنید که درست ۴s بعد، سنگ اول به سنگ دوم رسیده و از آن می‌گذرد.

۲۶.۵. در یک لحظه یک جسم را رها و جسم دیگری را با سرعت اولیه 100 cm s^{-1} به سمت پایین پرتاب می‌کنیم. کی فاصله این دو جسم به 18 m می‌رسد؟

۲۷.۵. دو جسم با سرعت یکسان 100 cm s^{-1} به فاصله زمانی ۴s در راستای قائم به سوی بالا پرتاب می‌شوند. چه مدت بعد از پرتاب جسم اول این دو جسم به هم می‌رسند؟

۲۸.۵. جسمی رها می‌شود تا به طور آزاد سقوط کند. ثابت کنید مسافتی که این جسم در ثانیه n ام می‌پیماید برابر است با $g[n - (1/2)]$.

۲۹.۵. سنگی از بالای ساختمانی رها می‌شود و بعد از 5 s صدای برخورد سنگ به زمین به گوش می‌رسد. اگر سرعت صوت 340 m s^{-1} باشد، ارتفاع ساختمان را حساب کنید.

۳۰.۵. سرعت زاویه‌ای دیسکی را که با حرکت یکنواخت در هر ۶ ثانیه 13.2 رادیان می‌چرخد حساب کنید. همچنین دوره و بسامد حرکت گردشی دیسک را پیدا کنید.

۳۱.۵. چه مدت زمان لازم است که دیسک مسئله قبل به اندازه (الف) 780° بچرخد؟ (ب) 12 دور بگردد؟

۳۲.۵. سرعت زاویه‌ای هریک از سه عقربه ساعت را حساب کنید.

۳۳.۵. سرعت زاویه‌ای، سرعت خطی و شتاب مرکزگرای ماه را حساب کنید. می‌دانیم که ماه در 28 روز یک بار گردش خود را کامل می‌کند و فاصله میانگین ماه از زمین $384 \times 10^4 \text{ km}$ است.

۳۴.۵. بزرگی سرعت و شتاب مرکزگرای زمین را در حرکت انتقالی آن دورخورشید پیدا کنید. شعاع مدار حرکت انتقالی زمین 10^{11} m و دوره گردش آن $365 \times 24 \times 3600 \text{ s}$ است.

۳۵.۵. بزرگی سرعت و شتاب مرکزگرای خورشید را در حرکت خود در کهکشان راه شیری پیدا کنید. شعاع مدار حرکت انتقالی خورشید 10^{17} m و دوره گردش آن $2.5 \times 10^8 \text{ s}$ است.

۳۶.۵. چرخ طیار به قطر 3 متر، در هر دقیقه 120 دور می‌گردد. (الف) بسامد، (ب) دوره (ج) سرعت زاویه‌ای، و (د) سرعت خطی یک نقطه از لبه چرخ را پیدا کنید.

۳۷.۵. سرعت زاویه‌ای چرخ طیار به طور یکنواخت در 5 ثانیه از 20 rad s^{-1} به 30 rad s^{-1} افزایش می‌یابد. شتاب زاویه‌ای و کل زاویه‌ای را که چرخیده است پیدا کنید.

۳۸.۵. سرعت زاویه‌ای چرخ طیار به شعاع 1.5 m به طور یکنواخت از 100 دور در دقیقه در لحظه $t = 0$ تا ایستادن در $t = 4 \text{ s}$ ، کاهش می‌یابد. شتاب قائم و مماسی یک نقطه از لبه چرخ را در لحظه $t = 2 \text{ s}$ حساب کنید.

۳۹.۵. روی الکترونی با سرعت 10^5 m s^{-1} یک میدان مغناطیسی اثر می‌کند و

و آن را وامی دارد که یک مسیر دایره‌ای به شعاع 30 m پیماید. شتاب مرکز گرای الکترون را پیدا کنید.

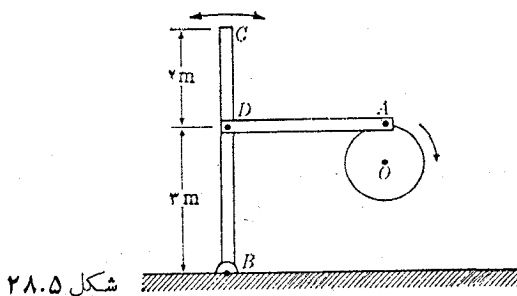
۴۰.۵. جسمی از حالت سکون (در $t = 0$ ، $\theta = 0$ و $\omega = 0$) روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع 1.3 m مطابق معادله $a = 120t^2 - 48t + 16$ شتاب می‌گیرد. مکان زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای جسم را به صورت توابعی از زمان، همچنین مؤلفه‌های قائم و مماسی شتاب جسم را پیدا کنید.

۴۱.۵. نقطه‌ای مطابق رابطه $s = t^3 + 2t^2$ روی یک دایره حرکت می‌کند. در این رابطه s بر روی دایره و بر حسب متر و t بر حسب ثانیه اندازه‌گیری می‌شود. اگر در لحظه $t = 2\text{ s}$ شتاب کل برابر $16\sqrt{2}\text{ m s}^{-2}$ باشد، شعاع دایره را حساب کنید.

۴۲.۵. ذره‌ای روی یک دایره مطابق قانون $\theta = 3t^2 + 2t$ چابجا می‌شود. در این رابطه θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه است. سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای این ذره را در پایان ثانیه چهارم به دست آورید.

۴۳.۵. چرخ بدون حرکتی به گونه‌ای شروع به حرکت می‌کند که سرعت زاویه‌ای آن با افزایش منظم در مدت 6 s به 200 دور در دقیقه می‌رسد. پس از آنکه چرخ مدتی با این سرعت به حرکت خود ادامه داد، آن را ترمز می‌کنند. 5 دقیقه طول می‌کشد تا چرخ از حرکت باز ایستد. اگر چرخ کلاً 3100 دور چرخیده باشد، زمان کل چرخش آن را حساب کنید.

۴۴.۵. در شکل 28.5 میله BC تحت تأثیر میله AD نوسان می‌کند. نقطه A روی لبه چرخنی به قطر 25 cm که با سرعت زاویه‌ای 60 دور در دقیقه و شتاب زاویه‌ای 6 rad s^{-2} می‌چرخد ثابت است. (الف) سرعت خطی نقطه D ، (ب) سرعت زاویه‌ای BC ، (ج) شتاب مماسی و قائم نقطه C ، (د) شتاب زاویه‌ای BC و (ه) شتاب مماسی در نقطه D را پیدا کنید.



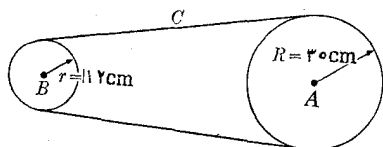
شکل ۲۸.۵

۴۵.۵. یک چرخ طیار به شعاع 1.2 m توسط نخ‌کی که دور لبه آن پیچیده شده و به سر دیگر نخ وزنه‌ای وصل شده است، دور یک محور افقی می‌چرخد. مسافت قائمی که وزنه جابجایی شود با معادله $x = 40t^2$ داده شده است؛ در این رابطه x بر حسب m و t بر حسب s می‌باشد. سرعت و شتاب زاویه‌ای چرخ طیار را بر حسب زمان حساب کنید.

۴۶.۵. مکان زاویه‌ای ذره‌ای که روی دایره‌ای به شعاع 1.5 m حرکت می‌کند، با رابطه

$\theta = 3t^2$ داده شده است؛ در این رابطه θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه است. شتاب مماسی و شتاب قایم و شتاب کل ذره را در لحظه $t = 0.5$ s حساب کنید.

۴۷.۵. قرقره A به شعاع 30 cm، از حالت سکون شروع به چرخیدن می‌کند و سرعت زاویه‌ای آن به طور یکنواخت با $4\pi \text{ rad s}^{-1}$ افزایش می‌یابد. این حرکت توسط تسمه C به قرقره B منتقل می‌شود (شکل ۲۹.۵). چه رابطه‌ای بین سرعت زاویه‌ای و شعاع قرقره برقرار است؟ چقدر طول می‌کشد تا سرعت زاویه‌ای قرقره B به 300 دور در دقیقه برسد؟



شکل ۲۹.۵

۴۸.۵. بالنی با سرعت 300 cm s^{-1} درست در راستای شمال حرکت می‌کند. به مدت 20 s نیرویی در راستای شرق که موجب شتاب 10 cm s^{-2} می‌گردد بر آن وارد می‌شود. بعد از حذف نیرو (الف) بزرگی و راستای سرعت نهایی، (ب) معادله مسیر، (ج) فاصله از نقطه شروع حرکت و (د) جابجایی از نقطه شروع را تعیین کنید.

۴۹.۵. ترنی با سرعت 72 km hr^{-1} در حال حرکت است. در این هنگام فانوس آویزان به ته ترن که از زمین 49 m فاصله دارد بر اثر لرزه‌های ناشی از حرکت ترن کنده می‌شود. مسافتی را که ترن تا رسیدن فانوس به زمین می‌پیماید حساب کنید. محل افتادن لامپ به زمین نسبت به ترن و ریلها چیست؟ مسیر آن نسبت به ترن و نسبت به ریلها چیست؟

۵۰.۵. اتومبیلی روی یک منحنی تخت حرکت می‌کند، به گونه‌ای که مختصات آن، بر حسب زمان، با رابطه‌های $x = 2t^3 - 3t^2$ ، $y = t^2 - 2t + 1$ داده می‌شود. به فرض اینکه t بر حسب ثانیه و مختصات اتومبیل بر حسب m باشد، (الف) مکان اتومبیل در لحظه $t = 1$ s، (ب) مؤلفه‌های سرعت در هر لحظه، (ج) مؤلفه‌های سرعت در لحظه $t = 1$ s، (د) سرعت در هر لحظه، (ه) سرعت در لحظه $t = 0$ ، (و) زمان (یا زمانهایی) که سرعت برابر صفر می‌شود (ز) مؤلفه‌های شتاب در هر لحظه، (ح) مؤلفه‌های شتاب در لحظه $t = 1$ s، (ط) شتاب در هر لحظه، (ی) شتاب در لحظه $t = 0$ ، (ک) لحظه (یا لحظاتی) که شتاب موازی محور Y ها است، را حساب کنید.

۵۱.۵. یک بازیکن بیس بال توپ را هنگامی که 1 m از زمین فاصله دارد، با سرعتی برابر با 16 m s^{-1} در راستایی که با سطح افق زاویه 30° می‌سازد پرتاب می‌کند. بازیکن دیگری در فاصله 30 m از بازیکن اول و در صفحه مسیر توپ قرار دارد؛ درست از لحظه پرتاب توپ شروع به دویدن می‌کند. حداقل سرعتی را که این بازیکن باید داشته باشد تا بتواند هنگامی که توپ در ارتفاع 2.5 m از سطح زمین است به آن برسد حساب کنید. بازیکن دوم چه مسافتی را باید بدود؟

۵۲.۵. مختصات ذره متحرکی با $x = t^2$ و $y = (t-1)^2$ داده شده است. سرعت میانگین و شتاب آن را در فاصله زمانی بین t و $t + \Delta t$ پیدا کنید. نتیجه را در حالتی که $t = 2s$ و $\Delta t = 1s$ است حساب کنید و آن را با مقادیر سرعت و شتاب در لحظه $t = 2s$ مقایسه کنید. نمودار تمام بردارهای وارد عمل را رسم کنید.

۵۳.۵. وضع ذره‌ای در لحظه t با رابطه $x = A \sin \omega t$ داده می‌شود. شتاب و سرعت آن را به صورت تابعی از t و x پیدا کنید.

۵۴.۵. نقطه‌ای با سرعت ثابت 1 m s^{-1} جابجا می‌شود. راستای سرعت با سوی مثبت OX زاویه $(\pi/2)t \text{ rad}$ می‌سازد. اگر هنگامی که $t = 0$ است $x = y = 0$ باشند، معادله مسیر ذره را پیدا کنید.

۵۵.۵. مختصات جسم متحرکی عبارتند از $x = t^2$ و $y = (t-1)^2$. (الف) معادله مسیر را دستگاه مختصات قایم پیدا کنید [دانه‌مایی: t را بین معادله‌های بالا حذف کنید]. (ب) نمودار مسیر را رسم کنید. (ج) چه زمانی سرعت حداقل می‌شود؟ (د) مختصات جسم را هنگامی که سرعت برابر 10 m s^{-1} است به دست آورید. (ه) شتاب مماسی و شتاب قایم را در هر لحظه حساب کنید. (و) شتاب مماسی و شتاب قایم را در لحظه $t = 1s$ حساب کنید.

۵۶.۵. ذره‌ای روی سهمی $y = x^2$ به گونه‌ای حرکت می‌کند که در هر لحظه $v_x = 3 \text{ m s}^{-1}$ است. بزرگی و راستای سرعت و شتاب ذره را در نقطه $x = 2/3 \text{ m}$ حساب کنید.

۵۷.۵. مختصات ذره متحرکی عبارتند از $x = 2 \sin \omega t$ و $y = 2 \cos \omega t$. (الف) معادله مسیر را در دستگاه مختصات قایم پیدا کنید. (ب) مقدار سرعت را در هر لحظه حساب کنید. (ج) مؤلفه‌های مماسی و قایم شتاب را در هر لحظه به دست آورید. نوع این حرکت را که با معادلات فوق بیان شده تعیین کنید.

۵۸.۵. اگر مختصات متحرکی برابر $x = at$ و $y = b \sin at$ باشند، ثابت کنید که مقدار شتاب متناسب است با فاصله جسم متحرک از محور X ها. نمودار مسیر را رسم کنید.

۵۹.۵. نقطه‌ای در صفحه XY به گونه‌ای حرکت می‌کند که $v_x = 4t^3$ و $v_y = 4t$ باشد. اگر متحرک در لحظه $t = 0$ در نقطه‌ای به مختصات $(1, 2)$ باشد، معادله مسیر را در دستگاه مختصات قایم پیدا کنید.

۶۰.۵. ذره‌ای در صفحه XY مطابق قانون $a_x = -4 \sin t$ و $a_y = 3 \cos t$ جابجا می‌شود. به فرض اینکه در لحظه $t = 0$ ، $x = 0$ ، $y = 3$ ، $v_x = 4$ ، $v_y = 0$ باشد، (الف) معادله مسیر و (ب) مقدار سرعت ذره در لحظه $\pi/4s$ را به دست آورید.

۶۱.۵. پرتابه‌ای با سرعت 600 m s^{-1} و تحت زاویه 60° با سطح افق پرتاب می‌شود. (الف) برد افقی، (ب) ارتفاع پیشینه (اوج)، (ج) سرعت و ارتفاع در لحظه $t = 30s$ را حساب کنید. (د) درچه لحظه و با چه سرعتی پرتابه از ارتفاع 10 km می‌گذرد؟

۶۲.۵. هواپیمای بمب افکنی در ارتفاع 12 km با سرعت 900 km hr^{-1} به طور افقی

پرواز می‌کند. (الف) چه زمانی قبل از رسیدن به بالای هدف، هواپیما باید بمب خود را رها کند؟ (ب) سرعت بمب هنگام رسیدن به زمین چقدر است؟ (ج) سرعت بمب 10 s بعد از رها شدن چقدر است؟ (د) سرعت بمب در ارتفاع 200 m چقدر است؟ (ه) بمب با چه زاویه‌ای به زمین می‌خورد؟ (و) مسافت افقی پیموده شده به وسیله بمب چقدر است؟

۶۳.۵. پرتابه‌ای با زاویه 35° شلیک می‌شود و در فاصله افقی 4 km از محل شلیک به زمین برخورد می‌کند. (الف) سرعت اولیه، (ب) طول مدت حرکت، (ج) ارتفاع بیشینه، و (د) سرعت پرتابه را در نقطه اوج حساب کنید.

۶۴.۵. مسلسلی که در بالای صخره‌ای به ارتفاع 120 m قرار دارد، گلوله‌هایش با سرعت 250 ms^{-1} و با زاویه 30° بالای سطح افق شلیک می‌کند. برد گلوله‌ها (فاصله افقی، از پای صخره) را حساب کنید. اگر اتومبیلی با سرعت 60 km hr^{-1} در یک جاده افقی به طرف صخره حرکت کند، باید در چه فاصله‌ای از صخره باشد تا گلوله‌ای که در آن لحظه شلیک می‌شود به آن اصابت کند؟ مسئله را در حالتی که شلیک گلوله‌ها به سمت زیر سطح افق باشد و نیز در حالتی که اتومبیل از صخره دور می‌شود حل کنید.

۶۵.۵. تفنگی در پای تپه‌ای به شیب φ قرار دارد. اگر تفنگ با زاویه α نسبت به سطح افق نشانه‌گیری کند و سرعت گلوله‌های آن v باشد، فاصله نقطه‌ای که گلوله‌ها روی تپه می‌افتند تا پای تپه را پیدا کنید.

۶۶.۵. هواپیمایی در ارتفاع h با سرعت v به‌طور افقی پرواز می‌کند. در لحظه‌ای که هواپیما در بالای یک توپ ضد هوایی قرار دارد روی هواپیما آتش گشوده می‌شود. حداقل v سرعت پرتابه و نیز α ، زاویه نشانه‌گیری را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که گلوله به هواپیما برخورد کند.

۶۷.۵. گلوله‌های مسلسلی با سرعت 240 m s^{-1} شلیک می‌شوند. اگر هدف در فاصله 150 m و ارتفاع 6 m قرار داشته باشد، زاویه‌های هدف‌گیری را تعیین کنید.

۶۸.۵. شعاع انحنای در بالاترین نقطه مسیر یک پرتابه که تحت زاویه α با سطح افق پرتاب می‌شود پیدا کنید.

۶۹.۵. یک شکارچی سنجابی را در بالای شاخه درختی هدف‌گیری می‌کند. در لحظه شلیک گلوله، سنجاب از شاخه می‌پرد. نشان دهید اگر سنجاب می‌خواست زنده بماند نبایستی می‌پرد.

۷۰.۵. هواپیمایی با سرعت 200 km hr^{-1} در ارتفاع 1 km به‌طور افقی پرواز می‌کند و به قصد انهدام ناوی که در همان سوی پرواز هواپیما با سرعت 20 km hr^{-1} حرکت می‌کند بمبی را رها می‌کند. ثابت کنید که بمب را باید هنگامی که فاصله افقی هواپیما از ناو 730 m است رها کند. همین مسئله را هنگامی که ناو در خلاف جهت هواپیما حرکت کند حل کنید.

۷۱.۵. ثابت کنید برای حرکت در یک صفحه با شتاب ثابت a ، رابطه‌های زیر برقرارند:

$$v^2 = v_0 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\gamma}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)t.$$

۷۲.۵. چرخشی به شعاع R با سرعت ثابت v_0 روی یک سطح افقی می‌غلتد. ثابت کنید که وضع یک نقطه از محیط چرخ با معادله‌های

$$x = R(\omega t - \sin \omega t) \quad \text{و} \quad y = R(1 - \cos \omega t)$$

داده می‌شود. در این رابطه $\omega = v_0/R$ سرعت زاویه‌ای چرخ است و t از موقعی محاسبه می‌شود که نقطه مذکور با زمین مماس باشد. مؤلفه‌های سرعت و شتاب نقطه را نیز حساب کنید.

۷۳.۵. چرخشی به شعاع R روی یک سطح افقی می‌غلتد. ثابت کنید که در هر لحظه سرعت هر نقطه از چرخ بر خط واصل این نقطه و نقطه تماس چرخ با صفحه عمود است. اگر ρ فاصله این دو نقطه باشد، نشان دهید که بزرگی سرعت نقطه برابر است با $\omega\rho$. نظر تان راجع به این نتیجه‌ها چیست؟

۷۴.۵. با به کار بردن روشی که در بخش ۱۱.۵ شرح داده شد، ثابت کنید

$$d\mathbf{u}_\theta/dt = -\mathbf{u}_r d\theta/dt.$$

۷۵.۵. ثابت کنید که مؤلفه‌های شتاب روی بردارهای یکای $\mathbf{u}_r$ ، $\mathbf{u}_\theta$ (شکل ۲۶.۵) عبارتند از

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

و

$$a_\theta = r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

[داهنمایی: از رابطه (۶۳.۵)، با توجه به مقادیر $d\mathbf{u}_r/dt$ و $d\mathbf{u}_\theta/dt$ استفاده کنید.]

۶

حرکت نسبی

مقدمه	۱.۶
سرعت نسبی	۲.۶
حرکت نسبی انتقالی یکنواخت	۳.۶
حرکت نسبی چرخشی یکنواخت	۴.۶
حرکت نسبت به زمین	۵.۶
تبدیل لورنتس	۶.۶
تبدیل سرعتها	۷.۶
نتایج تبدیل لورنتس	۸.۶

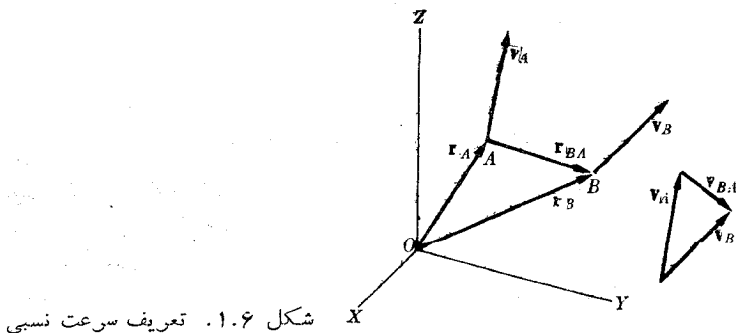
۱.۶ مقدمه

در فصل پیش اشاره کردیم که حرکت یک مفهوم نسبی است، بدین معنی که آن را باید همیشه نسبت به یک چارچوب مرجع، که به وسیله ناظر انتخاب می شود بیان کرد. از آنجا که ناظرهای مختلف می توانند چارچوبهای مرجع متفاوت برای خود انتخاب کنند، دانستن اینکه چگونه می توان مشاهدات ناظرهای مختلف را به هم پیوند داد از اهمیت ویژه ای برخوردار است. به عنوان مثال، بیشتر مشاهداتی که در روی زمین به عمل می آیند، در چارچوب مرجعی صورت می گیرند که به زمین متصل است و در نتیجه همراه زمین جابجا می شوند. اخترشناسان ترجیح می دهند مشاهدات خود از حرکت اجرام سماوی را نسبت به ستارگان ثابت^۱ انجام دهند. در فیزیک اتمی حرکت الکترونها نسبت به هسته تعیین می شود. معمولاً یک آزمایشگر چارچوب مرجع خود را به گونه ای برمیگزیند که در آن باسانی بتواند داده ها را جا دهد و بر راحتی به تجزیه و تحلیل آنها بپردازد.

امکان تعریف یک دستگاه مطلق^۲ مرجع که نسبت به فضای تهی^۳ ساکن باشد، مدت ها مورد بحث فیزیکدانان و فلاسفه بوده است. وقتی که فرض شد فضای تهی، از یک ماده انگاری به نام اتر^۴ (یا اثير) با ویژگیهای ضد و نقیض و غیرممکن «پر» شده است، دستگاه مطلق دستگاهی تعریف شد که نسبت به اتر در حال سکون باشد. لیکن به محض اینکه اندیشه ساختگی و غیر ضروری اتر به دور ریخته شد، دیگر تعریف دستگاه مطلق غیرممکن گردید، زیرا در فضای تهی چیزی یافت نمی شود که بتواند به عنوان نقطه مرجع به کار برود، و چنانکه در این فصل خواهد آمد، مسئله اتر بکلی ارزش خود را از دست داد.

۲.۶ سرعت نسبی

دو جسم A و B و ناظر O را که سه وجهی $OXYZ$ را به عنوان چارچوب مرجع برمیگزیند، در نظر می گیریم (شکل ۱.۶). سرعت A و B نسبت به O عبارتند از



1. fixed stars
2. absolute system
3. empty space
4. ether

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \mathbf{V}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} \quad (۱.۶)$$

سرعت B نسبت به A و سرعت A نسبت به B بترتیب چنین تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{V}_{BA} = \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} \quad \mathbf{V}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} \quad (۲.۶)$$

که در آن

$$\mathbf{r}_{BA} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (۳.۶)$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \overrightarrow{BA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B.$$

چون $\mathbf{r}_{AB} = -\mathbf{r}_{BA}$ است، به دست می‌آید

$$\mathbf{V}_{BA} = -\mathbf{V}_{AB} \quad (۴.۶)$$

به گفته دیگر، سرعت B نسبت به A برابر است با سرعت A نسبت به B با علامت مخالف. با مشتق‌گیری از معادله‌های (۳.۶) نسبت به زمان، به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}$$

و یا با به کار بردن معادله‌های (۱.۶) و (۲.۶) داریم

$$\mathbf{V}_{BA} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B \quad (۵.۶)$$

بنابراین برای پیدا کردن سرعت نسبی دو جسم، سرعت‌هایشان را نسبت به ناظر از یکدیگر کم می‌کنیم. از مشتق معادله (۵.۶) به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{V}_A}{dt}.$$

رابطه دیگری همانند با این رابطه برای $d\mathbf{V}_{AB}/dt$ به دست می‌آید. جمله اول این رابطه، شتاب B نسبت به A نام دارد و آن را با علامت $\mathbf{a}_{BA}$ نشان می‌دهند. دو جمله دیگر سمت راست بترتیب شتاب B و شتاب A نسبت به O هستند. بنابراین

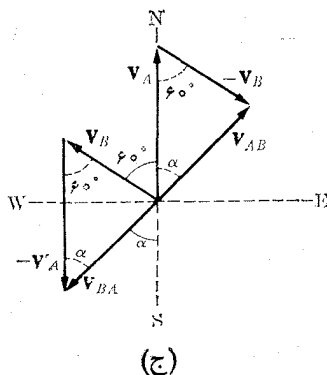
$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_{AB} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B. \quad (۶.۶)$$

مثال ۱.۶. هواپیمای A با سرعت 300 kmhr^{-1} نسبت به زمین به سمت شمال پرواز می‌کند (شکل ۲.۶). در همین لحظه، هواپیمای B با سرعت 200 kmhr^{-1} نسبت به زمین به سمت 60° درجه شمال غربی در حال پرواز است. سرعت A نسبت به B و سرعت B نسبت به A را پیدا کنید.

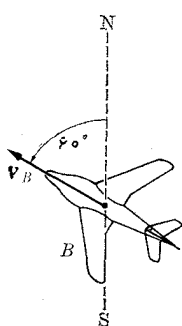
حل: در شکل ۲.۶ سرعت هواپیماهای A و B نسبت به زمین در سمت راست، و در سمت چپ سرعت هواپیمای A نسبت به B یعنی $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B$ ، و سرعت هواپیمای B نسبت به A یعنی $\mathbf{V}_{BA} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A$ نشان داده شده‌اند. همچنانکه معادله (۴.۶) پیش‌بینی می‌کند و از شکل پیدا است $\mathbf{V}_{AB} = -\mathbf{V}_{BA}$ می‌باشد.

برای محاسبه V_{AB} ، با توجه به اینکه θ یعنی زاویه بین V_B و V_A برابر 60° است، معادله (۶.۳) را به کار می‌بریم. در نتیجه

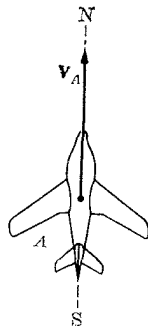
$$V_{AB} = \sqrt{300^2 + 200^2 - 2 \times 300 \times 200 \times \cos 60^\circ} = 264.6 \text{ kmhr}^{-1}$$



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۲.۶

برای به دست آوردن راستای V_{AB} ، از قانون سینوسها یا رابطه (۴.۳) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{V_B}{\sin \alpha} = \frac{V_{AB}}{\sin 60^\circ} \quad \text{یا} \quad \sin \alpha = \frac{V_B}{V_{AB}} \sin 60^\circ = 0.654$$

از اینجا $\alpha = 40.7^\circ$ به دست می‌آید. بنا براین، به نظر هر کدام از مسافری که هواپیمای B، هواپیمای A با سرعت 264.6 kmhr^{-1} در راستا و سوی 40.7° شمال شرقی جابجا می‌شود. سرعت نسبی V_{BA} همین اندازه، 264.6 kmhr^{-1} و در همین راستا ولی در سوی مخالف یعنی 40.7° جنوب غربی می‌باشد.

۳.۶ حرکت نسبی انتقالی یکنواخت

دو ناظر O و O' را که نسبت به هم دارای حرکت انتقالی یکنواخت می‌باشند در نظر می‌گیریم. این فرض بدین معنی است که ناظرهای O و O' نسبت به هم حرکت چرخشی ندارند. ناظر O شاهد جابجایی O' با سرعت v است، در صورتی که O' ناظر حرکت O با سرعت v می‌باشد. چیزی که برای ما جالب است، توجهی است که هر کدام از این دو ناظر از حرکت یک جسم دیگر دارند. به عنوان مثال، یک نفر در ایستگاه قطار ایستاده است و نفر دیگر در داخل قطاری که در خط مستقیم حرکت می‌کند قرار دارد و هر دو نفر، ناظر حرکت هواپیمایی هستند که بالای سر آنها پرواز می‌کند.

برای سهولت کار، محورهای OX و $O'X'$ را در امتداد خط حرکت نسبی دو ناظر (شکل ۳.۶) و محورهای $O'Y'$ و OY را به موازات OZ انتخاب می‌کنیم. چون دو ناظر نسبت به یکدیگر حرکت چرخشی ندارند، محورهای مختصات همیشه به موازات هم باقی می‌مانند. همچنین فرض می‌کنیم در لحظه $t = 0$ مبدأهای مختصات O و

O' ، برهم منطبق اند، به طوری که به فرض ثابت بودن $\mathbf{v}$ ، سرعت نسبی دو ناظر، می توان نوشت

$$\vec{OO'} = \mathbf{v}t$$

و

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v.$$

اکنون ذره ای را در نقطه A در نظر می گیریم. از شکل ۳.۶ پیداست که

$$\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A}.$$

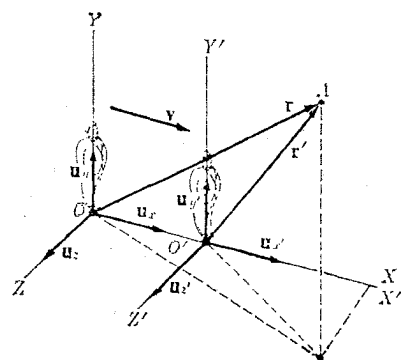
چون $\vec{OA} = \mathbf{r}$ ، $\vec{O'A} = \mathbf{r}'$ و $\vec{OO'} = \mathbf{v}t$ می باشند، بردارهای مکان A نسبت به O و O' با رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t. \quad (۷.۶)$$

این رابطه برداری را می توان روی سه محور مختصات تصویر کرد. باید توجه داشت که $\mathbf{v}$ موازی با محور OX است. بنابراین

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{و} \quad t' = t. \quad (۸.۶)$$

در اینجا $t' = t$ به سه مؤلفه فضایی افزوده شده است تا یادآوری شود که دو ناظر زمان یکسانی به کار می برند؛ به عبارت دیگر، سنجشهای زمان مستقل از حرکت ناظر فرض می شوند. این امر بسیار منطقی به نظر می رسد، ولی تنها یک فرضیه است، و ممکن است تجربه، نادرستی آن را ثابت کند. مجموعه دستگاه معادلات (۸.۶) یا رابطه برداری (۷.۶) به اضافه $t' = t$ ، تبدیل گالیلله^۱ نامیده می شود.



شکل ۳.۶. چارچوبهای مرجع در حرکت نسبی انتقالی یکنواخت

$\mathbf{v}$ ، سرعت A نسبت به O چنین تعریف می شود:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_x \frac{dx}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dy}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dz}{dt}$$

و V' ، سرعت A نسبت به O' برابر است با

$$\mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{u}_x \frac{dx'}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dy'}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dz'}{dt}.$$

توجه داشته باشید که نوشتیم $d\mathbf{r}'/dt'$ ، زیرا قبلاً t برابر t' فرض شده است؛ در نتیجه

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}.$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۷.۶) نسبت به زمان و با توجه به اینکه $\mathbf{v}$ ثابت است، داریم

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{v}. \quad (۹.۶)$$

با توجه به اینکه $V_x = dx/dt$ و $V'_x = dx'/dt$ است، می‌توان معادله (۹.۶) را بر حسب سه مؤلفه سرعت نوشت:

$$V'_{x'} = V_x - v, \quad V'_{y'} = V_y, \quad V'_{z'} = V_z. \quad (۱۰.۶)$$

این معادله‌ها را می‌توانستیم مستقیماً از مشتق معادله‌های (۸.۶) نسبت به زمان نیز به دست آوریم. از معادله‌های (۹.۶) یا (۱۰.۶) قاعده گالیلئ جهت مقایسه سرعت‌های یک جسم که توسط دوناظر با حرکت انتقالی نسبیه اندازه‌گیری شوند، به دست می‌آید. به عنوان مثال، اگر A به موازات محور OX جابجا شود، تنها داریم

$$V' = V - v \quad (۱۱.۶)$$

و سایر مؤلفه‌ها برابر صفر هستند. برعکس، اگر A به موازات محور OY حرکت کند، $V_y = V$ و $V_x = V_z = 0$ خواهد بود. در این صورت $V'_{y'} = V$ ، $V'_{x'} = -v$ و $V'_{z'} = 0$ است، به گونه‌ای که

$$V' = \sqrt{V^2 + v^2}. \quad (۱۲.۶)$$

شتابهای A نسبت به O و O' بترتیب عبارتند از $\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt$ و $\mathbf{a}' = d\mathbf{V}'/dt$. توجه کنید که باز هم در هر دو مورد t به کار بردیم. چون $\mathbf{v}$ ثابت و در نتیجه $d\mathbf{v}/dt = 0$ است، از معادله (۹.۶) به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} \quad \text{یا} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (۱۳.۶)$$

بنابراین در محورهاى مختصات قایم داریم

$$a'_{x'} = a_x, \quad a'_{y'} = a_y, \quad a'_{z'} = a_z. \quad (۱۴.۶)$$

به عبارت دیگر، دوناظر شتابهای یکسانی را اندازه می‌گیرند. یعنی شتاب يك ذره برای تمام ناظرهایی که نسبت به هم حرکت انتقالی یکنواخت دارند یکسان است. این نتیجه، نمونه‌ای از یک کمیت فیزیکی — شتاب ذره — را نشان می‌دهد که مستقل از حرکت ناظر به.

نظر می‌رسد؛ به عبارت دیگر، ما دریافتیم که درگذر از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر که نسبت به دستگاه اول حرکت انتقالی یکپوخت دارد، شتاب، ناوردا باقی می‌ماند. این اولین برخورد ما با یک کمیت فیزیکی است که پس از یک تبدیل، ناوردا باقی می‌ماند. بعداً با کمیت‌های فیزیکی دیگری برخورد خواهیم کرد که همین خاصیت را داشته باشند. این نتیجه، چنانکه بعداً می‌بینیم، در تنظیم قوانین فیزیک بسیار مؤثر است.

مثال ۲۰۶. در هوای آرام 25°C سرعت صوت برابر 358 m s^{-1} است. ناظری که با سرعت 90 km hr^{-1} حرکت می‌کند، در حالت‌های زیر برای صوت چه سرعت‌هایی اندازه‌گیری می‌کند؟ (الف) از چشمه صوت دور می‌شود؛ (ب) به چشمه نزدیک می‌شود؛ (ج) در راستای عمود بر انتشار صوت در هوا حرکت می‌کند؛ (د) در راستایی حرکت می‌کند که به نظر می‌رسد صوت عمود بر ناظر متحرک منتشر می‌شود. چشمه نسبت به زمین بی‌حرکت فرض می‌شود.

حل: دو چارچوب مرجع در نظر می‌گیریم، یکی XYZ که متصل به زمین (شکل ۴۰۶) و در نتیجه نسبت به هوا ساکن است، دیگری چارچوب $X'Y'Z'$ که همراه با ناظر حرکت می‌کند. محورهای $O'X'$ و $O'X$ را همانند شکل ۳۰۶ موازی با سرعت ناظر می‌گیریم. نسبت به XYZ چشمه صوت در نقطه O است، و سرعت ناظر O' برابر است با

$$v = 90\text{ km hr}^{-1} = 25\text{ m s}^{-1}$$

و سرعت صوت برابر $V = 358\text{ m s}^{-1}$ است. سرعت صوت نسبت به $X'Y'Z'$ ، به گونه‌ای که ناظر O' ثبت می‌کند برابر V' است. با استفاده از معادله (۹۰۶) یا (۱۰۰۶) برای حالت (الف) داریم $V' = V - v = 333\text{ m s}^{-1}$. در حالت (ب) O' در سوی منفی محور X ‌ها جابجا می‌شود. چون $v = -u_x$ است معادله (۱۱۰۶) تغییر می‌کند و به صورت $V' = V + v = 383\text{ m s}^{-1}$ درمی‌آید. در حالت (ج) معادله (۱۲۰۶) را به کار می‌بریم و بدین طریق به دست می‌آید $V' = \sqrt{V^2 + v^2} = 358.9\text{ m s}^{-1}$. برای ناظر در حال حرکت، به نظر می‌رسد صوت در راستایی منتشر می‌شود که با محور $O'X'$ زاویه α' می‌سازد، به طوری که

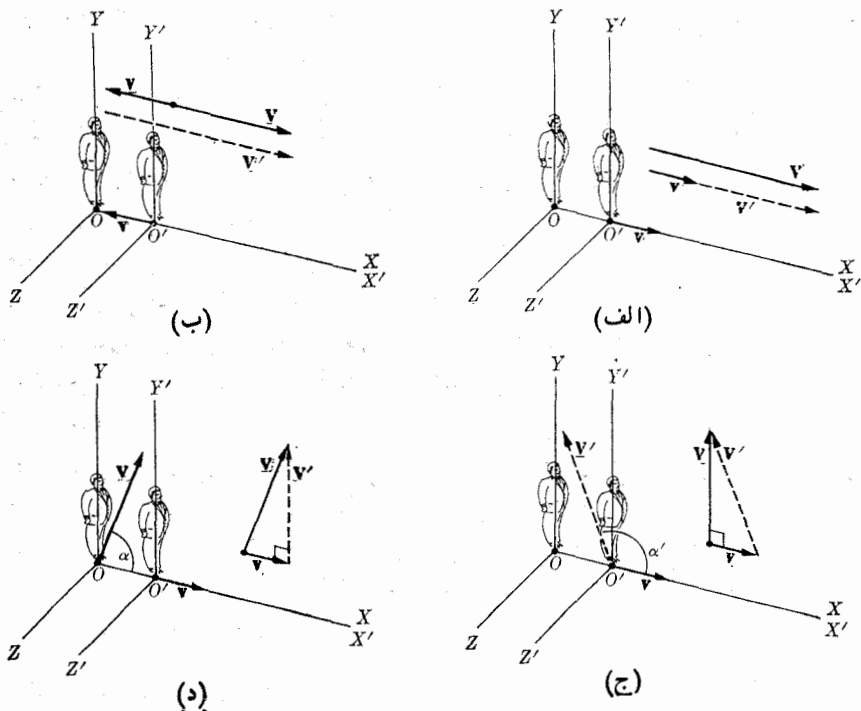
$$\text{tg}\alpha' = \frac{V'_{y'}}{V'_{x'}} = \frac{V}{-v} = -15.32 \quad \text{یا} \quad \alpha' = 93.7^{\circ}$$

بالاخره، در حالت (د) راستای انتشار صوت در هوا به گونه‌ای است که به نظر می‌رسد O' در راستای $O'Y'$ جابجا می‌شود. در این صورت $V'_{x'} = 0$ و $V'_{y'} = V'$ ، $V'_{z'} = 0$ و $V' = V$. در نتیجه با به کار بردن معادله (۱۰۰۶) به دست می‌آید $0 = V_x - v$ یا $v = V_x$ و

$$V' = V_y \quad \text{از اینجا} \quad V'^2 = V_x^2 + V_y^2 = V^2 + v^2 \quad \text{یا}$$

$$V' = \sqrt{V^2 - v^2} = 357.1\text{ m s}^{-1}$$

است. در این حالت، صوت در هوای آرام در راستایی منتشر می‌شود که با محور X ‌ها



شکل ۴.۶

زاویه α می‌سازد به طوری که داریم

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{V'_y}{v} = ۱۴۳۸۵ \quad \text{یا} \quad \alpha = ۸۶۰^\circ$$

۴.۶ حرکت نسبی چرخشی یکنواخت

ناظرهای O و O' را نسبت به هم در حرکت چرخشی و بدون انتقال فرض می‌کنیم. برای سهولت کار، O و O' را در یک ناحیه از فضا در نظر می‌گیریم. با اینکه هر کدام چارچوب مرجع وابسته به خود را به کار می‌برند، مبدأ مختصات برای هر دو یکی است. به عنوان مثال، ناظر O که چارچوب مرجع $OXYZ$ را به کار می‌برد (شکل ۵.۶)، مشاهده می‌کند که چارچوب $O'X'Y'Z'$ وابسته به O' با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. برای O' وضع درست برعکس است، او مشاهده می‌کند که $OXYZ$ با سرعت زاویه‌ای ω — می‌چرخد.

بردار مکان ذره A نسبت به $OXYZ$ برابر است با

$$\mathbf{r} = u_x x + u_y y + u_z z. \quad (۱۵.۶)$$

بنابراین سرعت A ، به گونه‌ای که ناظر O در چارچوب مرجع خود، $OXYZ$ ، اندازه

می‌گیرد، برابر است با

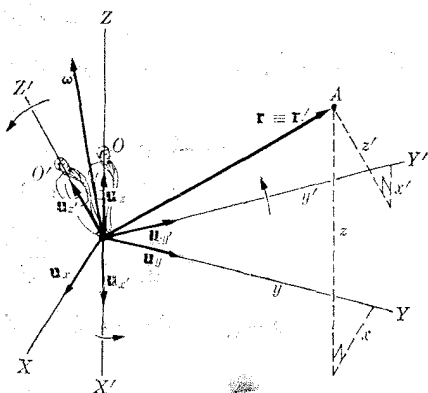
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_x \frac{dx}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dy}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dz}{dt}. \quad (۱۶.۶)$$

به همین ترتیب، بردار مکان A نسبت به $X'Y'Z'$ برابر است با

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_{x'} x' + \mathbf{u}_{y'} y' + \mathbf{u}_{z'} z'. \quad (۱۷.۶)$$

بردار مکان $\mathbf{r}$ در این رابطه با بردار مکان در رابطه (۱۵.۶) یکی است، زیرا دومبدأ برهم منطبق‌اند؛ به همین دلیل است که به جای $\mathbf{r}'$ همان $\mathbf{r}$ را نوشتیم. سرعت A آنچنانکه به وسیله O' نسبت به چارچوب مرجع خود، $O'X'Y'Z'$ ، اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با

$$\mathbf{v}' = \mathbf{u}_{x'} \frac{dx'}{dt} + \mathbf{u}_{y'} \frac{dy'}{dt} + \mathbf{u}_{z'} \frac{dz'}{dt}. \quad (۱۸.۶)$$



شکل ۵.۶. دو چارچوب مرجع در حال حرکت نسبی چرخشی یکدیگر

در مشتق‌گیری از معادله (۱۷.۶)، فرض شده است که چارچوب مرجع ناظر O' نمی‌چرخد و بدین مناسبت راستای بردارهای یکا ثابت در نظر گرفته شده است. با وجود این، ناظر O حق دارد بگوید برای او چارچوب $O'X'Y'Z'$ می‌چرخد و در نتیجه راستای بردارهای یکای $\mathbf{u}_{x'}$ ، $\mathbf{u}_{y'}$ و $\mathbf{u}_{z'}$ تغییر می‌کند و در محاسبه مشتق معادله (۱۷.۶) نسبت به زمان باید نوشت

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = & \mathbf{u}_{x'} \frac{dx'}{dt} + \mathbf{u}_{y'} \frac{dy'}{dt} + \mathbf{u}_{z'} \frac{dz'}{dt} \\ & + x' \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt}. \end{aligned} \quad (۱۹.۶)$$

از طرف دیگر، انتهای بردارهای $\mathbf{u}_{x'}$ ، $\mathbf{u}_{y'}$ و $\mathbf{u}_{z'}$ (بنا به فرض) نسبت به نقطه O حرکت دایره‌ای یکدیگر دارند، و با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخند. به گفته دیگر، $d\mathbf{u}_{x'}/dt$

سرعت نقطه‌ای به فاصله واحد از نقطه O است که با حرکت دایره‌ای یکنواخت و با سرعت زاویه‌ای ω جابجا می‌شود. با به کار بردن معادله (۴۸.۵) داریم

$$\frac{d\mathbf{u}_x'}{dt} = \omega \times \mathbf{u}_x', \quad \frac{d\mathbf{u}_y'}{dt} = \omega \times \mathbf{u}_y', \quad \frac{d\mathbf{u}_z'}{dt} = \omega \times \mathbf{u}_z'.$$

بنابراین، از معادله (۱۹.۶) می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_x'}{dt} x' + \frac{d\mathbf{u}_y'}{dt} y' + \frac{d\mathbf{u}_z'}{dt} z' &= \omega \times \mathbf{u}_x, x' + \omega \times \mathbf{u}_y, y' \\ &+ \omega \times \mathbf{u}_z, z' = \omega \times (\mathbf{u}_x, x' + \mathbf{u}_y, y' + \mathbf{u}_z, z') = \omega \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (20.6)$$

با دخالت دادن این نتیجه در معادله (۱۹.۶) و با استفاده از معادله‌های (۱۶.۶) و (۱۸.۶) بالاخره به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}. \quad (21.6)$$

این معادله رابطه بین سرعت‌های $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ ذره A را که توسط ناظرهای O و O' با حرکت نسبی چرخشی اندازه‌گیری می‌شوند به دست می‌دهد.

برای یافتن رابطه بین شتاب‌ها، با همان شیوه فوق عمل می‌کنیم. شتاب A آن گونه که به وسیله O نسبت به $WXYZ$ اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_x \frac{dV_x}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dV_y}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dV_z}{dt}. \quad (22.6)$$

شتاب A آن گونه که به وسیله O' نسبت به $O'X'Y'Z'$ اندازه‌گیری می‌شود، باز هم بدون در نظر گرفتن حرکت چرخشی، برابر است با

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{u}_x' \frac{dV'_x}{dt} + \mathbf{u}_y' \frac{dV'_y}{dt} + \mathbf{u}_z' \frac{dV'_z}{dt}. \quad (23.6)$$

هرگاه با توجه به اینکه ω ثابت است، از معادله (۲۱.۶) نسبت به زمان مشتق بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (24.6)$$

از طرف دیگر چون $\mathbf{v}' = \mathbf{u}_x, V'_x + \mathbf{u}_y, V'_y + \mathbf{u}_z, V'_z$ است، از مشتق آن به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \mathbf{u}_x' \frac{dV'_x}{dt} + \mathbf{u}_y' \frac{dV'_y}{dt} + \mathbf{u}_z' \frac{dV'_z}{dt} \\ &+ \frac{d\mathbf{u}_x'}{dt} V'_x + \frac{d\mathbf{u}_y'}{dt} V'_y + \frac{d\mathbf{u}_z'}{dt} V'_z. \end{aligned}$$

بنا به رابطه (۲۳.۶)، سه جمله اول نمایش $\mathbf{a}'$ و سه جمله آخر، با شیوه به کار رفته برای به دست آوردن معادله (۲۰.۶)، برابرند با $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$. برای به دست آوردن آن کافی است کمیت‌های مناسب را در معادله (۲۰.۶) قرار دهیم:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_x V'_x + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_y V'_y + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_z V'_z \\ = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u}_x V'_x + \mathbf{u}_y V'_y + \mathbf{u}_z V'_z) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \end{aligned}$$

بنابراین $d\mathbf{v}'/dt = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ است. از معادله‌های (۱۶.۶) و (۲۱.۶) نیز داریم $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ به‌طوری که

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

بالاخره با قرار دادن این نتایج در رابطه (۲۴.۶) به دست می‌آید

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (25.6)$$

این معادله رابطه بین شتاب‌های ذره A را که به وسیله ناظرهای O و O' با حرکت چرخشی یکنواخت نسبت به هم اندازه‌گیری می‌شوند به دست می‌دهد. جمله دوم، $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ، شتاب کوریولی^۱ نامیده می‌شود. جمله سوم مشابه رابطه (۵۹.۵) است و مربوط به شتاب مرکزگرا می‌باشد. شتاب کوریولی و شتاب مرکزگرا هر دو، نتیجه حرکت چرخشی نسبی دو ناظر نسبت به هم هستند. در بخش بعد، با یک مثال چگونگی کار بست این روابط را نشان می‌دهیم.

۵.۶ حرکت نسبت به زمین

مطالعه حرکت یک جسم نسبت به زمین، یکی ازکار بسته‌های بسیار جالب رابطه (۲۵.۶) است. چنانکه مثال ۱۰.۵ نشان می‌دهد، سرعت زاویه‌ای زمین برابر است با

$$\boldsymbol{\omega} = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

و راستای آن محور حرکت چرخشی (وضعی) زمین می‌باشد. نقطه‌ای مانند A را روی سطح زمین در نظر می‌گیریم (شکل ۶.۶). شتابگرانی اندازه‌گیری شده در نقطه A از دید ناظر بدون حرکت چرخشی را $\mathbf{g}$ می‌نامیم. در این صورت $\mathbf{g}$ متناظر $\mathbf{a}$ در رابطه (۲۵.۶) است. با حل معادله (۲۵.۶) بر حسب $\mathbf{a}'$ ، شتاب اندازه‌گیری شده به وسیله ناظری را که با زمین می‌چرخد به دست می‌آوریم:

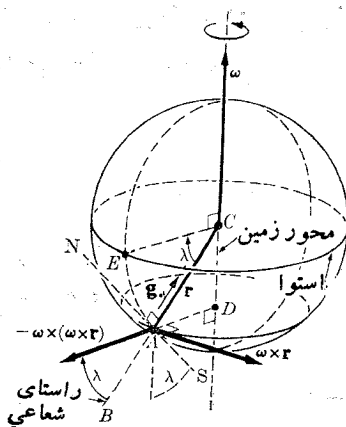
$$\mathbf{a}' = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (26.6)$$

نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که جسم ابتدا در حال سکون است، یا خیلی بکندی حرکت می‌کند، به طوری که جمله کوریولی، $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ، در مقایسه با جمله آخر، یعنی

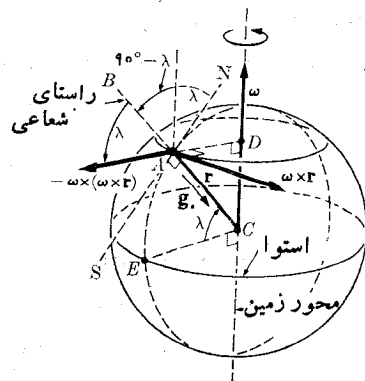
$\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ — صفر یا خیلی ناچیز است. شتابی که در این حالت اندازه‌گیری می‌شود شتاب مؤثرگرانی نامیده می‌شود و آن را با $\mathbf{g}$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \quad (27.6)$$

$\mathbf{g}$ شتابی است که به کمک آونگ اندازه می‌گیرند و در فصل ۱۲ مورد بحث قرار خواهیم داد. به فرض کروی بودن زمین (در واقع مختصری با کره متفاوت است) و عدم وجود ناهنجاریهای محلی، می‌توان $\mathbf{g}_0$ را در راستای شعاعی و به سمت مرکز زمین در نظر گرفت. به سبب وجود جمله دوم در معادله (۲۷.۶) راستای $\mathbf{g}$ که به نام قایم خوانده می‌شود، مختصری از راستای شعاعی انحراف دارد و آن را با امتداد خط شاقول تعیین می‌کنند. سطح آبگو نهایی در حال تعادل همیشه بر راستای $\mathbf{g}$ عمود است. با وجود این، برای مقاصد عملی و در غیاب هرگونه اختلال محلی، می‌توان راستای قایم را بر راستای شعاعی منطبق در نظر گرفت. اکنون جمله آخر معادله (۲۷.۶) یعنی $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ را به تفصیل بیشتری مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. این عبارت را شتاب گریز از مرکز می‌نامند، زیرا چنانکه شکل ۶.۶ نشان می‌دهد، به سبب وجود علامت منفی در جلو آن، سوی آن به سمت بیرون در راستای DA است. زاویه λ که $r = CA$ با استوا می‌سازد عرض جغرافیایی نام دارد. بنابراین بردار ω زاویه $(90^\circ - \lambda)$ در نیمکره شمالی و زاویه $(90^\circ + \lambda)$ در نیمکره



(ب) نیمکره جنوبی



(الف) نیمکره شمالی

شکل ۶.۶. شتاب گریز از مرکز ناشی از حرکت وضعی زمین

جنوبی با راستای CA می‌سازد. بزرگی $\omega \times \mathbf{r}$ برابر است با

$$|\omega \times \mathbf{r}| = \omega r \sin(90^\circ \pm \lambda) = \omega r \cos \lambda$$

و راستای $\omega \times \mathbf{r}$ که بر ω عمود است به موازات استوا می‌باشد. با بازگشت به مثال ۱۱.۵

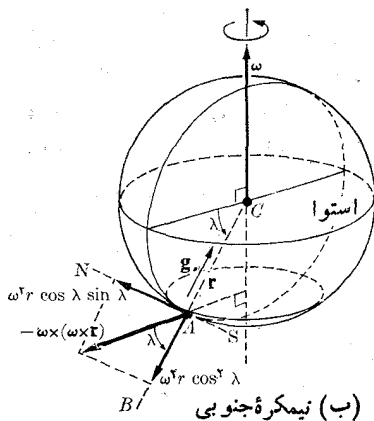
برای بزرگی شتاب گریز از مرکز، $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ ، به دست می آید

$$|\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| = \omega^2 r \cos \lambda = 3.34 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ ms}^{-2} \quad (28.6)$$

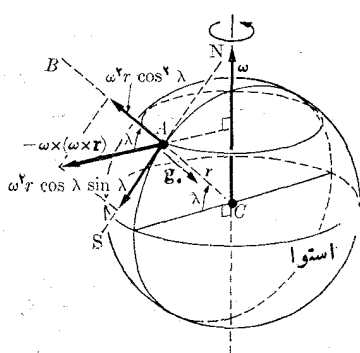
که در آن $r = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ شعاع زمین است. این شتاب از استوا تا قطب بتدریج کاهش می یابد، ولسی همیشه خیلی کوچکتر از شتاب گرانی $g_0 = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ است. اندازه آن در استوا بیشینه و در حدود ۳ درصد g_0 است (بسه مثال ۱۱.۵ مراجعه کنید).

اکنون مؤلفه های $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ را روی راستای شعاعی AB و خط شمال و جنوب (NS) در نقطه A پیدا می کنیم. روی شکل ۷.۶ همانند شکل ۶.۶ خط AB امتداد CA نمایش راستای شعاعی است: بدیهی است بردار ω با راستای NS زاویه λ می سازد. چنانکه قبلاً اشاره کردیم شتاب گرانی g_0 در راستای AB و سوی آن به سمت پایین است. شتاب گریز از مرکز $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ با AB زاویه λ می سازد و مؤلفه آن روی AB از ضرب مقدار حاصل از معادله (۲۸.۶) در $\cos \lambda$ به دست می آید که برابر است با

$$|\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| \cos \lambda = \omega^2 r \cos^2 \lambda.$$



(ب) نیمکره جنوبی



(الف) نیمکره شمالی

شکل ۷.۶. مؤلفه های شعاعی و افقی شتاب گریز از مرکز

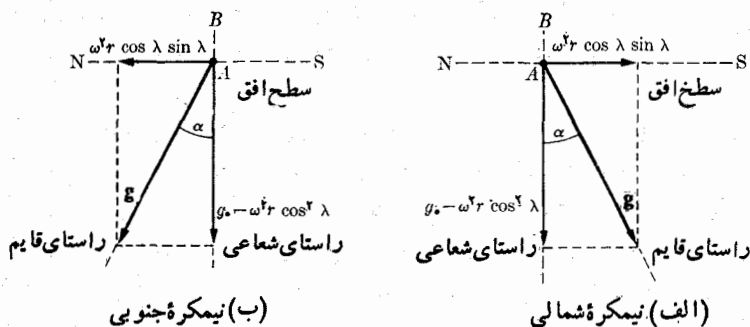
مؤلفه شتاب گریز از مرکز روی راستای NS در نیمکره شمالی به سوی جنوب (و در نیمکره جنوبی به سمت شمال) است و مقدار آن از ضرب شتاب گریز از مرکز در $\sin \lambda$ به دست می آید:

$$|\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| \sin \lambda = \omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda.$$

هر دو مؤلفه در شکل ۷.۶ نشان داده شده اند. بنا به تعریف g در معادله (۲۷.۶)، مؤلفه های g در راستای شعاعی و افقی مطابق شکل ۸.۶ می باشند. به دلیل کوچک بودن جماعه گریز از مرکز، زاویه α خیلی کوچک است و بزرگی g اختلاف محسوسی با مؤلفه آن روی راستای شعاعی AB ندارد. بنا براین با تقریب کافی می توان نوشت

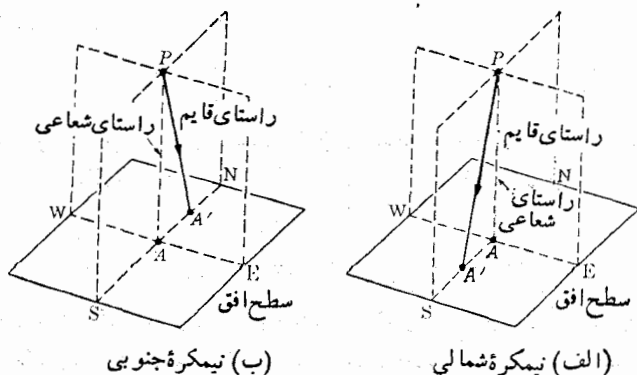
$$g = g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda. \quad (29.6)$$

گرچه جمله آخر خیلی کوچک است ولی افزایش شتاب گرانی را بر حسب عرض جغرافیایی توجیه می‌کند. این امر با مراجعه به جدول ۱.۶ آشکار می‌شود.



مؤلفه شتاب گریز از مرکز روی راستای NS، در نیمکره شمالی جسم را از راستای شعاعی AB مختصری به سمت جنوب و در نیمکره جنوبی به سمت شمال منحرف می‌کند. بنا براین، چنانکه از شکل ۹.۶ پیداست مسیر جسمی که می‌افتد از راستای شعاعی قدری انحراف دارد. مثلاً اگر جسم در غیاب حرکت چرخشی در نقطه A به زمین می‌رسید، به سبب حرکت وضعی زمین در نقطه A' به زمین می‌رسد. به سبب کوچک بودن مقدار زاویه α این انحراف ناچیز و قابل چشم‌پوشی است.

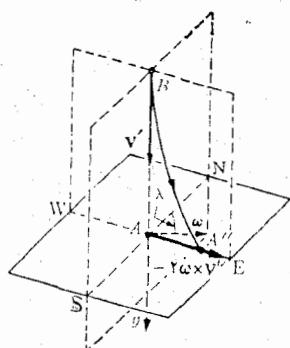
اکنون جمله کوریولی $2\omega \times V'$ را در نظر می‌گیریم. در حالت سقوط جسم، V' در راستای قایم AB و به سوی پایین می‌باشد (شکل ۱۰.۶) و بنابراین $\omega \times V'$ به سوی مغرب است. در نتیجه جمله کوریولی $2\omega \times V'$ به سمت مشرق خواهد بود. جسم



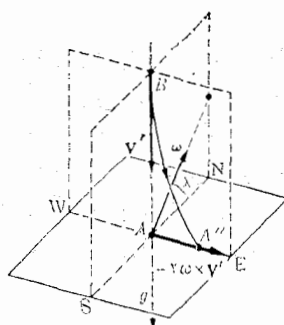
جدول ۱.۶. مقادیر شتاب گرانی، بر حسب ms^{-2}

محل	عرض جغرافیایی	شتاب گرانی
قطب شمال	$90^{\circ} 0'$	۹۸۳۲۱
انکوراژا	$61^{\circ} 10'$	۹۸۲۱۸
گرینویچ	$51^{\circ} 29'$	۹۸۱۱۹
پاریس	$48^{\circ} 50'$	۹۸۰۹۴
واشینگتن	$35^{\circ} 53'$	۹۸۰۱۱
تهران	$35^{\circ} 44'$	۹۷۷۹۴۱
کی وست ^۲	$24^{\circ} 34'$	۹۷۷۸۹۷
پاناما	$8^{\circ} 55'$	۹۷۷۸۲۲
استوا	$0^{\circ} 0'$	۹۷۷۷۹۹

در حال سقوط به سمت مشرق منحرف شده، در نقطه A'' ، مختصری در شرق A به زمین می‌رسد. با ترکیب اثر کوریولی و اثر شتاب گریز از مرکز، هر جسم سقوط کننده‌ای در نیمکره شمالی در جنوب شرقی A و در نیمکره جنوبی در شمال شرقی آن به زمین می‌رسد. این اثر که غالباً قابل چشم پوشی است باید در بمباران‌هایی که از ارتفاع خیلی زیاد صورت می‌گیرد، و در مورد موشک‌های پرتابی قاره پیمای مورد توجه قرار گیرد. به سبب سرعت



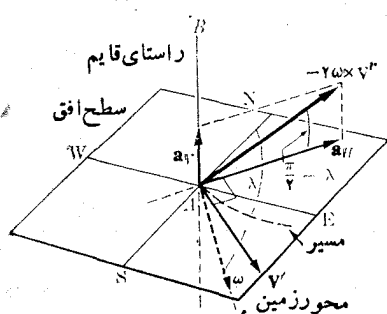
(ب) نیمکره جنوبی



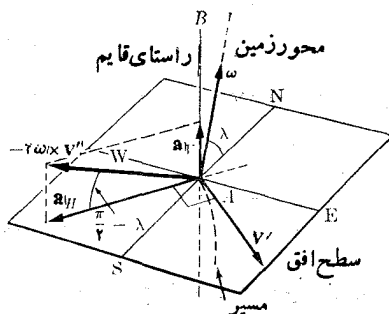
(الف) نیمکره شمالی

شکل ۱.۶. انحراف یک جسم سقوط کننده در نیمکره شمالی (یا جنوبی) به سمت شرق، بر اثر شتاب کوریولی

خیلی زیاد موشکها و ماهواره‌ها، شتاب کوریولی اثر قابل توجهی روی مسیر آنها دارد. در مورد جسمی که به طور افقی جابجا می‌شود، بردار $\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ که بر $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{v}'$ عمود است با سطح افقی زاویه $\lambda - \pi/2$ می‌سازد و دارای مؤلفه افقی $\mathbf{a}_H$ و مؤلفه قائم $\mathbf{a}_V$ است (شکل ۱۱.۶). به سبب وجود مؤلفه افقی $\mathbf{a}_H$ ، مسیر جسم دیگر خط مستقیم نیست بلکه در نیمکره شمالی به سمت راست و در نیمکره جنوبی به سمت چپ منحرف می‌شود. $\mathbf{a}_H$ از قطب به سمت استوا بتدریج کاهش پیدا می‌کند و در استوا برابر صفر است. بدین طریق شتاب کوریولی در استوا اثر افقی در حرکتهای افقی ندارد. اثر قائم شتاب کوریولی نیز نسبت به شتاب گرانی کوچک است و در بیشتر موارد می‌توان از آن چشم پوشید. اثر افقی را می‌توان در دو پدیده کاملاً شناخته شده دید. یکی چرخش باد به هنگام



ب) نیمکره جنوبی



الف) نیمکره شمالی

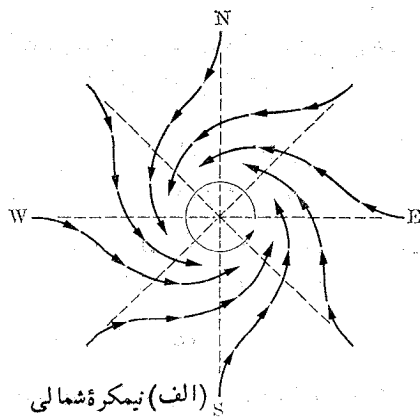
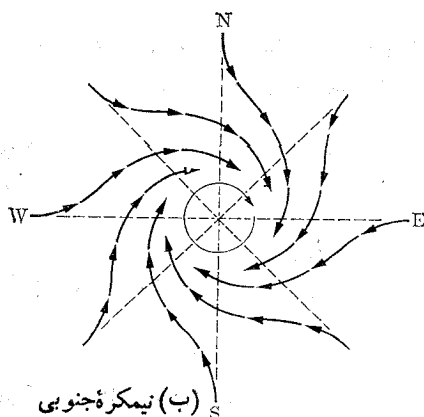
شکل ۱۱.۶. شتاب کوریولی. وقتی که جسم در نیمکره شمالی (جنوبی) افقی حرکت می‌کند، مؤلفه افقی شتاب کوریولی در راستای سمت راست (چپ) راستای حرکت است. در این حالت، $\mathbf{v}'$ در صفحه افقی و $\boldsymbol{\omega}$ در صفحه حاصل از AB و NS و $\mathbf{a}_H$ بر $\mathbf{v}'$ عمود است.

کولاک است: اگر یک مرکز کم فشار در جو گسترش پیدا کند، باد در راستای شعاعی به سمت این مرکز می‌وزد (شکل ۱۲.۶)، ولی شتاب کوریولی در نیمکره شمالی مولکولهای هوا را به سمت راست مسیرشان منحرف می‌کند، در نتیجه یک حرکت چرخشی در جهت پاد ساعتگرد به وجود می‌آید. فشار و دمای هوا نیز روی این حرکت تأثیر عمده دارد. این اثر به پدیده بسیار پیچیده‌ای منجر می‌شود که تشریح آن در اینجا چندان آسان نیست. نتیجه نهایی آن گرد باد است که شکل ۱۲.۶ (ج) نشان داده شده است. در نیمکره جنوبی چرخش باد در سوی ساعتگرد صورت می‌گیرد.

به عنوان مثال دوم، نوسانهای یک آونگ را در نظر می‌گیریم. برای نوسانهای کم-دامنه، مسیر حرکت آونگ را می‌توان افقی فرض کرد. اگر آونگ را در آغاز در راستای شرقی - غربی به نوسان درآوریم و آن را در نقطه A رها کنیم (شکل ۱۳.۶)، در غیاب حرکت وضعی زمین، آونگ به نوسانهای خود بین A و B ادامه می‌داد. ولی به سبب شتاب کوریولی ناشی از حرکت وضعی زمین، مسیر حرکت آونگ در نیمکره شمالی بتدریج به سمت راست و در نیمکره جنوبی به سمت چپ منحرف می‌شود. بنابراین در آخر نخستین

نوسان به جای آمدن به نقطه B ، به B' و در برگشت نیز به جای A ، به نقطه A' می‌رسد. در نتیجه در جریان نوسانهای کامل متوالی به نقاط A'' ، A''' و غیره می‌آید. به گفته دیگر صفحه نوسان آونگ در نیمکره شمالی در جهت ساعتگرد و در نیمکره جنوبی در جهت عکس می‌چرخد. به عهده دانشجو واگذار می‌کنیم تا تحقیق کند صفحه نوسان آونگ در هر ساعت به مقدار $\sin \lambda 15^\circ$ می‌چرخد. در شکل ۱۳.۶ این اثر به طور اغراق آمیزی رسم شده است. این چرخش در قطب بیشینه و در استوا برابر صفر است.

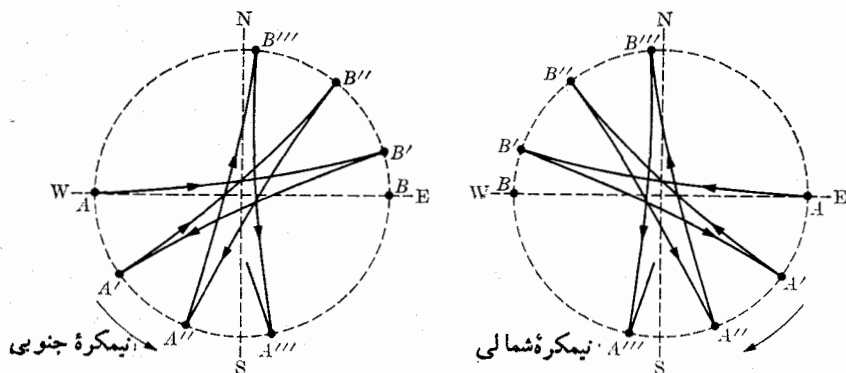
این اثر از طریق یک آزمایش بصری به وسیله وان لئون فوکو^۱، فیزیکدان فرانسوی نشان داده شد. وی در سال ۱۸۵۱ (۱۲۳۵ ه. ش.) آونگی به طول ۶۷ m از سقف گنبد انوالید^۲ در پاریس آویزان کرد. آونگ در هر نوسان شنی روی دایره‌ای می‌انداخت، بدین طریق با تجربه ثابت شد که صفحه نوسان آونگ در هر ساعت $15' 11^\circ$ می‌چرخد. از آن به بعد یک آونگ فوکو در تالار مؤسسه اسمیت ساین^۳، در واشینگتن و یکی هم در ساختمان سازمان ملل متحد در نیویورک قرار داده شده است. تجربه فوکو شاهد آشکاری



شکل ۱۲.۶. چرخش باد درسوی پاد ساعتگرد در نیمکره شمالی (برای نیمکره جنوبی، درسوی ساعتگرد) ناشی از ترکیب اثر یک مرکز فشار کم و شتاب کوریولی. مرکز فشار کم در عکس (ج) به وسیله ماهواره تیروس^۴ گرفته شده است. (عکس با اجازه ناسا، مرکز فضایی گودارد^۵.)

(ج)

بر حرکت وضعی زمین است. حتی اگر جو زمین همیشه پوشیده از ابر باشد، این تجربه پتیهایی کافی است که یک فیزیکدان بگوید زمین می چرخد.



شکل ۱۳.۶. چرخش صفحه نوسان یک آونگ بر اثر شتاب کوریولی. (چرخش در نیمکره جنوبی در جهت عکس چرخش در نیمکره شمالی است.)

مثال ۳.۶. برای یک جسم در حال افتادن انحراف ناشی از شتاب کوریولی را حساب کنید. این انحراف را با انحراف ناشی از شتاب گریز از مرکز مقایسه کنید.

حل: از روی شکل ۱۰.۶ می بینیم که V' سرعت جسم در حال سقوط با راستای ω زاویه $90^\circ + \lambda$ می سازد. بنابراین بزرگی شتاب کوریولی، $2\omega \times V'$ ، برابر است با

$$2\omega V' \sin(90^\circ + \lambda) = 2\omega V' \cos \lambda.$$

هرگاه راستای شرق را محور X ها در نظر بگیریم، این شتاب برابر d^2x/dt^2 است:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega V' \cos \lambda.$$

برای V' ، با تقریب خوب، همان مقدار به دست آمده در فصل ۵ در مورد سقوط آزاد را به کار می بریم، یعنی $V' = gt$ و $d^2x/dt^2 = 2\omega gt \cos \lambda$. با انتگرال گیری از این رابطه و به فرض ساکن بودن جسم در آغاز سقوط (به ازای $t = 0$ ، $dx/dt = 0$)، داریم

$$\frac{dx}{dt} = \omega g t^2 \cos \lambda.$$

با انتگرال گیری مجدد و با در نظر گرفتن اینکه در لحظه $t = 0$ جسم در راستای قائم A قرار دارد، یعنی $x = 0$ است، به دست می آید

$$x = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda.$$

این را بطه جابجایی یک جسم در حال سقوط به سمت شرق را بر حسب زمان سقوط نشان می‌دهد. اگر جسم از ارتفاع h رها شده باشد، می‌توانیم مقدار فوق را بر حسب مقدار سقوط آزاد، $h = gt^2/2$ ، بنویسیم، یعنی

$$x = \frac{1}{3} \omega \left(\frac{\lambda h^3}{g} \right)^{1/2} \cos \lambda = 1.53 \times 10^{-5} h^{3/2} \cos \lambda.$$

به عنوان مثال، هرگاه $h = 100 \text{ m}$ باشد، خواهیم داشت $x = 1.53 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ m}$ این مقدار در مقایسه با فاصله سقوط نسبتاً ناچیز است.

شتاب در راستای جنوب ناشی از جمله گریز از مرکز، برابر است با

$$\omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda = 3.34 \times 10^{-2} \sin \lambda \cos \lambda$$

و با به کار بردن $h = gt^2/2$ ، مقدار انحراف برابر می‌شود با

$$y = (\omega^2 r \cos \lambda \sin \lambda) t^2/2 = \omega^2 r (h/g) \cos \lambda \sin \lambda \\ = 0.342 h \cos \lambda \sin \lambda \text{ m}.$$

۶.۶ تبدیل لورنتس

در پایان قرن نوزدهم، وقتی که هنوز فرض می‌شد فضای تهی از ماده، پر از «اتر» است، گفتگوی دامنه‌داری راجع به حرکت اجسام در اتر و نحوه تأثیر این حرکت بر سرعت نوری که روی زمین اندازه‌گیری می‌شود جریان داشت. در آغاز فیزیکدانها فرض کرده بودند ارتعاش این اتر فرضی وابسته به نور است، چنانکه ارتعاش هوا وابسته به صوت می‌باشد. با فرض ساکن بودن اتر، درمی‌یابیم که نور با سرعت $c = 29979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ نسبت به اتر جابجا می‌شود. اگر زمین بدون آشفته ساختن اتر در داخل آن حرکت کند، سرعت نور نسبت به زمین بایستی به راستای انتشار نور بستگی داشته باشد. به عنوان مثال، هرگاه نور در راستا و سوی حرکت زمین انتشار پیدا کند سرعت آن $c - v$ ، و در خلاف جهت حرکت زمین سرعت آن باید برابر $c + v$ باشد. و نیز اگر انتشار نور در راستای عمود بر راستای حرکت زمین باشد، سرعت نور نسبت به زمین باید برابر $\sqrt{c^2 - v^2}$ باشد. [به مثال ۲.۶ (د) مربوط به صوت که مشابه این مورد است مراجعه کنید.]

در سال ۱۸۸۱ (۱۲۶۰ ه. ش.) مایکلسون^۱ و مورلی^۲، فیزیکدانهای آمریکایی که یک رشته آزمایشهای تاریخی را برای اندازه‌گیری سرعت نور نسبت به زمین در راستاهای مختلف آغاز کرده بودند، با کمال تعجب مشاهده کردند سرعت نور در تمام جهات یکسان است*،

1. Michelson 2. Morley

* برای بررسی انتقادی آزمایشهای انجام یافته به منظور اندازه‌گیری سرعت نور نسبت به زمین در راستاهای مختلف، رجوع کنید به

در صورتی که تبدیل گالیلنه نشان می‌دهد دو ناظری که نسبت به هم دارای حرکت یکنواخت هستند نمی‌توانند برای یک جسم سرعت یکسان اندازه بگیرند، و سرعت نسبی به‌راستای حرکت ناظر بستگی دارد. معادله‌های (۹.۶) و (۱۰.۶) مشخصاً براین امر تأکید دارند. یک توضیح ممکن دیگر این است که همچنانکه زمین در حرکت خود، جو را با خودش می‌برد، اتر را نیز همراه خود می‌کشد، بنا براین در مجاورت زمین اتر نسبت به زمین ساکن باقی می‌ماند. این توضیح کمتر مقرون به حقیقت است، زیرا حرکت اتر همراه زمین باید در سایر پدیده‌های مربوط به انتشار نور نیز ظاهر شود. چنین پدیده‌هایی هرگز مشاهده نشده‌اند. با توجه به همه این دلایل، فرض وجود اتر از طرف فیزیکدانان به‌کنار نهاده شد. معمای آزمایشهای مایکلسون و مورلی در سال ۱۹۰۵ (۱۲۸۴ ه. ش.) با بیان اصل نسبیت به وسیلهٔ اینشتین حل شد، که بعداً در بخش ۳۰.۱۱ به تفصیل مورد گفتگو قرار خواهد گرفت. بنا به این اصل

برای تمام ناظرهایی که نسبت به هم حرکت انتقالی یکنواخت دارند، کلیه قوانین طبیعت باید یکسان باشند (یعنی ناوردا باقی بمانند).

اینشتین فرض کرد که سرعت نور یک ناوردای فیزیکی^۱ است و برای کلیه ناظرها دارای مقدار یکسانی است. چنانکه خواهیم دید، این فرض در کاربرد اصل نسبیت در مورد قوانین الکترومغناطیس ضروری است. با این فرضیه، تبدیل گالیلنه، و بویژه چهارمین رابطهٔ معادله‌های (۸.۶)، $t = t'$ ، دیگر نمی‌تواند درست باشد. چون سرعت عبارت است از فاصله تقسیم بر زمان، اگر بخواهیم این خارج قسمت برای ناظرهایی که نسبت به هم در حرکت هستند ثابت بماند، چنانکه در مورد سرعت نور فرض شد، باید زمان و نیز فاصله را دستکاری کنیم. به عبارت دیگر، نباید فاصله زمانی بین دو رویداد برای ناظرهایی که نسبت به هم در حرکت هستند یکی باشد. در این صورت تبدیل دیگری را باید جانشین تبدیل گالیلنه کرد تا سرعت نور یک ناوردا شود. همانند تبدیل گالیلنه، فرض می‌کنیم ناظرهای O و O' با سرعت نسبی v و در راستای محورهای OX و $O'X'$ حرکت می‌کنند و محورهای OY و OZ بترتیب با محورهای $O'Y'$ و $O'Z'$ موازی هستند (شکل ۱۴.۶). همچنین می‌توان فرض کرد دو ناظر هنگامی که از یک نقطهٔ مشترک شروع به حرکت می‌کنند ساعت‌های خود را طوری تنظیم می‌کنند که $t = t' = 0$ باشد.

فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ از نقطهٔ مشترک آنها، یک جرقهٔ نورانی گسیل می‌شود. در رأس زمان t ناظر O مشاهده می‌کند که نور به نقطهٔ A می‌رسد و می‌نویسد $r = ct$ ، که در آن c سرعت نور است. چون

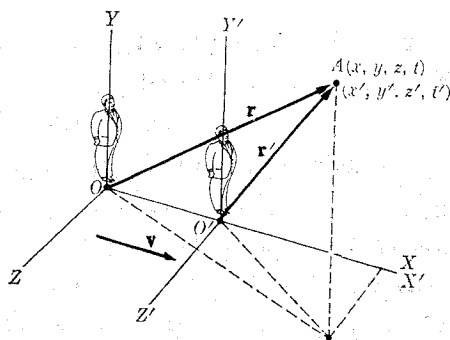
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

است، می‌توانیم بنویسیم

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (۳۰.۶)$$

همچنین ناظر O' مشاهده می‌کند که نور در زمان t' به همان نقطه A می‌رسد ولی سرعت نور همان c است. بنابراین می‌نویسد $r' = ct'$. در نتیجه

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (۳۱.۶)$$



شکل ۱۴.۶. چارچوبهای مرجع در یک حرکت نسبی انتقالی یکنواخت

اکنون باید تبدیلی پیدا کرد که معادله (۳۰.۶) را به معادله (۳۱.۶) مربوط کند. تقارن مسئله ایجاب می‌کند که $y' = y$ و $z' = z$ باشد. از طرف دیگر، چون برای ناظر O ، $OO' = vt$ است، باید برای $x' = 0$ (نقطه O')، $x = vt$ شود. این امر اجازه می‌دهد بنویسیم $x' = k(x - vt)$ که در آن k ثابتی است که باید تعیین شود. چون t' با t فرق دارد، همچنین باید فرض کرد $t' = a(t - bx)$ که در آن a و b ثابتهایی هستند که باید تعیین شوند (در تبدیل گالیله $k = a = 1$ و $b = 0$ است). با قرار دادن تمام این فرضها در معادله (۳۱.۶) خواهیم داشت

$$k^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2 a^2(t^2 - 2bxt + b^2x^2)$$

یا

$$(k^2 - a^2 b^2 c^2) x^2 - 2(k^2 v - b a^2 c^2) xt + y^2 + z^2 = \left(a^2 - \frac{k^2 v^2}{c^2}\right) c^2 t^2.$$

این نتیجه باید معادل رابطه (۳۰.۶) باشد. بنابراین

$$k^2 - a^2 b^2 c^2 = 1, \quad k^2 v - b a^2 c^2 = 0, \quad a^2 - k^2 v^2 / c^2 = 1$$

با حل این دستگاه معادلات سه مجهولی به دست می‌آید

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{و} \quad b = v/c^2. \quad (۳۲.۶)$$

در این صورت تبدیل جدید که مناسب با ناوردایی سرعت نور است، عبارت خواهد بود از

$$x' = k(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

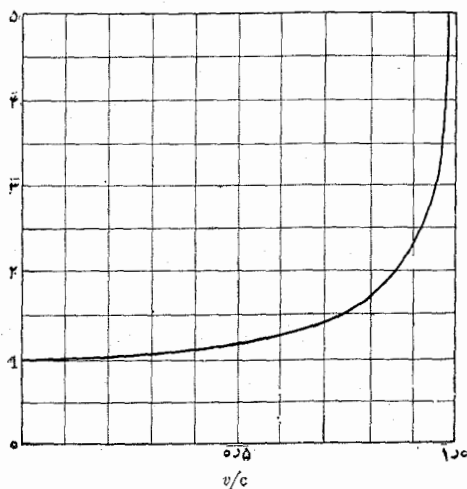
$$z' = z$$

(۳۳.۶)

$$t' = k(t - bx) = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

مجموعه این معادله‌ها تبدیل لورنتس^۱ نامیده می‌شود، زیرا نخستین بار هندریک لورنتس^۲، فیزیکدان هلندی در حدود سال ۱۸۹۵ (۱۲۶۹ ه. ش.) این روابط را هنگام مطالعه مسئله میدان الکترومغناطیسی یک ذره در حال حرکت به دست آورد.

اگر متوجه باشیم که c در مقایسه با اکثر سرعت‌هایی که روی زمین مشاهده می‌شوند خیلی بزرگ است در این صورت نسبت v/c خیلی کوچک و جمله‌های v^2/c^2 و vx/c^2 کلاً قابل اغماض و k عملاً برابر یک است (شکل ۱۵.۶ را ببینید). پس، از نقطه نظر عملی فرقی بین تبدیل لورنتس و گالیله وجود ندارد و ما می‌توانیم تبدیل گالیله را در اکثر مسائلی که برمی‌خوریم به کار ببریم. با وجود این، هنگام سروکار داشتن با ذرات خیلی سریع، مانند الکترون‌ها در اتم یا ذرات پرتوهای کیهانی، باید تبدیل لورنتس یا نسیتی را به کار برد. گرچه در بیشتر موارد نتایج عددی به دست آمده به وسیله تبدیل لورنتس با عددی حاصل از طریق تبدیل گالیله خیلی با هم فرق ندارند، ولی از دیدگاه نظری، تبدیل لورنتس تغییر عمده‌ای در دریافتهای ما، بویژه از آنچه که مربوط به فضا و زمان است، به وجود می‌آورد.



شکل ۱۵.۶. تغییر k بر حسب v/c

مثال ۴.۶. تبدیل لورنتسی را پیدا کنید که مختصات x, y, z و زمان t اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر O را بر حسب مختصات x', y', z' و زمان t' اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر O' بیان کند.

1. Lorentz transformation

2. Hendrik Lorentz

حل: این تبدیل لورنتس عکس تبدیل بیان شده به وسیله معادله‌های (۳۳.۶) است. بدیهی است معادله‌های دوم و سوم هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کنند. یک شیوه مستقیم برای بررسی رابطه اول و چهارم آن است که این دو رابطه را یک دستگاه دوجوهی در نظر بگیریم و با استفاده از روشهای معمول جبری، x و t را برحسب x' و t' حل کنیم. ما در اینجا این شیوه را کنار می‌گذاریم و از دانشجو می‌خواهیم که خود به صورت تمرین به حل آن اقدام کند. در عوض با یک استدلال فیزیکی تر با مسئله روبرو می‌شویم. از نظر ناظر O' ، ناظر O در راستای $X -$ با سرعت $v -$ به عقب برمی‌گردد. بنابراین ناظر O' حق دارد برای به دست آوردن مقادیر x و t ، اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر O ، برحسب x' و t' ، اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر O' ، همان تبدیل لورنتس را به کار گیرد؛ بدین منظور ناظر O' فقط باید در معادله‌های (۳۳.۶)، $v -$ را جانشین $v +$ کرده و جای x و t را با جای x' و t' عوض کند. بدین طریق به دست می‌آید

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (34.6)$$

این رابطه نمایش تبدیل معکوس لورنتس است.

۷۰۶ تبدیل سرعتها

اکنون قاعده مقایسه سرعتها را جستجو می‌کنیم. مؤلفه‌های سرعت A اندازه‌گیری شده به وسیله O ، از این قرارند

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} \\ V_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \quad (35.6)$$

همچنین مؤلفه‌های سرعت A ، اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر O' ، عبارتند از

$$V_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad V_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad V_{z'} = \frac{dz'}{dt'}.$$

توجه کنید که اکنون dt' را به کار می‌بریم نه dt را، زیرا دیگر t و t' یکی نیستند. از دیفرانسیل

معادله‌های (۳۳.۶) خواهیم داشت

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{V_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - vdx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 - vV_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt.$$

در اینجا از معادله‌های (۳۵.۶)، در معادله اول و چهارم به جای dx برابر آن $V_x dt$ را قرار داده‌ایم. بنابراین با تقسیم هر یک از معادله‌های اول تا سوم بر معادله چهارم به دست می‌آید

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2}$$

$$V'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{V_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2} \quad (36.6)$$

$$V'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{V_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}.$$

این مجموعه معادله‌ها، قانون تبدیل لورنتس برای سرعتها، یا به گفته دیگر، قانون مقایسه سرعتهای یک جسم است هنگامی که به وسیله دو ناظری که نسبت به هم حرکت انتقالی یکنواخت دارند، اندازه‌گیری شود. در مواردی که سرعت نسبی دو ناظر در مقایسه با سرعت نور خیلی کم باشد معادله‌های (۳۶.۶) به معادله‌های (۱۰.۶) تبدیل می‌شوند. برای ذراتی که در راستای محور X ‌ها جابجا می‌شوند داریم $V_x = V$ و $V_y = V_z = 0$. پس با توجه به اینکه $V'_x = V'$ است (زیرا سایر مؤلفه‌ها برابر صفرند)، معادله‌های (۳۶.۶) به صورت زیر در می‌آیند:

$$V' = \frac{V - v}{1 - vV/c^2}. \quad (37.6)$$

برای تحقیق اینکه معادله (۳۷.۶) با فرض یکسان بودن سرعت نور برای دو ناظر O و O' سازگار است، حالتی را در نظر می‌گیریم که یک علامت نوری در راستای محور X ‌ها انتشار می‌یابد. در این صورت در معادله (۳۷.۶)، $V = c$ می‌شود و

$$V' = \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = c.$$

بنابراین ناظر O' نیز برای نور همان سرعت c را اندازه‌گیری می‌کند. با حل معادله (۳۷.۶) بر حسب V ، به دست می‌آوریم

$$V = \frac{V' + v}{1 + vV'/c^2}. \quad (38.6)$$

رابطه (۳۸.۶) تبدیل معکوس معادله (۳۷.۶) می باشد. توجه داشته باشید که هرگاه V' و v هر دو کوچکتر از c باشند، V نیز کوچکتر از c است. به علاوه سرعت v نمی تواند بزرگتر از c باشد، زیرا در این صورت عبارت $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ موهومی می شود، و در حال حاضر چنین ضربی هیچگونه مفهوم فیزیکی ندارد. بنا بر این سرعت نور بیشینه سرعتی است که فعلاً می توان مشاهده کرد.

همچنین باید توجه داشت که معادله های (۳۷.۶) یا (۳۸.۶) سرعت های یک جسم را هنگامی که به وسیله دو ناظر متحرک نسبت به هم اندازه گیری می شوند، به یکدیگر مربوط می کند. ولی یک ناظر مشخص در چارچوب مرجع خود سرعت های مختلف را مطابق قواعدی که در فصل ۳ به دست آوریم ترکیب می کند.

مثال ۵.۶. تحقیق کنید که قانون تبدیل سرعت ها، معادله (۳۶.۶)، با این فرض که سرعت نور برای دو ناظر یکی است سازگار می باشد. بدین منظور پرتو نوری را در نظر بگیرید که (الف) در دستگاه XYZ در راستای محور Y ها منتشر می شود؛ (ب) در دستگاه $X'Y'Z'$ در راستای محور Y' ها منتشر می شود.

حل: (الف) در این حالت باید $V_x = 0$ ، $V_y = c$ و $V_z = 0$ باشد. بنا بر این معادله (۳۶.۶) را می توان به صورت

$$V_{x'} = -v, \quad V_{y'} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad V_{z'} = 0$$

نوشت در این صورت سرعت نسبت به $X'Y'Z'$ برابر است با

$$V' = \sqrt{V_{x'}^2 + V_{y'}^2} = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = c$$

و ناظر O' نیز برای سرعت نور c را به دست می آورد، چیزی که برای استنتاج تبدیل لورنتس الزامی بود. برای ناظر متحرک O' ، به نظر می رسد نور نسبت به چارچوب $X'Y'Z'$ در راستایی منتشر می شود که با محور X' ها زاویه ای مطابق رابطه زیر می سازد:

$$\tan \alpha' = \frac{V_{y'}}{V_{x'}} = -\frac{c}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

(ب) اکنون حالتی را در نظر می گیریم که در آن ناظر O' انتشار پرتو نور را در راستای محور Y' ها می بیند. در این صورت $V_{x'} = 0$ است و از دو معادله اول رابطه (۳۶.۶) به دست می آید

$$0 = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2} \quad V_{y'} = \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2}$$

از معادله اول به دست می آید $V_x = v$ ، که اگر آن را در معادله دوم ببریم داریم

$$V_{y'} = \frac{V_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

ولی برای ناظر O ، که سرعت نور را برابر c اندازه می‌گیرد خواهیم داشت

$$c = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{v^2 + V_y^2} \text{ یا } V_y = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

هرگاه این مقدار را در رابطه پیش مربوط به V_y قرار دهیم به دست می‌آید $V_y' = c$. یکبار دیگر تأیید می‌شود که ناظر O' برای سرعت نور c را به دست می‌آورد. راستایی که ناظر O پرتو نور را در امتداد آن می‌بیند با محور X ها زاویه α می‌سازد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{c}{v} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

می‌توان نتیجه‌های این مسئله را با نتایج مثال ۲.۶ که مربوط به صوت بود و در آن تبدیل گالیلئ به کار رفته است مقایسه کرد.

مثال ۶.۶. رابطه بین شتابهای یک ذره را که به وسیلهٔ دوناظر متحرک نسبت به هم اندازه گیری می‌شوند به دست آورید. جهت آسانی محاسبه فرض کنید در لحظه‌ای که مقایسه صورت می‌گیرد ذره نسبت به ناظر O' بیحرکت است.

حل: مؤلفه‌های شتاب ذره‌ای در راستای OX که به وسیلهٔ O' اندازه گیری می‌شود برابر است با

$$a_{x'} = \frac{dV_{x'}}{dt'} = \frac{dV_x}{dt} \frac{dt}{dt'}.$$

با به کار بردن مقدار V_x' که از رابطهٔ اول معادله‌های (۳۶.۶) به دست می‌آید و با دخالت دادن مشتقهای مناسب، داریم

$$\begin{aligned} a_{x'} &= \left[\frac{a_x}{1 - vV_x/c^2} + \frac{(V_x - v)va_x/c^2}{(1 - vV_x/c^2)^2} \right] \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2} \\ &= a_x \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vV_x/c^2)^3}. \end{aligned}$$

در لحظه‌ای که ذره نسبت به O' بیحرکت است داریم $V_x = v$ و

$$a_{x'} = \frac{a_x}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = k^3 a_x.$$

با یک محاسبهٔ مشابه پیدا می‌شود که

$$a_{y'} = \frac{a_y}{1 - v^2/c^2} = k^2 a_y, \quad a_{z'} = \frac{a_z}{1 - v^2/c^2} = k^2 a_z.$$

این نتیجه با نتیجه‌ای که از معادله (۱۴.۶) در مورد تبدیل گالیلئ به دست آمد متفاوت است، زیرا این بار شتاب برای دوناظری که نسبت به هم در حرکت انتقالی یکنواخت هستند یکسان نیست. به عبارت دیگر، شرط ناوردایی سرعت نور در تمام چارچوبهای مرجعی

که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند، ناوردایی شتاب را از بین می برد. دانستن رابطه بین بزرگی شتابهای مشاهده شده توسط O و O' بسیار حائز اهمیت است.

داریم

$$\begin{aligned} a'^2 &= a_x'^2 + a_y'^2 + a_z'^2 = \frac{a_x^2}{(1 - v^2/c^2)^3} + \frac{a_y^2}{(1 - v^2/c^2)^2} \\ &+ \frac{a_z^2}{(1 - v^2/c^2)^2} = \frac{a_x^2 + (a_y^2 + a_z^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^3} \\ &= \frac{a^2 - v^2(a_y^2 + a_z^2)/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}. \end{aligned}$$

چون $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x \mathbf{v}$ و $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = -\mathbf{u}_y v a_z + \mathbf{u}_z v a_y$ است، به دست می آید

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 = v^2(a_y^2 + a_z^2).$$

بنابراین

$$a'^2 = \frac{a^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}. \quad (39.6)$$

رابطه (39.6) همان رابطه مورد نظر ماست. هنگامی که شتاب موازی سرعت باشد،

$$a' = \frac{a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \quad \text{و} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$$

می شود. این نتیجه با اندازه های به دست آمده برای a_x و a_x' سازگار است. وقتی که سرعت بر شتاب عمود است، $(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 = a^2 v^2$ و $a' = a/(1 - v^2/c^2)$ می باشد. این نتیجه برای a_y و a_z ، a_y' و a_z' نیز معتبر است.

۸.۶ نتایج تبدیل لورنتس

ضریب $k = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ که در معادله های (33.6) ظاهر می شود نشان می دهد که طول اجسام و فاصله های زمانی بین رویدادهای مفروضی که به وسیله ناظرهای متحرک نسبت به هم اندازه گیری می شوند، ممکن است یکسان نباشد. اکنون درباره این دو نکته مهم به گفتگو می پردازیم.

(۱) انقباض طول. می توان طول یک شیء را با فاصله بین دو انتهای آن تعریف کرد. با وجود این، اگر شیء نسبت به ناظری که می خواهد طول آن را اندازه بگیرد جا بجا شود، جای دو انتها باید با هم یا همزمان یادداشت شود. میله ای را موازی $O'X'$ و ساکن نسبت به O' در نظر می گیریم. هرگاه دو انتهای میله را a و b بنامیم، طول اندازه گیری شده به وسیله ناظر O' برابر است با $x'_b - x'_a = L'$. همزمانی برای O' مهم نیست، زیرا او میله را ساکن می بیند. ولی ناظر O که میله را در حرکت می بیند باید طول x_b و x_a دو انتهای میله را، در

لحظه یکسان t اندازه بگیرد و $L = x_b - x_a$ را به دست آورد. با به کار بردن اولین رابطه معادله‌های (۳۳.۶) درمی‌یابیم

$$x'_a = \frac{x_a - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x'_b = \frac{x_b - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

توجه داشته باشید که در هر دو رابطه، t را یکسان به کار بردیم. اکنون این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم. به دست می‌آید

$$x'_b - x'_a = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{یا} \quad L = \sqrt{1 - v^2/c^2} L'. \quad (40.6)$$

نظر به اینکه ضریب $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ کوچکتر از واحد است، بنا بر این L کوچکتر از L' است، یعنی ناظر O که شیء را در حرکت می‌بیند، نسبت به ناظر O' که شیء نسبت به او ساکن است، طول کوتاهتری را برای میله اندازه می‌گیرد. به بیان دیگر، طول اشیاء در حال حرکت کوتاهتر به نظر می‌رسد؛ یا، $L < L'$.

(۲) اتساع زمان. می‌توان یک فاصله زمانی را با زمانی که طول می‌کشد تا دو رویداد به وسیله یک ناظر اندازه‌گیری شود تعریف کرد. یک رویداد پدیده کاملاً معینی است که در یک نقطه خاص از فضا و در یک لحظه معین از زمان رخ می‌دهد. مطابق این تعریف، هنگامی که آونگی در جریان یک نوسان خود به بالاترین نقطه می‌رسد یک رویداد است. این آونگ بعد از زمان معینی از نو به همان نقطه برمی‌گردد؛ و این رویداد دوم است. در این صورت، زمانی که بین این دو حادثه جریان پیدا کرده یک فاصله زمانی است. بنابراین، یک فاصله زمانی عبارت از زمانی است طول می‌کشد تا کاری صورت بگیرد، مانند نوسان کردن یک آونگ، چرخش یک الکترون دور هسته، فروپاشی یک ذره رادیواکتیو، تپش یک قلب و غیره.

دو رویداد را که در یک محل x' نسبت به ناظر O' رخ می‌دهند در نظر می‌گیریم. فاصله زمانی بین این دو رویداد برابر است با $T' = t'_b - t'_a$. برای ناظر O که نسبت به ناظر O' با سرعت ثابت v در راستای X ‌های مثبت در حال حرکت است فاصله زمانی برابر است با $T = t_b - t_a$. برای یافتن رابطه بین لحظه‌هایی که این دو حادثه رخ می‌دهند، آن چنانکه به وسیله دو ناظر ثبت می‌شوند، آخرین رابطه معادله‌های (۳۴.۶) را به کار می‌بریم. بدین طریق به دست می‌آید

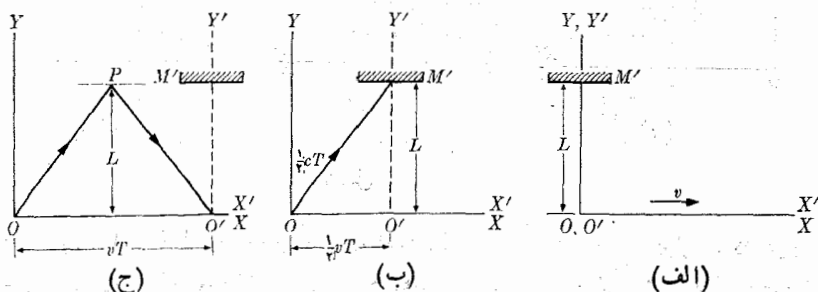
$$t_a = \frac{t'_a + vx'_a/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad t_b = \frac{t'_b + vx'_b/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

توجه داشته باشید که برای هر دو رابطه یک x' نوشته شده است. با کاستن t_a از t_b داریم

$$t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{یا} \quad T = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۴۱.۶)$$

T' نمایش فاصله زمانی است که به وسیله ناظر O' که نسبت به نقطه یا محل رویدادها ساکن است اندازه گیری می شود و T فاصله زمانی اندازه گیری شده به وسیله ناظر O است که نسبت به محلی که رویدادها در آن رخ داده در حال حرکت است. به گفته دیگر، ناظر O رویدادهای رخ داده را در دو نقطه مختلف فضا دیده است. چون سازه $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ از یک بزرگتر است، معادله (۴۱.۶) نشان می دهد که T بزرگتر از T' است. به نظر می رسد فرآیندهایی که در یک جسم رخ می دهند برای ناظری که جسم نسبت به او در حال حرکت است بیشتر طول می کشند تا برای ناظری که جسم نسبت به وی در حال سکون است؛ یا، ساکن $T > T'$ متحرک.

بسیار آموزنده است اتساع زمان و انقباض طول را بیشتر و به طور دقیقتر مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم، زیرا این نتایج درست برخلاف انتظار می باشند. اکنون با روش مستقیم تر نشان می دهیم که اتساع زمان و انقباض طول نتیجه مستقیم ناوردایی (ثابت بودن) سرعت نور اند. دو ناظر O و O' را در نظر می گیریم که در طول محور X ها با سرعت v نسبت به هم در حال حرکت هستند. در شکل ۱۶.۶ آینه M' نسبت به O ساکن و روی محور Y' ها به فاصله L از مبدا قرار دارد. این فاصله درست برابر فاصله ای است که O اندازه می گیرد، زیرا موقعیت آینه بر راستای حرکت عمود است. فرض کنیم در لحظه ای که O و O' بر هم منطبقند نوری از مبدأ مشترک به سمت آینه گسیل می شود. برای دستگاهی که آینه را در حال حرکت می بیند، علامت نورانی تحت زاویه ای فرستاده می شود که به سرعت حرکت آینه و فاصله L بستگی دارد. فرض کنیم T و T' زمانهای ثبت شده به وسیله O و O' برای علامت نوری است که پس از بازتاب از آینه به O' برمی گردد. در دستگاه O' نور به مبدأ باز می گردد، ولی در دستگاه O نور محور X ها را در فاصله vT از



شکل ۱۶.۶

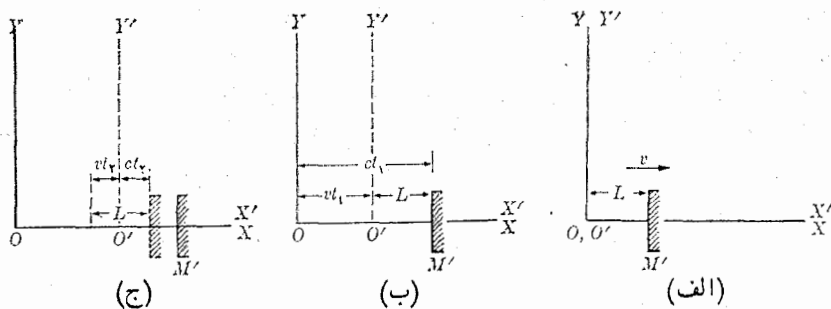
مبدأ قطع می کند. مسیر علامت نورانی نسبت به O' برابر $O'M'O' = 2L$ و زمان لازم برابر است با $2L/c$ زیرا $T' = 2L/c$ سرعت نور را c اندازه می گیرد. این فاصله

زمانی مربوط است به دو رویداد که هر دو در یک نقطه (O') نسبت به O' رخ می‌دهند. نسبت به ناظر O که او نیز سرعت نور را c اندازه می‌گیرد، مسیر علامت نورانی عبارت است از OPO' ، بنابراین برای O یک رابطه‌ی زمانی وجود دارد که بنا به شکل ۱۶.۶ (ب) چنین نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{1}{2}cT\right)^2 = \left(\frac{1}{2}vT\right)^2 + L^2 \quad \text{یا} \quad T = \frac{(2L/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

بنا بر این $T = T'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ است که همان رابطه‌ی (۴۱.۶) می‌باشد. توجه داشته باشید تنها شرطی که برای به دست آوردن اتساع زمان وجود داشت ناوردایی سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت است.

اکنون آینه M' را روی محور X' ها و عمود بر آن در نظر می‌گیریم. آینه در فاصله L' از O' قرار دارد و نسبت به آن ساکن فرض می‌شود. شکل ۱۷.۶ این وضع را نشان می‌دهد. از نوهنگامی که O و O' بر یکدیگر منطبق‌اند یک علامت نورانی به سمت آینه می‌تابانیم و زمانهای T و T' را که برای بازگشت نور به نقطه‌ی O' صرف می‌شود به دست می‌آوریم. برای O' که c را به عنوان سرعت نور اندازه می‌گیرد، فاصله‌ی زمانی برابر است با $T' = 2L'/c$. ممکن است فاصله‌ی $O'M'$ همان نباشد که O اندازه می‌گیرد، بنا بر این آن را با L نشان می‌دهیم. زمانی که نور برای رفتن از O تا آینه صرف می‌کند، از رابطه‌ی $ct_1 = L + vt_1$ یا $t_1 = L/(c - v)$ به دست می‌آید، زیرا M' فاصله‌ی vt_1 را پیموده است. پس از بازتاب، ناظر O زمان t_2 را برای رسیدن نور به O' اندازه می‌گیرد که



شکل ۱۷.۶

خود در این مدت فاصله‌ی vt_2 را پیموده است. [شکل ۱۷.۶ (ج) را ببینید]. در نتیجه $ct_2 = L - vt_2$ یا $t_2 = L/(c + v)$ خواهد بود. مجموع زمانی که O برای رسیدن نور به O' اندازه می‌گیرد برابر است با

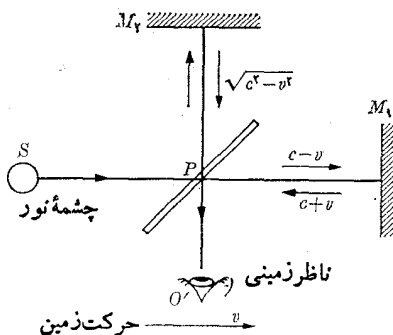
$$T = t_1 + t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}.$$

ولی در اینجا T و T' مربوط به دو رویداد هستند که در یک محل، نسبت به O' رخ می‌دهند و بنابراین طبق رابطه (۴۱.۶) به هم مربوط می‌شوند. در نتیجه

$$\frac{\gamma L/c}{1 - v^2/c^2} = \frac{\gamma L'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{یا} \quad L = \sqrt{1 - v^2/c^2} L'.$$

این معادله مشابه رابطه (۴۰.۶) است زیرا L' طولی است که نسبت به O' ساکن است. با این دو مثال خاص، مشاهده می‌شود که ناوردایی سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت اثر ویژه‌ای روی نتایج به دست آمده توسط ناظرهای متحرک نسبت به هم دارد.

مثال ۷.۶. تجزیه و تحلیل آزمایش مایکلسون - مودلی. در آغاز بخش ۶.۶ از آزمایش مایکلسون - مودلی نام بردیم. اکنون باختصار به شرح آن می‌پردازیم و نتایج آن را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. شکل ۱۸.۶ اساس آزمایش را نشان می‌دهد. S یک چشمه نور تک‌رنگ، M_1 و M_2 دو آینه و به فاصله یکسان L' (اندازه‌گیری شده به وسیله یک ناظر زمینی) از تیغه P قرار دارند. هنگامی که نور از S به P رسید، بخشی از آن عبور کرده به M_1 می‌رسد، و بخش دیگر بازتاب می‌کند و به M_2 می‌رسد. پرتوهای بازتابیده از روی آینه‌های M_1 و M_2 بالاخره به چشم ناظر O' می‌رسند. توجه داشته باشید که مسیر نور در شکل ۱۸.۶، در دستگاه $X'Y'Z'$ رسم شده است که با زمین جابجا می‌شود و دستگاه که قداخل سنج نامیده می‌شود، نسبت به آن ساکن است. (از دانشجو می‌خواهیم به عنوان تمرین، مسیر نور را برای ناظری که زمین نسبت به وی با سرعت v حرکت می‌کند رسم کند.) ابزاری که مایکلسون و مودلی عملاً به کار گرفتند در شکل ۱۹.۶ نشان داده شده است.

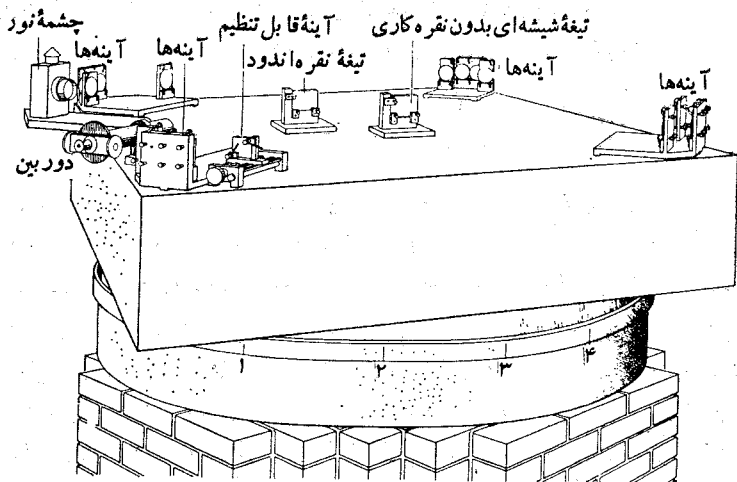


شکل ۱۸.۶. عناصر اصلی
آزمایش مایکلسون - مودلی

حرکت زمین v

حل: فرض کنیم c سرعت اندازه‌گیری شده نور به وسیله یک ناظر ساکن نسبت به اتر باشد و نیز سرعت زمین نسبت به اتر را v می‌نامیم و تداخل سنج را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که PM_1 به موازات راستای حرکت زمین باشد.

هرگاه تبدیل گالیله را به کار گیریم، به دنبال نتایج به دست آمده از مثال ۲.۶،



شکل ۱۹.۶. تداخل‌سنج به کار رفته به وسیله مایکلسون و مورلی برای اندازه‌گیری سرعت نور. یک میز حامل آینه‌ها روی یک قرص چوبی ثابت شده و قرص چوبی روی جیوه شناور است. مجموعه آینه‌ها به منظور افزودن به راه نوری کل به کار گرفته می‌شوند. تیغه بدون نقره در یکی از مسیرها قرار داده شده است تا یک راه نوری دیگر را که باید از شیشه آینه بگذرد جبران کند. دوربین برای دیدن فریز‌هاست (ترسیم با اجازه Scientific American)

درمی‌یابیم که نسبت به زمین، سرعت نور برای رفتن از P به M_1 برابر $v - c$ و برای رفتن از M_1 به P برابر $c + v$ و بالاخره برای رفتن از P به M_2 و یا بازگشت از M_2 به P برابر P است. بنابراین زمان لازم اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر زمینی O' ، برای رفتن نور از P به M_1 و برگشت از M_1 به P برابر است با

$$t'_{||} = \frac{L'}{c - v} + \frac{L'}{c + v} = \frac{2L'/c}{c^2 - v^2} = \frac{2L'/c}{1 - v^2/c^2}$$

در صورتی که زمان صرف شده برای رفتن نور از P به M_2 و برگشت آن، که به وسیله ناظر O' اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با

$$t'_{\perp} = \frac{2L'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

توجه دارید که $t'_{||}$ با $t'_{\perp}$ متفاوت است و از این رو پرتوهایی که به ناظر O' می‌رسند مقداری اختلاف راه دارند و (بنا به نظریه‌ای که در فصل ۲۲ توضیح داده شده است) باید این اختلاف راه نقش تداخلی^۲ معینی به وجود آورد. ولی همچنانکه قبلاً در

بخش ۶.۶ گفتیم، درکمال شگفتی، تداخل سنج هیچگونه نقشی از این نوع را نشان نمی‌دهد؛
و این دلالت می‌کند بر آنکه $t'_{\perp} = t'_{\parallel}$ است. برای حل این معما لورنتس، و مستقل از او،
فیتز جرالده فرض کردند که تمام اشیائی که در اثر جابجا می‌شوند، متحمل یک انقباض
«واقعی» طول در راستای حرکتشان می‌شوند، و این انقباض طول درست به اندازه‌ای
است که $t'_{\perp} = t'_{\parallel}$ شود. به عبارت دیگر، طولی که در $t'_{\parallel}$ ظاهر می‌شود با طولی که
که در $t'_{\perp}$ دخالت دارد برابر نیست، زیرا طول اولی در راستای حرکت زمین و طول دومی
برای راستای عمود است. با قرار دادن L به جای L' در رابطه $t'_{\parallel}$ باید داشته باشیم

$$t'_{\parallel} = \frac{\gamma L/c}{1 - v^2/c^2}$$

با مساوی قرار دادن $t'_{\perp}$ و $t'_{\parallel}$ و پس از ساده کردن به دست می‌آید

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2} L' \quad (۲۲.۶)$$

این رابطه طولهای PM_1 و PM_2 ، اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر O را که نسبت
به اتر ساکن است، به هم مربوط می‌کند. ناظر O' نباید این کاهش طول را مشاهده کند،
زیرا خط‌کشی که برای اندازه‌گیری PM_1 به کار می‌برد، در راستای حرکت زمین قرار
می‌گیرد و انقباض طولی به اندازه کاهش طول PM_1 پیدا می‌کند؛ بنا بر این برای اوطولهای
 PM_1 و PM_2 یکسان هستند. از طرف دیگر ناظر O ، به نگرانی ناظر O' خواهد خندید،
زیرا او O' را در حال حرکت می‌بیند، و بنا به فرضیه لورنتس - فیتز جرالده تمام اشیائی
که O' حمل می‌کند در راستای حرکت کوتاه می‌شوند. ناظر O نتیجه می‌گیرد که طول
«واقعی» PM_1 برابر L و طول PM_2 برابر L' است. این اختلاف «واقعی» طول، دلیل
نتیجه منفی آزمایش تداخل دو پرتو نورانی است.

بدیهی است، توضیح دیگر نتیجه منفی آزمایش مایکلسون - مورلی آن است که
فرض کنیم حالت حرکت ناظر هر چه باشد، سرعت نور در تمام راستاها یکسان است. در
این صورت ناظر O' ، c را برای تمام مسیرهای شکل ۱۸.۶ به کار می‌برد، در نتیجه به
دست می‌آید $t'_{\perp} - t'_{\parallel} = \gamma L'/c$. این بود وضعی که آلبرت اینشتین هنگام تنظیم اصل
نسبیت خود پذیرفته بود. با وجود این، در همین جا دانشجو می‌تواند بگوید انقباض
«واقعی» که لورنتس در توجیه نتیجه منفی آزمایش مایکلسون - مورلی پیشنهاد کرده
درست همان انقباضی است که ما در معادله (۲۰.۶) با به کار بردن تبدیل لورنتس و اصل
ناوردایی سرعت نور به دست آوردیم. با اینهمه، یک اختلاف اساسی بین این دو فرضیه

در آزمایش واقعی که به وسیله مایکلسون انجام شد، دو بازوی تداخل سنج، یا به گفته دقیقتر
طول دو راه نوری، اختلاف جزئی باهم داشتند، در نتیجه یک نقش تداخلی به وجود آمد. برای
جبران این اختلاف و افزایش دقت اندازه‌گیری، مایکلسون دستگاه را چرخاند (شکل
۱۹.۶)، و گرچه نظریه متکی بر تبدیل گالیله پیش‌بینی می‌کرد که بر اثر چرخش، در
نقش تداخلی جابجایی صورت بگیرد، هیچگونه جابجایی مشاهده نگردید.

پایه که برای به دست آوردن این دو نتیجهٔ بظاهر یکسان به کار رفته‌اند وجود دارد:

۱. انقباضی که از رابطهٔ (۴۲.۶) و با به کار بردن تبدیل گالیله به دست می‌آید یک انقباض واقعی فرض شده است که کلیهٔ اشیاء جا بجا شونده در اتر آن را متحمل می‌شوند، و v که در فرمول ظاهر می‌شود سرعت شیء نسبت به اتر است.
۲. انقباض (۴۰.۶) منحصرأً مربوط به مقدار اندازه‌گیری شدهٔ طول شیء در حال حرکت نسبت به ناظر است و از ناوردایی سرعت نور ناشی می‌شود. v ظاهر شده در فرمول، سرعت شیء نسبت به ناظر است، ولذا انقباض نسبت به ناظرهای مختلف فرق می‌کند. این نبوغ اینشتین بود که روشن کرد اندیشهٔ اتر مصنوعی و غیر ضروری است و توجیه منطقی همان است که در (۲) بیان شده است. چنانکه در فصل ۱۱ خواهد آمد، این همان فرض اساسی است که اینشتین در تنظیم اصل نسبیت آن را به کار گرفت.

فهرست منابع

1. «The Coriolis Effect,» J. Mc Donald, *Sci., Am.*, May 1952, page 72.
2. «The Speed of Light,» J. Rush, *Sci. Am.*, August 1955, page 62.
3. «The Clock Paradox,» J. Bronowski; *Sci. Am.*, February 1963, page 134.
4. «Conversations with Albert Einstein,» R. Shankland, *Am. J. Phys.* 31, 47 (1963).
5. «Michelson-Morley Experiment,» R. Shankland, *Am. J. Phys.* 32, page 16 (1964); *Sci. Am.*, November 1964, page 107.
6. «Measurement of the Relativistic Time Dilation Using μ - Mesons,» D. Frisch and J. Smith, *Am. J. Phys.* 31, 342 (1963).
7. «The Geometrical Appearance of Large Objects Moving at Relativistic Speeds,» G. D. Scott and M. R. Viner, *Am. J. Phys.* 33, 534 (1965).
8. «Visual Appearance of Rapidly Moving Objects,» V. Weisskopf, *Physics Today*, September 1960, page 24.
9. «Resource Letter SRL-1 on Special Relativity Theory,» G. Holton, *Am. J. Phys.* 30, 462 (1962).
10. *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, R. Katz. Princeton, N. J.: Momentum Books, D. Van Nostrand Co., 1964.
11. *The Special Theory of Relativity*, D. Bohm. New York: W. A. Benjamin, 1964.
12. *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, W. G. W. Rossen. London: Butterworth & Co., 1964, Chapters 1-4.
13. *Special Relativity Theory*, selected reprints from the *Am. J. Phys.*, published by the AIP (335 E. 45th St., New York 17, N. Y.), 1962.
14. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. New York: Van Nostrand, 1961, Sections 7-11 and 7-12.
15. *Vector Mechanics*, D. E. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapter 14.
16. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands. Reading, Mass: Addison - Wesley; 1963, Chapters 15, 18, and 20.

17. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 27 (Huygens); (Michelson and Morley).

۱۸. سایمون، کیث ر. مکانیک، ترجمه اعظم نیرومنداد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۷-۱ تا ۷-۴.

مسئله‌ها

۱۰۶. دو قطار A و B بترتیب با سرعتهای ۷۰ kmhr^{-1} و ۹۰ kmhr^{-1} روی دو ریل موازی حرکت می‌کنند. سرعت نسبی B را نسبت به A ، هنگامی که (الف) دو قطار در یک سو، (ب) دو سوی مخالف هم، حرکت می‌کنند، حساب کنید.

۲۰۶. مسئله بالا را هنگامی که زاویه بین دو خط حرکت قطارها ۶۰° باشد حل کنید.

۳۰۶. ترنی سرظهر شهر A را به مقصد شهر B که در ۴۰۰ km قرار دارد ترک می‌کند و سرعت خود را در ۱۰۰ kmhr^{-1} ثابت نگه می‌دارد. قطار دیگری ساعت ۱۴ شهر B را با سرعت ثابت ۷۰ kmhr^{-1} ترک می‌کند. در چه لحظه‌ای و در چه فاصله‌ای از شهر A دو قطار به یکدیگر می‌رسند، اگر (الف) قطار دوم به سمت شهر A حرکت کند، (ب) قطار دوم از شهر A دور شود؟

۴۰۶. راننده‌ای که اتومبیل خود را با سرعت ۸۰ kmhr^{-1} می‌راند مشاهده می‌کند که رد قطره‌های باران روی شیشه‌های جانبی با خط قائم زاویه ۸۰° می‌سازد. هنگامی که اتومبیل را متوقف می‌کند متوجه می‌شود که باران در واقع به طور قائم می‌بارد. سرعت باران نسبت به اتومبیل را در حالتی که اتومبیل (الف) بیحرکت است، (ب) با سرعت ۸۰ kmhr^{-1} حرکت می‌کند، حساب کنید.

۵۰۶. دو اتومبیل در دو جاده عمود برهم، یکی به سمت شمال و دیگری به سمت شرق حرکت می‌کنند. سرعت آنها نسبت به زمین بترتیب ۶۰ kmhr^{-1} و ۸۰ kmhr^{-1} است. سرعت نسبی دو اتومبیل را حساب کنید. آیا سرعت نسبی اتومبیلها به موقعیت مکانی آنها در جاده‌ای که حرکت می‌کنند بستگی دارد؟ مسئله را در حالتی که اتومبیل دوم به سمت غرب حرکت می‌کند مجدداً حل کنید.

۶۰۶. یک کشتی با سرعت ۴ kmhr^{-1} نسبت به آب در راستای ۶۰° شمال غربی حرکت می‌کند. جریان آب به گونه‌ای است که حرکت برآیند نسبت به زمین با سرعت ۵ kmhr^{-1} به سمت مغرب انجام می‌گیرد. سرعت و راستای حرکت آب را نسبت به زمین حساب کنید.

۷۰۶. سرعت یک قایق موتوری در آب ساکن ۵۵ kmhr^{-1} است. راننده میل دارد به نقطه‌ای واقع در ۸۰ km در ۲۰° جنوب شرقی برود. یک جریان قوی با سرعت ۲۰ kmhr^{-1} در راستای ۷۰° جنوب غربی وجود دارد. (الف) حساب کنید در چه راستایی باید قایق رانده شود تا در خط مستقیم به نقطه مورد نظر برسد؟ (ب) مدت زمانی که برای پیمودن این مسیر طول می‌کشد تعیین کنید.

۸۰۶. نهري با سرعت 3 kmhr^{-1} به سمت شمال جريان دارد. يك قايق با سرعت 4 kmhr^{-1} نسبت به آب به سمت شرق حركت مي كند. (الف) سرعت قايق را نسبت ساحل حساب كنيد. (ب) اگر پهنای نهر يك كيلومتر باشد، زمان لازم برای عبور از آن را حساب كنيد. (ج) مقدار انحراف قايق را به سمت شمال هنگامی كه به كناره دیگر نهر می رسد پیدا كنيد.

۹۰۶. دو محل A و B به فاصله 1 km در ساحل (كاملاً مستقيم) رودخانه ای قرار دارند. شخصی به كمك يك قايق پارویی كه با سرعت 4 kmhr^{-1} نسبت به رودخانه پيش می رود از A به B رفته به محل A برمی گردد. شخص دیگری پياده و با سرعت 4 kmhr^{-1} در طول كناره رودخانه از A به B رفته و از آنجا به A برمی گردد. اگر سرعت جريان آب 2 kmhr^{-1} باشد زمانی را كه هريك از اين دو نفر برای طی يك مسير كامل صرف می كنند حساب كنيد.

۱۰۰۶. با استفاده از داده های مسئله پيش هنگامی كه اختلاف زمانی بين دو مسير ۶ دقيقه باشد سرعت جريان رودخانه را حساب كنيد.

۱۱۰۶. نهري به پهنای 1 km با سرعت 2 kmhr^{-1} جريان دارد. چقدر طول می كشد تا شخصی با قايق پارویی مستقيماً به آن طرف نهر برود و برگردد؟ اين زمان را با زمانی كه طول می كشد تا شخصي با پارو زدن در خلاف جهت جريان آب يك كيلومتر بالا برود و برگردد مقايسه كنيد. قايق پارویی با سرعت ثابت 4 kmhr^{-1} نسبت به آب حركت می كند.

۱۲۰۶. با استفاده از داده های مسئله پيش، سرعت جريان نهر را در حالتی كه اختلاف زمانی بين دو مسافرت كامل ۱۰ دقيقه باشد تعيين كنيد.

۱۳۰۶. يك دستگاه مختصات ثابت نسبت به زمين را در نظر می گيريم (زمين تخت و «بدون حركت» فرض می شود). خمپاره ای با سرعت اوليه 270 ms^{-1} ، از توپ عقب يك هواپيما كه با سرعت 240 ms^{-1} در پرواز است شليك می شود. حركت خمپاره را (الف) در دستگاه مختصات زميني، (ب) در يك دستگاه مختصات وابسته به هواپيما، تشریح كنيد. (ج) باچه زاويه ای بايد لوله توپ هدف گيري شود تا خمپاره هيچگونه مؤلفه افقی سرعت نسبت به دستگاه مختصات زميني نداشته باشد.

۱۴۰۶. مكان ذره Q در دستگاه مختصات O با بردار

$$\mathbf{r} = [u_x(6t^2 - 4t) + u_y(-3t^3) + u_z(3)] \text{ m}$$

اندازه گيري می شود. (الف) اگر مكان Q در دستگاه مختصات O' با

$$\mathbf{r}' = [u_x(6t^2 + 3t) + u_y(-3t^3) + u_z(3)] \text{ m}$$

اندازه گيري شود، سرعت نسبي ثابت O' را نسبت به O تعيين كنيد. (ب) ثابت كنيد كه شتاب ذره در دو دستگاه يكي است.

۱۵۰۶. قطاری با سرعت 30 ms^{-1} از ايستگاهی می گذرد. يك گوی با سرعت 15 ms^{-1}

در کف یک واگن، (الف) در سوی حرکت قطار، (ب) در سوی مخالف حرکت قطار، و (ج) عمود بر راستای حرکت قطار، حرکت می‌کند. سرعت گوی را در هر حالت نسبت به ناظری که در سکوی قطار ایستاده است پیدا کنید.

۱۶.۶. ذره‌ای با سرعت 500 ms^{-1} نسبت به زمین، در نقطه‌ای به عرض جغرافیایی 45° شمالی مستقیم به سمت جنوب حرکت می‌کند. (الف) شتاب گریز از مرکز ذره را حساب کنید. (ب) شتاب کوریولی ذره را پیدا کنید. (ج) مسئله را برای نقطه‌ای به عرض 45° جنوبی مجدداً حل کنید.

۱۷.۶. جسمی از ارتفاع 200 متری نقطه‌ای به عرض جغرافیایی 41° شمالی می‌افتد. انحراف به شرق را نسبت به آن نقطه (راستای شعاعی) پیدا کنید. مسئله را برای نقطه‌ای به عرض 41° جنوبی مجدداً حل کنید.

۱۸.۶. نهری در نقطه‌ای به عرض جغرافیایی 45° شمالی (جنوبی) با سرعت 9 km hr^{-1} به سمت جنوب (شمال) جریان دارد. شتاب کوریولی را پیدا کنید. ثابت کنید که در نیمکره شمالی (جنوبی) این شتاب آب را به سمت کناره راست (چپ) می‌راند. این اثر موجب می‌شود که کناره راست (چپ) کمی بیشتر ساییده شود، که در مواردی مشاهده شده است.

۱۹.۶. در یک هواپیمای جت که با سرعت 450 ms^{-1} در طول استوا به سمت شرق در پرواز است، شتاب کوریولی مسافرین چقدر است؟

۲۰.۶. سیاره مشتری در هر ۹ ساعت و ۵۱ دقیقه یک بار حول محور خود می‌گردد. شعاع مسیر حدود $7 \times 10^4 \text{ km}$ و شتاب گرانی روی آن 26.85 ms^{-2} است. حداکثر انحراف خط شاقول از راستای شعاعی مشتری چقدر است؟

۲۱.۶. مقادیر شتاب گرانی داده شده در جدول ۱۰.۶ را با مقادیر نظری که معادله (۲۹.۶) پیش بینی می‌کند مقایسه کنید.

۲۲.۶. جسمی در راستای قائم با سرعت v به سمت بالا پرتاب می‌شود. ثابت کنید که موقع افتادن به اندازه $\frac{2}{3} \sqrt{h^3/g}$ به سمت غرب منحرف می‌شود. $h = v^2/2g$ است.

۲۳.۶. دو ناظر O و O' که با سرعت زاویه‌ای نسبی ω جابجا می‌شوند سرعت و شتاب نقطه‌ای را ثبت می‌کنند. هنگامی که ω ثابت نیست، رابطه بین سرعتها و شتابها را پیدا کنید. مسئله را ابتدا هنگامی که دو مبدأ برهم منطبق‌اند و سپس هنگامی که جابجا شده‌اند در نظر بگیرید.

۲۴.۶. دو ناظر O و O' با سرعت $c/60$ v نسبت به هم در حرکت انتقالی هستند. (الف) ناظر O یک میله را نسبت به خود بیحرکت و موازی راستای حرکت مشاهده می‌کند و طول آن را 20 m اندازه می‌گیرد. طول میله نسبت به ناظر O' چقدر است؟ (ب) اگر همین میله به موازات راستای حرکت O' و نسبت به همین ناظر بیحرکت باشد، ناظرهای O و O' چه طولی برای این میله اندازه‌گیری می‌کنند؟

۲۵.۶. سرعت نسبی میله‌ای را پیدا کنید که طولی که در حال حرکت برای آن اندازه‌گیری می‌شود برابر نصف طول سکون آن باشد.

۲۶.۶. یک ناظر بیحرکت درخورشید چه اندازه کاهش در یکی از قطرهای زمین مشاهده می‌کند؟ (سرعت حرکت انتقالی زمین دور خورشید 30 kms^{-1} و شعاع زمین در جدول ۱۰۱۳ آمده است).

۲۷.۶. یک سفینه فضایی که به سمت ماه در حرکت است با سرعت نسبی $0.8c$ از کنار زمین می‌گذرد. (الف) به نظر یک ناظر زمینی مسافت از زمین تا ماه چقدر طول می‌کشد؟ (ب) فاصله زمین تا ماه به نظر یک مسافر این موشک چقدر است؟ این مسافت به نظر مسافر داخل موشک چقدر طول می‌کشد؟

۲۸.۶. عمر میانگین یک نوترون به عنوان یک ذره آزاد در حال سکون، ۱۵ دقیقه است. نوترون خود بخود متلاشی می‌شود و از آن یک الکترون، یک پروتون و یک نوترینو به دست می‌آید. نوترون باید چه حداقل سرعت میانگینی خورشید را ترک کند تا قبل از فروپاشی به زمین برسد؟

۲۹.۶. یک مزون 2μ ذره‌ای است ناپایدار با عمر میانگین $10^{-6} \times 2$ ، اگر توسط یک ناظر بیحرکت نسبت به مزون اندازه‌گیری شود. عمر میانگین مزون برای شخصی که آن را با سرعت $0.9c$ در حرکت می‌بیند چقدر است؟ اگر دسته بزرگی از این مزونها در یک نقطه از فضا به وجود آیند، و لی تنها ۱٪ آنها به زمین برسند، ارتفاع آن نقطه را برآورد کنید.

۳۰.۶. یک هسته رادیو اکتیو که با سرعت $0.1c$ نسبت به آزمایشگاه حرکت می‌کند، الکترونی با سرعت $0.8c$ نسبت به هسته گسیل می‌دارد. در صورتی که الکترون، نسبت به دستگاه مختصات وابسته به هسته، (الف) در راستا و سوی حرکت هسته، (ب) در سوی مخالف حرکت هسته، و (ج) در راستای عمود بر حرکت هسته گسیل شود، سرعت و سوی الکترون نسبت به آزمایشگاه چیست؟

۳۱.۶. دو ناظر O و O' با سرعت نسبی $0.6c$ در حرکت انتقالی می‌باشند. آنها در لحظه $t = t' = 0$ در یک نقطه قرار دارند. هنگامی که به نظر ناظر O ، ۵ سال بگذرد، چقدر طول می‌کشد تا یک علامت نورانی از O به O' برسد؟ در صورتی که O و O' هر دو از این اطلاعات آگاه باشند، به نظر O' از لحظه‌ای که O و O' بهم منطبق بوده‌اند چقدر گذشته است؟ لامپی واقع روی O به مدت یک سال روشن می‌ماند. تعیین کنید به نظر O' چه مدت لامپ روشن بوده است؟

۳۲.۶. مسئله پیش را هنگامی که سرعت نسبی $0.9c$ باشد حل کنید.

۳۳.۶. موشکی که طول سکون آن 60 m است، در خط راست از زمین دور می‌شود. هر انتهای این موشک به یک آینه مجهز است. یک علامت نوری که از طرف زمین ارسال می‌شود به وسیله هر دو آینه منعکس و به زمین برگشت داده می‌شود. علامت اولی در پایان 200 s و علامت دوم 1774 s بعد از آن دریافت می‌گردد. فاصله موشک از زمین و سرعت

موشک را نسبت به زمین پیدا کنید.

۳۴.۶. یک کیهان نورد می‌خواهد به ستاره‌ای که ۵ سال نوری فاصله دارد برود. سرعت موشک او را نسبت به زمین حساب کنید، در صورتی که می‌دانیم که کیهان نورد با ساعت خود این مسیر را در یک سال می‌پیماید. زمانی که یک ناظر زمینی برای مأموریت او ثبت می‌کند چقدر است؟

۳۵.۶. دانشجویی باید آزمونی را با ساعت استاد در مدت یک ساعت بگذراند. استاد با سرعت ۰.۹۷c نسبت به دانشجو حرکت می‌کند و با مراجعه به ساعت خود، در رأس زمان تعیین شده یک علامت نورانی ارسال می‌دارد. دانشجو به محض دریافت علامت نورانی از نوشتن باز می‌ایستد. او چقدر وقت برای آزمون خود داشته است؟

۳۶.۶. یک پژوهشگر می‌خواهد با به کار بردن روش مایکلسون - موری سرعت باد را اندازه بگیرد. بدین مناسبت علامتهای صوتی در دو راستای عمود برهم می‌فرستد. او سرعت صوت را 300 ms^{-1} و طول مسیر را 100 m فرض می‌کند. اگر او بتواند اختلاف زمان $\Delta t \geq 0.001 \text{ s}$ را اندازه بگیرد، حداقل سرعتی را که برای باد می‌تواند اندازه‌گیری کند چقدر است؟

۳۷.۶. ثابت کنید که شکل کلی تبدیل لورنتس، هنگامی که محورهای مختصات به کار برده شده به وسیله O و O' با سرعت نسبی آنها موازی نباشند، عبارت است از

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (k - 1) \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - k\mathbf{v}t$$

$$t' = k(t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c^2).$$

[داهنمایی: بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ را روی راستاهای موازی وعمود بر $\mathbf{v}$ تصویر کنید؛ توجه داشته باشید که $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$ و $\mathbf{r}'_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}/v^2$ است.]

۳۸.۶. اگر V و V' بزرگیهای سرعت یک ذره باشند که توسط ناظرهای O و O' که با سرعت نسبی v روی محور X ها حرکت می‌کنند اندازه‌گیری شده‌اند، ثابت کنید که

$$\sqrt{1 - V'^2/c^2} = \frac{V(1 - v^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}{1 - vV_x/c^2}$$

و

$$\sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{V(1 - v^2/c^2)(1 - V'^2/c^2)}{1 - vV'_x/c^2}.$$

۳۹.۶. ثابت کنید که تبدیل کلی شتاب یک ذره که به وسیله O و O' اندازه‌گیری شود، هنگامی که ذره با سرعت V نسبت به O حرکت می‌کند، از این قرار است:

$$a'_x = \frac{a_x(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vV_x/c^2)^3}$$

$$a'_y = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - vV_x/c^2)^2} \left(a_y + a_x \frac{vV_y/c^2}{1 - vV_x/c^2} \right)$$

$$a'_z = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - vV_x/c^2)^2} \left(a_z + a_x \frac{vV_z/c^2}{1 - vV_x/c^2} \right).$$

۴۵.۶. هرگاه v تقریباً برابر c باشد، ثابت کنید که $k \approx 1/\sqrt{2(1 - v/c)}$ می باشد و اگر v خیلی کوچکتر از c باشد، داریم $k \approx 1 - v^2/2c^2$.

۴۱.۶. ناظر O' طول هر ضلع یک جعبه مکعب شکل را، که نسبت به او ساکن است، L_0 اندازه می گیرد. این جعبه به موازات یکی از اضلاعش، با سرعت v نسبت به ناظر O حرکت می کند. ثابت کنید حجمی را که ناظر O برای این جعبه اندازه گیری می کند برابر است با $L_0^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

۴۲.۶. ذره ای نسبت به ناظر O به گونه ای جابجا می شود که مکان آن در زمان t برابر $x = vt$ و $y = at^2/2$ و مسیر آن یک سهمی است. حرکت ذره را نسبت به ناظر O' که نسبت به ناظر O با سرعت v حرکت می کند بیان کنید. بویژه مسیر و شتاب آن را پیدا کنید.

۴۳.۶. خط کشی به طول یک متر در یک دستگاه مختصات متحرک، با راستای حرکت زاویه 45° می سازد. اگر سرعت دستگاه مختصات متحرک $c/8$ باشد، طول و راستایی که برای خط کش در دستگاه مختصات آزمایشگاه اندازه گیری می شود چقدر است؟

۴۴.۶. بحث در همزمانی. (الف) ثابت کنید که اگر دو رویداد نسبت به ناظر O ، در زمانهای t_1 و t_2 و در نقاطی به طولهای x_1 و x_2 اتفاق بیفتند و نیز $T = t_2 - t_1$ و $L = x_2 - x_1$ باشد، این رویدادها به نظر ناظر O' (که نسبت به ناظر O با سرعت v حرکت می کند) در زمانهای t'_1 و t'_2 رخ می دهند، به گونه ای که اگر $T' = t'_2 - t'_1$ باشد، داریم

$$T' = k(T - vL/c^2).$$

(ب) در حالت کلی، آیا رویدادهای همزمان برای ناظر O ، برای ناظر O' نیز همزمان می باشند؟ در چه شرایطی رویدادهای همزمان برای O برای کلیه ناظرهای دیگری که نسبت به ناظر O در حرکت یکنواخت هستند همزمان می باشند؟ (ج) رابطه ای بین L و T پیدا کنید به گونه ای که ترتیبی که ناظر O' دو رویداد را مشاهده می کند برای ناظر O برعکس باشد. (د) فرض کنید رویدادهای (x_1, t_1) و (x_2, t_2) که توسط ناظر O مشاهده می شوند رابطه علت و معلولی دارند [به گفته دیگر، (x_2, t_2) نتیجه انتشار یک علامت از (x_1, t_1) با سرعت $V = L/T$ باشد که V لزوماً کوچکتر یا برابر c است]. آیا ممکن است ترتیب رویدادها برای ناظر O' برعکس شود؟ [توجه کنید که اگر پاسخ مثبت باشد، به موجب نظریه، $V > c$ می شود.]

۴۵.۶. ثابت کنید که قانون تبدیل سرعتها را می توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{k(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/c^2)} \left[\mathbf{v} + (k - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - k\mathbf{v} \right].$$

۴۶.۶. ثابت کنید که قانون تبدیل شتابها را مى توان به صورت بردارى زیر نوشت:

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{k^3(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/c^2)^3} \left[\mathbf{a} + \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \right].$$



دینامیک یک ذره

مقدمه	۱۰۷
قانون لختی	۲۰۷
اندازه حرکت خطی	۳۰۷
اصل بقای اندازه حرکت	۴۰۷
تعریف مجدد جرم	۵۰۷
قانون دوم و سوم نیوتون؛ مفهوم نیرو	۶۰۷
نقدی بر مفهوم نیرو	۷۰۷
یکاهای نیرو	۸۰۷
نیروهای مالش	۹۰۷
نیروهای مالش در شاره‌ها	۱۰۰۷
دستگاه‌های با جرم متغیر	۱۱۰۷
حرکت منحنی الخط	۱۲۰۷
اندازه حرکت زاویه‌ای	۱۳۰۷
نیروهای مرکزی	۱۴۰۷
ترازندی و سکون	۱۵۰۷

در فصل ۵، که از سینما تیک گفتگو می‌کرد، عناصری را که در «توصیف» حرکت یک ذره دخالت دارند مورد بحث قرار دادیم. اکنون تحقیق می‌کنیم به چه دلایلی ذرات به این شکل یا شکل دیگری جا بجا می‌شوند؟ چرا در نزدیکی سطح زمین، تمام اجسام با شتاب ثابت می‌افتند؟ چرا زمین به دور خورشید در یک مسیر بیضی حرکت می‌کند؟ چرا آنها به یکدیگر می‌پیوندند تا مولکولها تشکیل شوند؟ چرا اگر یک فنر را بکشند شروع به نوسان می‌کنند؟ می‌خواهیم این حرکتها و همچنین حرکتهای زیاد دیگری را که همواره در اطراف خود مشاهده می‌کنیم بفهمیم. این موضوع، نه تنها از این نظر اهمیت دارد که شناسایی بنیادی ما را از طبیعت زیاد می‌کند بلکه در مهندسی و کاربردهای عملی نیز مهم است. اگر بدانیم که به طور کلی حرکت چگونه به وجود می‌آید، توانایی خواهیم یافت ماشینها و وسایل دیگری را طرح کنیم که مطابق میل ما کار کنند. بررسی رابطه بین حرکت یک جسم و علت‌هایی که این حرکت را به وجود می‌آوردند، دینامیک نام دارد.

تجربیات روزانه ما حاکی است که حرکت یک جسم نتیجه مستقیم برهم‌کنشهای آن جسم با اجسام اطراف خود می‌باشد. وقتی که بازیکنی ضربه‌ای به یک توپ وارد می‌کند بر اثر این برهم‌کنش حرکت توپ تغییر می‌کند. مسیر هر پرتابه نتیجه‌ای جز برهم‌کنش آن با زمین نیست. حرکت یک الکترون دور هسته نتیجه برهم‌کنش این الکترون با هسته و شاید با سایر الکترونهاست. برهم‌کنشها با شیوه مناسبی توسط یک مفهوم ریاضی به نام نیرو بیان می‌شوند. مطالعه دینامیک در واقع، تجزیه و تحلیل رابطه موجود بین نیرو و تغییرات حرکت یک جسم است.

قوانین حرکت که در این مبحث عنوان خواهیم کرد تعمیم تجزیه و تحلیل دقیقی از حرکتهای مشاهده شده در اطراف خود و گسترش این مشاهدات به بعضی آزمایشهای آرمانی و ساده شده می‌باشند.

۲۰۷ قانون لختی

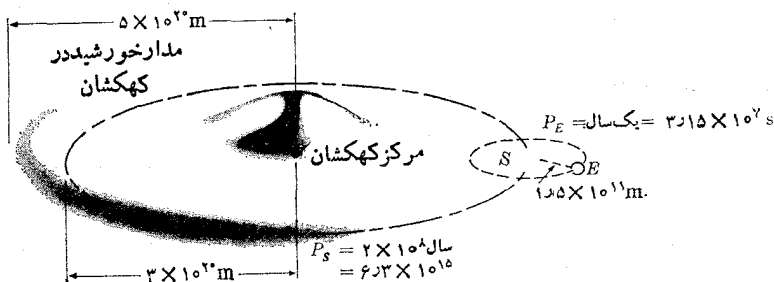
ذره آزاد، ذره‌ای است که تحت تأثیر هیچ برهم‌کنشی نباشد؛ به گفته درست‌تر، چنین چیزی وجود ندارد، زیرا هر ذره‌ای تحت تأثیر برهم‌کنشهای تمام ذرات دیگر دنیا قرار دارد. بنا براین، یک ذره آزاد یا باید کاملاً منزوی، و یا تنها ذره موجود در جهان باشد. و به هر حال چنین ذره‌ای قابل مشاهده نخواهد بود، زیرا در جریان مشاهده همیشه برهم‌کنشی بین مشاهده‌کننده و ذره به وجود می‌آید. معذالک، در عمل بعض ذره‌ها را می‌توان آزاد در نظر گرفت؛ خواه به دلیل اینکه به قدر کافی از سایر ذرات دورند که بتوان از برهم‌کنشهای آنها چشم پوشید، خواه به سبب اینکه برهم‌کنشهایشان با سایر ذرات به طریقی خنثی می‌شوند، به گونه‌ای که برهم‌کنش برآیند برابر صفر است.

اکنون قانون لختی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که می‌گوید:

یک ذره آزاد همیشه با سرعت ثابت، یا (درست به همان معنی) بدون شتاب حرکت می‌کند.

به عبارت دیگر، یک ذره آزاد یا روی یک خط مستقیم با سرعت ثابت جابجا می‌شود یا ساکن است (سرعت برابر صفر). این بیان، قانون اول نیوتون نیز نامیده می‌شود، زیرا آن را اولین بار سر ایزاک نیوتون [۱۶۴۲-۱۷۲۶ (۱۰۲۱-۱۱۰۶ ه. ش. ۰)] بیان داشته است، و این، اولین قانون از سه «قانونی» است که نیوتون در قرن هفده اعلام داشت.

بنا به آنچه در فصلهای ۵ و ۶ گفته شد، حرکت یک امر نسبی است. بنابراین، وقتی قانون لختی را بیان می‌کنیم باید روشن شود حرکت ذره آزاد نسبت به چه کس یا کدام چیز انجام می‌گیرد. ما فرض می‌کنیم حرکت ذره نسبت به ناظری انجام می‌شود که این ناظر به نوبه خود یک ذره یا یک دستگاه آزاد است، یعنی در معرض هیچگونه برهم‌کنشی با بقیه جهان نیست. چنین ناظری را ناظر لخت و چارچوب مرجعی را که به کار می‌برد چارچوب مرجع لخت می‌نامند. فرض می‌کنیم چارچوبهای لخت حرکت دورانی ندارند، زیرا وجود چرخش حاکی از آن است که شتابهایی (یا تغییراتی ناشی از تغییر راستا در سرعت)، در نتیجه، برهم‌کنشهایی وجود دارند که با تعریف ما از ناظر لخت که باید یک «ذره آزاد» یا بدون شتاب باشد مغایرت دارد. مطابق قانون لختی، ناظرهای لخت مختلف می‌توانند نسبت به هم با سرعت ثابتی در حرکت باشند، در این صورت، مشاهدات آنها، بسته به اینکه سرعتهای نسبیشان چقدر باشد، از طریق تبدیلات گالیله یا لورنتس به یکدیگر مربوط می‌شوند.



شکل ۱.۷. یک دستگاه مختصات متصل به زمین، به سبب حرکت چرخشی روزانه و حرکت شتابدارش به دور خورشید، یک دستگاه لخت نیست. همچنین خورشید نیز به سبب حرکتش به دور مرکز کهکشان یک چارچوب لخت نمی‌باشد. با این همه، برای مقاصد عملی، هر کدام از این دو جسم را می‌توان به عنوان یک چارچوب لخت به کار برد.

زمین به سبب حرکت چرخشی روزانه و برهم‌کنشش با خورشید و سایر سیاره‌ها، یک چارچوب مرجع لخت نیست. معذالک در بیشتر موارد، اثرات چرخش و برهم‌کنش زمین ناچیز هستند و چارچوبهای مرجع وابسته به آزمایشگاههای زمین را می‌توان بدون اشتباه زیاد، چارچوبهای لخت در نظر گرفت. خورشید نیز به نوبه خود یک دستگاه لخت

نیست، زیرا به سبب برهم‌کنشهایش با سایر اجرام کهکشان یک مدار منحنی دور مرکز کهکشان رسم می‌کند (شکل ۱۰۷). با وجود این چون حرکت خورشید در مقایسه با حرکت زمین بیشتر به یک حرکت مستقیم الخط و یکناخت نزدیک است (شتاب مداری زمین ۱۵۰ میلیون برابر خورشید است)، تشابه بین خورشید و یک چار چوب لخت خیلی بیشتر می‌باشد.

اکنون چند تجربه انجام یافته در آزمایشگاههای زمینی را، که قانون لختی را تأیید می‌کنند، در اینجا بیان می‌کنیم. یک گلوله کروی واقع روی یک سطح افقی بدون مالش، تا وقتی که نیرویی به آن وارد نشده ببحرکت باقی می‌ماند، یعنی سرعت آن ثابت و مقدارش صفر است. فرض کنیم سطحی که گلوله روی آن قرار دارد برهم‌کنش بین زمین و گلوله را خنثی می‌کند، و بدین طریق گلوله از هر برهم‌کنشی آزاد است. هرگاه ضربه‌ای به گلوله وارد شود، همانند ضربه‌ای که به توپ بلیارد وارد می‌کنند، گلوله یک لحظه دستخوش برهم‌کنشی می‌شود و سرعتی کسب می‌کند. ولی بلافاصله مجدداً آزاد می‌شود، و با سرعتی که در لحظه ضربه کسب کرده در خط مستقیم به حرکت درمی‌آید. اگر گلوله سخت و کاملاً کروی، و سطح کاملاً افقی و بدون مالش باشد، می‌توان تصور کرد که گلوله تا ابد با این روند ثابت جا بجا می‌شود. عملاً چنین وضعی پیش نمی‌آید، زیرا حرکت بتدریج کند شده و بالاخره گلوله می‌ایستد. می‌گوییم یک برهم‌کنش اضافی بین گلوله و سطح به وجود آمده است. این برهم‌کنش که مالش نامیده می‌شود بعداً مورد گفتگو قرار خواهد گرفت.

۳.۷ اندازه حرکت خطی

در بخش ۳.۲ با گفتن اینکه جرم عددی است که به هر ذره یا جسمی نسبت داده می‌شود و آن را با مقایسه هر جسم با جسم سنجه، با استفاده از اصل ترازوی با بازوهای برابر به دست می‌آورند، یک تعریف عملیاتی از جرم به دست دادیم. بنابراین جرم ضریبی است که یک ذره را ذره دیگر متمایز می‌کند. تعریف عملیاتی ما از جرم مقدار آن را برای ذره ببحرکت تعیین می‌کند. ولی معلوم نیست اگر ذره حرکت کند دارای همین جرم خواهد بود یا نه؛ بنابراین برای دقت بیشتر، عبارت جرم سکون را به کار می‌بریم. با وجود این، فعلاً فرض می‌کنیم جرم مستقل از حالت حرکت جسم است و آن را باختصار جرم می‌نامیم. بعداً در فصل ۱۱، تجزیه و تحلیل کاملی از این خصوصیت مهم خواهیم داشت، و ثابت خواهیم کرد که فرض فوق تا هنگامی که سرعت ذره نسبت به سرعت نور خیلی کوچک باشد، تقریب خوبی است.

حاصل ضرب جرم یک ذره در سرعت آن، اندازه حرکت خطی^۱ آن ذره نام دارد. با نشان دادن اندازه حرکت با p ، می‌نویسیم

$$p = mv. \quad (107)$$

اندازه حرکت خطی یک کمیت برداری است و سو و راستای آن با سو و راستای سرعت یکی است. اندازه حرکت مفهوم فیزیکی بسیار مهمی است، زیرا ترکیب دو عنصری است که حالت دینامیکی ذره را مشخص می‌کنند: جرم و سرعت ذره. از این پس به جای «اندازه حرکت خطی» تنها اندازه حرکت را به کار می‌بریم. در دستگاه یکاهای MKSC اندازه حرکت با یکای متر کیلوگرم بر ثانیه، mks^{-1} ، بیان می‌شود. (هیچ اسم بخصوصی به این یکا داده نشده است.)

این امر را که اندازه حرکت یک کمیت دینامیکی است که بیش از سرعت اطلاعات در اختیار ما می‌گذارد، با مثالهای ساده متعددی می‌توان نشان داد. به عنوان مثال، متوقف کردن یا افزایش دادن سرعت یک کامیون بار شده خیلی دشوارتر از کامیون خالی است، حتی اگر سرعت هر دو یکسان باشد، زیرا اندازه حرکت کامیون باردار خیلی بیشتر است. اکنون می‌توان بیان جدیدی از قانون لختی ارائه کرد و گفت

یک ذره آزاد همیشه با اندازه حرکت ثابتی حرکت می‌کند.

۴.۷ اصل بقای اندازه حرکت

یک نتیجه فوری قانون لختی این است که یک ناظر لخت با مشاهده اینکه سرعت یا اندازه حرکت ذره‌ای ثابت نیست، یا به عبارت دیگر، دارای شتاب است، در می‌یابد که ذره آزاد نیست (یعنی بار دیگر ذرات برهم‌کنش دارد).

اکنون یک حالت آرمانی را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم به جای مشاهده یک ذره منزوی در جهان، آنچه‌اگرچه منظور قانون لختی است، دو ذره را که تنها تحت تأثیر برهم‌کنش متقابل یکدیگر قرار دارند، و از بقیه جهان منزوی هستند مورد مشاهده قرار می‌دهیم. دو ذره به سبب برهم‌کنش متقابل خود دارای سرعتهای انفرادی ثابتی نیستند، بلکه سرعت آنها با زمان تغییر می‌کند و مسیر آنها، چنانکه در شکل ۲.۷ با منحنیهای (۱) و (۲) نشان داده شده‌اند، در حالت کلی منحنی است. در لحظه داده شده‌ای مانند t ، ذره ۱ در نقطه A با سرعت $\mathbf{v}_1$ و ذره ۲ در نقطه B با سرعت $\mathbf{v}_2$ می‌باشد. در لحظه دیگری مانند t' ، دو ذره بترتیب در نقاط A' و B' و با سرعتهای $\mathbf{v}'_1$ و $\mathbf{v}'_2$ می‌باشند. با نشان دادن جرم ذره‌ها با m_1 و m_2 ، اندازه حرکت کل دستگاه دو ذره در لحظه t برابر است با

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (2.7)$$

در لحظه بعدی t' ، اندازه حرکت کل برابر می‌شود با

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \quad (3.7)$$

در نوشتن معادله اخیر، پذیرفته‌ایم که جرم این ذرات مستقل از حالت حرکت آنهاست و به همین جهت، در این معادله نیز جرمهای به کار رفته در معادله (۲.۷) را به کار برده‌ایم. در غیر این صورت ناچار بودیم بنویسیم: $\mathbf{p} = m'_1 \mathbf{v}'_1 + m'_2 \mathbf{v}'_2$. نتیجه مهم آزمایش ما این است که، زمانهای t و t' هر چه باشند، به عنوان نتیجه مشاهده، در می‌یابیم که $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$

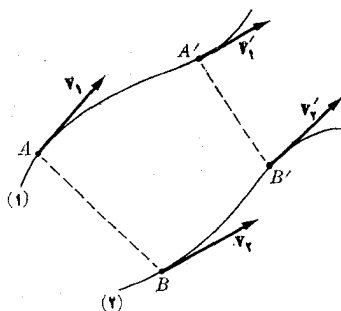
است. به عبارت دیگر،

اندازه حرکت کل یک دستگاه متشکل از دو ذره که تنها تحت تأثیر برهم‌کنشهای متقابل هم قرار دارند، ثابت باقی می‌ماند.

این نتیجه، اصل بقای اندازه حرکت را تشکیل می‌دهد و یکی از بنیادی‌ترین و عام‌ترین اصول فیزیک به شمار می‌رود. به عنوان مثال، یک اتم هیدروژن را در نظر بگیرید که در آن یک الکترون دور یک پروتون می‌چرخد و آن را آنچنان منزوی فرض می‌کنیم که تنها برهم‌کنش بین الکترون و پروتون وجود داشته باشد. پس، مجموع اندازه حرکت الکترون و پروتون نسبت به یک چارچوب مرجع لخت ثابت است. به همین گونه دستگاه متشکل از زمین و ماه را می‌توان در نظر گرفت. اگر می‌توانستیم از برهم‌کنش مربوط خورشید و سایر سیاره‌ها صرف‌نظر کنیم، در آن صورت مجموع اندازه حرکت‌های زمین و ماه، نسبت به یک چارچوب مرجع لخت، ثابت می‌ماند.

هر چند بقای اندازه حرکت را برای دو ذره بیان داشتیم، این اصل در مورد چند ذره نیز که یک دستگاه منزوی را تشکیل می‌دهند، یعنی ذراتی که تنها تحت تأثیر برهم‌کنشهای متقابل بین خود هستند و با بقیه جهان برهم‌کنشی ندارند، برقرار است. بنا بر این، اصل بقای اندازه حرکت به صورت کلی آن، چنین می‌گوید:

اندازه حرکت کل یک دستگاه ذرات منزوی ثابت است.



شکل ۲۰۷. برهم‌کنش بین دو ذره

برای مثال یک مولکول هیدروژن متشکل از دو اتم هیدروژن (بنا بر این دو الکترون و دو پروتون) را در نظر بگیرید. اگر مولکول منزوی باشد، یعنی تنها می‌باید برهم‌کنشهای بین این چهار ذره را بررسی کرد، مجموع اندازه حرکت‌های آنها نسبت به یک چارچوب مرجع لخت ثابت خواهد بود. به همین گونه، منظومه شمسی، متشکل از خورشید، سیارات و قمرهای آنها را در نظر بگیرید. اگر بتوان از برهم‌کنشهای منظومه با سایر اجرام سماوی چشم‌پوشید، اندازه حرکت کل آن نسبت به یک چارچوب مرجع لخت ثابت باقی می‌ماند.

تاکنون هیچ استثنایی برای اصل بقای اندازه حرکت شناخته نشده است. در واقع، هر بار که به نظر برسد در آزمایشی اصل بقای اندازه حرکت نقض شده است، فیزیکدان

بلافاصله به دنبال یک ذره ناشناخته یا مخفی مانده‌ای می‌گرد که قبلاً متوجه آن نشده است و آن را مسئول ممکن این نقض ظاهری اصل بقای اندازه حرکت به حساب می‌آورد. در واقع همین پژوهشها بود که دانشمندان را به شناسایی نوترون، نوترینو، فسوتون و چندین ذره بنیادی دیگر رهنمون گشت. بعداً ما مجبور خواهیم شد که اصل بقای اندازه حرکت را به گونه‌ای مختصر متفاوت‌تر از این بیان کنیم. با وجود این در اغلب مسائلی که مورد بحث ما قرار می‌گیرند، می‌توان اصل بقای اندازه حرکت را به صورتی که در این فصل بیان شد به کار برد.

اصل بقای اندازه حرکت را می‌توان به صورت ریاضی زیر نوشت:

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \dots = \text{const.} \quad (4.7)$$

رابطه (۴.۷) بدین معنی است که در یک دستگاه منزوی، تغییر اندازه حرکت یک ذره در فاصله زمانی معین برابر است با تغییر اندازه حرکت بقیه دستگاه در همین فاصله زمانی با علامت مخالف. بدین طریق، در مورد مولکول منزوی هیدروژن، تغییر اندازه حرکت یکی از الکترون‌ها برابر است با مجموع تغییرات اندازه حرکت‌های الکترون دیگر و پروتون‌ها با علامت مخالف.

در مورد خاص دو ذره داریم

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const} \quad (5.7)$$

یا

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad (6.7)$$

معادله (۶.۷) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2 = -(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2). \quad (7.7)$$

بالاخره به فرض $\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \Delta \mathbf{p}$ ، تغییر اندازه حرکت بین لحظه‌های t و t' برابر می‌شود با

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2 \quad (8.7)$$

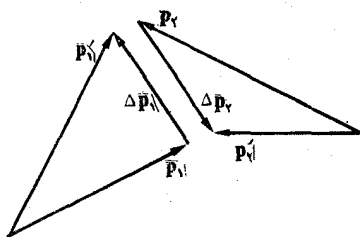
این معادله نشان می‌دهد که برای دو ذره که با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند تغییر اندازه حرکت یک ذره در یک فاصله زمانی معین برابر است با تغییر اندازه حرکت ذره دیگر در همین فاصله زمانی با علامت مخالف (شکل ۳.۷). این نتیجه را می‌توان با گفته زیر نیز بیان داشت:

هر برهم‌کنشی یک تبادل اندازه حرکت به وجود می‌آورد،

به گونه‌ای که اندازه حرکتی که یک ذره «از دست می‌دهد» برابر با اندازه حرکتی است که ذره دیگر «به دست می‌آورد».

قانون لختی که در بخش ۲.۷ بیان شد تنها حالت خاصی از اصل بقای اندازه حرکت است، زیرا اگر به جای چند ذره تنها یک ذره منزوی داشته باشیم، معادله (۴.۷) تنها دارای

یک جمله خواهد شد، یعنی $p = \text{const}$ یا هم ارز آن، $v = \text{const}$ که همان قانون لختی است.



شکل ۳.۷. تبادل اندازه حرکت در نتیجه برهم‌کنش بین دو ذره

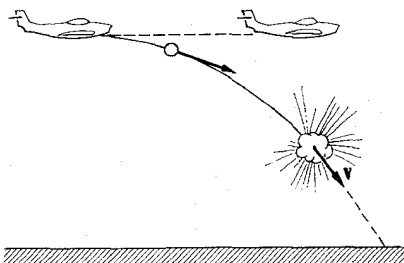
ما در اطراف خود پیوسته می‌توانیم مثالهایی برای اصل بقای اندازه حرکت پیدا کنیم. پس زدن^۱ یک اسلحه آتشین مثالی از اصل بقای اندازه حرکت است. قبل از شلیک، دستگاه تفنگ و گلوله ساکن است و اندازه حرکت کل برابر صفر می‌باشد. هنگام شلیک، پس زنی تفنگ اندازه حرکت اخذ شده به وسیله گلوله به سمت جلو را جبران می‌کند. به عنوان مثال دیگر، وقتی که یک هسته پرتوزا با گسیل یک الکترون و یک نوترینو فروپاشیده^۲ می‌شود، اندازه حرکت کل الکترون، نوترینو، و هسته جدید برابر صفر خواهد بود، زیرا در آغاز دستگاه نسبت به چارچوب لخت متصل به آزمایشگاه در حال سکون بوده است. همچنین وقتی نارنجک یا بمبی در مسیر خود منفجر می‌شود، اندازه حرکت کل تمام قطعات بلافاصله بعد از انفجار باید درست مساوی اندازه حرکت نارنجک یا بمب قبل از انفجار باشد (شکل ۴.۷).

مثال ۱۰.۷. تفنگی به جرم 80 kg گلوله‌ای به جرم 0.016 kg را با سرعت 700 ms^{-1} شلیک می‌کند. سرعت پس‌زنی تفنگ را حساب کنید.

حل: در ابتدا تفنگ و گلوله در حال سکون می‌باشند و اندازه حرکت کل آنها برابر صفر است. بعد از شلیک گلوله با اندازه حرکت زیر به سمت جلو به حرکت درمی‌آید:

$$p_1 = m_1 v_1 = (0.016 \text{ kg}) \times (700 \text{ ms}^{-1}) = 11.20 \text{ mkg s}^{-1}$$

بنابراین تفنگ باید با همین اندازه حرکت ولی در سوی مخالف پس‌بنشیند، و داشته باشیم



شکل ۴.۷. در انفجار یک نارنجک اندازه حرکت ثابت باقی می‌ماند.

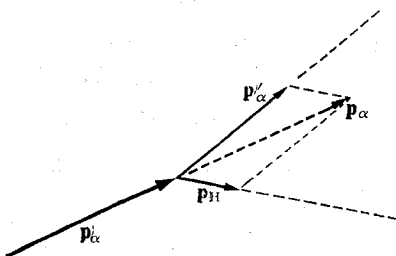
$$p_v = 1120 \text{ mkg s}^{-1} = m_v v_v$$

چون $m_v = 0.80 \text{ kg}$ است، به دست می آید

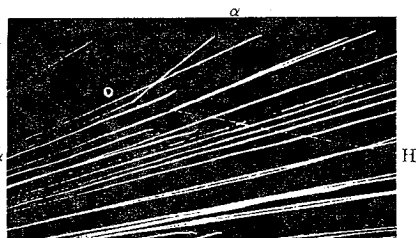
$$v_v = \frac{1120 \text{ mkg s}^{-1}}{0.80 \text{ kg}} = 1400 \text{ ms}^{-1}.$$

مثال ۲.۷. تجزیه و تحلیل بقای اندازه حرکت در جریان برهم کنشهای بین ذرات اتمی.

حل: عکسبرداری از اتاقک ابری در شکل ۵.۷ (الف) نشان می دهد که یک ذره α (هسته هلیوم) وارد برهم کنش با اتم هیدروژن می شود که جزو گازهای دیگر اتاقک بوده و ابتدا در حال سکون است. ذره α از مسیر خود منحرف می شود و اتم هیدروژن نیز شروع به حرکت می کند. اگر جرم هر یک از آنها معلوم باشد که در این حالت به نسبت ۴ و ۱ است و سرعتهایشان را (با ابزارهای فنی ویژه ای که در تجزیه و تحلیل عکسهای اتاقک ابری به کار می روند) اندازه بگیریم، می توانیم نمودار اندازه حرکتها را مطابق شکل ۵.۷ (ب) رسم کنیم. وقتی که، پس از برهم کنش، دو اندازه حرکت را باهم جمع کنیم، مجموع برابر است با اندازه حرکت ذره آلفای فرودی، یا به گفته دیگر $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}'_\alpha + \mathbf{p}_H$. تا کنون اصل بقای اندازه حرکت در هیچ یک از برهم کنشهای اتمی و هسته ای نقض نشده است.



(ب)



(الف)

شکل ۵.۷. اصل بقای اندازه حرکت درجریان برخورد یک ذره α (هسته هلیوم) با یک پروتون (هسته هیدروژن)

۵.۷ تعریف مجدد جرم

با استفاده از تعریف اندازه حرکت [معادله (۱.۷)]، و با فرض اینکه جرم ذره ثابت است، می توان تغییر اندازه حرکت یک ذره را در فاصله زمانی Δt با رابطه زیر بیان کرد:

$$\Delta p = \Delta(mv) = m \Delta v.$$

در نتیجه رابطه (۸.۷) را می توان چنین نوشت:

$$m_v \Delta v_v = m_v \Delta v_v$$

یا اگر تنها بزرگی بردارها را در نظر بگیریم داریم

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|} \quad (9.7)$$

این رابطه نشان می‌دهد که نسبت جرمهای دو ذره متناسب است با عکس نسبت تغییر سرعتها. نتیجه فوق امکان می‌دهد جرم را به طور دینامیکی تعریف کنیم: در واقع، اگر ذره ۱ را ذره «سنجه» انتخاب کنیم، m_1 ، جرم آن را می‌توان به عنوان یکای جرم تعریف کرد. از روی برهم کنش ذره دیگری، که در اینجا ۲ می‌نامیم، با ذره سنجه و با استفاده از معادله (۹.۷) می‌توان m_2 ، جرم ذره ۲، را به دست آورد. این نتیجه نشان می‌دهد که می‌توان به جای تعریف عملیاتی جرم در بخش ۳.۲، این تعریف عملیاتی جدید جرم را به کار برد که از اصل بقای اندازه حرکت و این فرض که با تغییر سرعت جرم تغییر نمی‌کند نتیجه می‌شود.

۶.۷ قانون دوم و سوم نیوتون؛ مفهوم نیرو

در بیشتر موارد، حرکت یک ذره تنها مورد مشاهده قرار می‌گیرد. این امر یا به دلیل نداشتن امکانات لازم برای مشاهده ذرات دیگری است که با آن ذره برهم کنش می‌کنند، یا به این دلیل که عمداً وجود آنها نادیده گرفته می‌شود. در این وضع، خیلی دشوار است از اصل بقای اندازه حرکت استفاده شود. با این همه، با یک شیوه عملی، یعنی با دخالت دادن نیرو، می‌توان این مشکل را برطرف کرد. نظریه مربوط به این امر دینامیک ذره نامیده می‌شود.

طرفین معادله (۸.۷) را که تغییرات اندازه حرکت ذره‌های ۱ و ۲ را در فاصله زمانی $t' - t = \Delta t$ به هم مربوط می‌کند، بر Δt تقسیم می‌کنیم. می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = - \frac{\Delta p_2}{\Delta t} \quad (10.7)$$

این رابطه نشان می‌دهد که میانگین آهنگ تغییرات (بردار) اندازه حرکت ذرات در فاصله زمانی Δt از لحاظ مقدار برابر و از لحاظ جهت مخالف هم می‌باشند. اگر Δt را خیلی کوچک بگیریم، یعنی اگر حد معادله (۱۰.۷) را هنگامی که $\Delta t \rightarrow 0$ میل می‌کند حساب کنیم به دست می‌آید

$$\frac{dp_1}{dt} = - \frac{dp_2}{dt} \quad (11.7)$$

بدین طریق مشتق بردار اندازه حرکتها نسبت به زمان، در هر لحظه‌ای مانند t ، با هم برابر و در سوی مخالف هم می‌باشند. بنابراین، با به کار بردن مثالهای قبلی، مشاهده می‌شود که مشتق اندازه حرکت الکترون در یک اتم هیدروژن منزوی با اندازه حرکت پروتون برابر ولی دارای علامت مخالف آن می‌باشد. همچنین اگر فرض کنیم زمین و ماه یک دستگاه منزوی را تشکیل می‌دهند، مشاهده می‌شود که مشتق اندازه حرکت زمین نسبت به زمان برابر است با مشتق اندازه حرکت ماه نسبت به زمان با علامت مخالف.

مشتق اندازه حرکت یک ذره نسبت به زمان را «نیرو» می‌نامیم. به گفتهٔ دیگر، نیرویی که بر یک ذره «اعمال» می‌شود برابر است با

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (۱۲.۷)$$

از کلمهٔ «اعمال» گاهی برداشت اشتباه می‌شود، زیرا این فکر را القا می‌کند که چیزی به ذره وارد می‌شود. نیرو یک مفهوم ریاضی است که، بنا به تعریف، برابر است با مشتق اندازه حرکت یک ذره معلوم، که اندازه حرکت به نوبهٔ خود ناشی از برهم کنش این ذره با سایر ذرات است. بنا براین از نظر فیزیک، نیرو را می‌توان بیان یک برهم کنش دانست. اگر ذره آزاد باشد داریم $p = \text{const}$ و $F = dp/dt = 0$. بنا بر این می‌توان گفت که بر یک ذره آزاد هیچ نیرویی وارد نمی‌شود.

معادلهٔ (۱۲.۷) قانون دوم حرکت نیوتون است؛ ولی چنانکه ملاحظه می‌شود این رابطه بیشتر یک تعریف است تا یک قانون، و نتیجهٔ مستقیم اصل بقای اندازه حرکت می‌باشد. با استفاده از مفهوم نیرو، می‌توان معادلهٔ (۱۱.۷) را به صورت زیر نوشت:

$$F_1 = -F_2 \quad (۱۳.۷)$$

که در آن $F_1 = dp_1/dt$ نیروی مؤثر روی ذرهٔ ۱ به دلیل برهم کنش آن با ذرهٔ ۲ و $F_2 = dp_2/dt$ نیروی مؤثر روی ذرهٔ ۲ به سبب برهم کنش آن با ذرهٔ ۱ است. بالاخره نتیجه می‌گیریم

دو ذره برهم کنش می‌کنند، نیرویی که یک ذره روی ذرهٔ دیگر وارد می‌کند برابر است با نیرویی که ذرهٔ دوم روی ذرهٔ اول وارد می‌کند با علامت مخالف.

بیان فوق قانون سوم حرکت نیوتون نام دارد. این قانون نیز یکی از نتایج تعریف نیرو و اصل بقای اندازه حرکت است. گاهی آن را قانون کنش و واکنش (عمل و عکس العمل) نیز می‌نامند.

در اغلب مسائل می‌توان F_1 (و همچنین F_2) را به صورت تابعی از بردار r_{12} که مکان نسبی دو ذره را مشخص می‌کند، و یا احتمالاً به صورت تابعی از سرعت نسبی آنها بیان کرد. بنا به معادلهٔ (۹.۷) اگر m_1 خیلی بزرگتر از m_2 باشد، تغییر سرعت نسبی m_2 خیلی کوچکتر از تغییر سرعت m_1 می‌شود، و می‌توان در بعضی چارچوبهای مرجع لخت ذرهٔ ۲ را عملاً ساکن فرض کرد. در این صورت می‌توان از حرکت ذرهٔ ۱ بر اثر نیروی F_1 گفتگو کرد (شکل ۶.۷) و F_1 را تنها تابعی از مکان یا سرعت m_1 را نظر گرفت. در این موارد، معادلهٔ (۱۲.۷) از امتیاز خاصی برخوردار است. به عنوان مثال، این حالت در مورد اجسامی که بر اثر نیروی جاذبهٔ زمین حرکت می‌کنند، یا الکترونی که در اتم نسبت به هسته جابجا می‌شود صدق می‌کند.

یافتن $F(r_{12})$ برای بیشتر برهم کنشهایی که در طبیعت وجود دارند یکی از مهمترین مسائل فیزیک است. این امر دقیقاً بدین سبب است که فیزیکدانان قادر بوده‌اند شکلهای

تابعی $F(r, \dot{r})$ را با برهم کنشهای مختلف مشاهده شده در طبیعت مربوط سازند و در این مورد مفهوم نیرو خیلی مفید بوده است.

با استفاده از تعریف اندازه حرکت، معادله (۱۰.۷)، رابطه (۱۲.۷) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \quad (14.7)$$

اگر m ثابت باشد داریم

$$F = ma \quad \text{یا} \quad F = m \frac{dv}{dt} \quad (15.7)$$

می توان معادله (۱۵.۷) را چنین بیان کرد:

اگر جرم ثابت باشد، نیرو برابر است با حاصل ضرب جرم در شتاب.

توجه داشته باشید که در این حالت، نیرو با شتاب همراستا و همسو است. از معادله (۱۵.۷) دیده می شود که اگر نیرو ثابت باشد، شتاب $a = F/m$ نیز ثابت است، و حرکت با شتاب ثابت خواهد بود. این وضعی است که در حرکت سقوطی اجسام در نزدیکی سطح زمین پیش می آید: تمام اجسام با شتاب یکسان g به طرف زمین سقوط می کنند، در نتیجه نیروی جاذبه گرانشی که وزن نام دارد برابر می شود با

$$W = mg. \quad (16.7)$$

(به طور دقیقتر، باید بنویسیم $W = m g_0$ که g_0 و g با رابطه (۲۷.۶) به هم مربوط می شوند.)

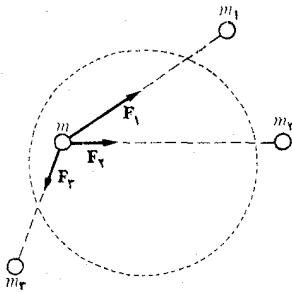
در نوشتن معادله (۱۲.۷) فرض کردیم که ذره تنها با یک ذره دیگر برهم کنش کند، همچنانکه از بحث پیش در معادله (۱۲.۷) نتیجه می شود و در شکل ۶.۷ نشان داده شده است. ولی اگر ذره m با ذرات دیگری مانند $m_1, m_2, m_3, \dots$ برهم کنش کند (شکل ۷.۷)، هر کدام از این ذرات موجب تغییری در اندازه حرکت ذره m می شوند که مطابق رابطه (۱۲.۷) با نیروهای $F_1, F_2, F_3, \dots$ مشخص می گردند. در این صورت آهنگ کلی تغییر اندازه حرکت ذره m برابر است با

$$dp/dt = F_1 + F_2 + F_3 + \dots = F.$$

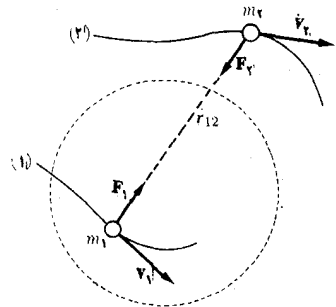
جمع برداری جمله های سمت راست، F ، نیروی برآیند وارد بر m نام دارد. این قاعده محاسبه برآیند نیروها قبلاً در فصل ۴ به کار رفته است. در شکل ۷.۷ برهم کنشهای ممکن بین m_1 و m_2 ، m_2 و m_3 ، m_3 و m_4 ، و غیره نشان داده نشده اند، زیرا به منظور فعلی ما ربطی پیدا نمی کنند. همچنین فرض کرده ایم که حضور ذرات $m_2, m_3, \dots$ هیچ تغییری در برهم کنش بین m_1 و m_2 نمی دهد، به عبارت دیگر، هیچ اثر تداخلی وجود ندارد.

در بخشهای بعدی این فصل، که راجع به حرکت یک ذره بحث می شود، نیروی برآیند F را تنها تابع مختصات ذره فرض خواهیم کرد، بدین طریق حرکت سایر ذراتی را که با این

ذره بر هم کنش می‌کند نادیده می‌گیریم. این تقریب بسیار مفید، چنانکه در بالا نیز اشاره شد، دینامیک ذره را تشکیل می‌دهد. در فصلهای بعدی، حرکت دستگاه ذرات و نیروهای وابسته به برهم‌کنشهای مختلفی را که برای فیزیکدانان معلوم اند بررسی خواهیم کرد.



شکل ۷.۷. نیروی برآیند روی ذره



شکل ۶.۷. در نتیجه اصل بقای اندازه حرکت، کنش و واکنش با هم برابر و علامتشان مخالف است.

۷.۷ نقدی بر مفهوم نیرو

اکنون با نظر انتقادی مفهوم نیرو را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ما این مفهوم (یعنی $F = dp/dt$) را در معادله (۱۲.۷) به عنوان مفهومی ریاضی معرفی کردیم که برای بیان آهنگ تغییر اندازه حرکت ذره بر اثر برهم‌کنشهای با سایر ذرات مناسب است. لکن، تصور ما از نیرو، در زندگی عادی، تا اندازه‌ای متفاوت است. هنگامی که بازیکنی ضربه‌ای به توپی وارد می‌کند، وقتی که با چکش میخی را می‌کوبند، زمانی که یک مشت زن ضربه مستقیمی به حریف خود می‌زند، یا یک وزنه طنابی را می‌کشد، «احساس» می‌کنیم که نیرویی (درواقع، برهم‌کنشی) وجود دارد. البته خیلی دشوار است این تصویر حسی از نیرو را با نیرو یا برهم‌کنش بین خورشید و زمین آشتی داد. با وجود این، در هر دو مورد برهم‌کنشی بین دو جسم حکمفرماست. دانشجو می‌تواند بگوید این درست، ولی فاصله بین زمین و خورشید بسیار زیاد است، در صورتی که بازیکن توپ را «لمس» می‌کند. اتفاقاً، نکته دقیقاً در همین جاست که این دو پدیده بر خلاف آنچه به نظر می‌رسد چندان هم اختلاف ندارند. هر اندازه که جسم جامدی متراکم به نظر برسد، باز اتمهای آن کاملاً از هم جدا هستند و برهم‌کنشها، آنها را در جاهایی که قرار دارند نگه می‌دارند، درست به گونه‌ای که سیازه‌ها به واسطه برهم‌کنشهایشان با خورشید در جای مشخص خود قرار دارند. به معنای میکروسکوپی، پا هرگز با توپ تماس پیدا نمی‌کند، هر چند مولکولهای آن به مولکولهای توپ نزدیک می‌شوند، و در نتیجه برهم‌کنشهایشان، آشفته‌گی موقتی در نظام آنها به وجود می‌آید. بدین ترتیب، کلیه نیروهای موجود در طبیعت مربوط به برهم‌کنشهای بین اجسامی است که در فاصله معینی از یکدیگر قرار دارند. در بعضی موارد این فاصله با مقیاس انسانی آن قدر

کوچک است که تمایل داریم آن را برابر صفر بپنداریم. در موارد دیگر، این فاصله با مقیاسهای بشری، بیش از اندازه بزرگ می باشد. ولی از دیدگاه فیزیک، هیچگونه اختلاف اساسی بین این دو نوع نیرو وجود ندارد. بنا بر این هنگامی که با فرایندهایی در مقیاس اتمی سرو کار داریم باید در به کار بردن مفاهیمی حسی و ماکروسکوپی که مانند «برخورد» بسیار دقیق باشیم.

این حقیقت که با اینکه دو ذره را فاصله ای از همدیگر جدا می کند ولی با هم وارد برهم کنش می شوند، بدین معنی است که باید سازوکاری برای انتقال برهم کنش در نظر گرفت. در فصلهای بعدی این سازوکار را بررسی خواهیم کرد؛ در اینجا فقط یادآور می شویم که بحث ما ایجاب می کند در معادله (۵.۷) تجدید نظری به عمل آید. به صورتی که معادله (۵.۷) نوشته شده است، برهم کنش بین دو ذره آنی فرض می شود. در صورتی که، چنانکه در فصلهای بعد بحث خواهد شد، برهم کنشها با سرعت معین، بدون شک با سرعت نور، انتشار پیدا می کنند. برای اینکه تأخیر حاصل از سرعت معین انتشار برهم کنش به حساب آید، باید یک جمله تکمیلی در معادله (۵.۷) وارد شود. هنگامی که این تصحیح صورت بگیرد، مفهوم نیرو اهمیت خود، و قانون کنش و واکنش معنی خود را از دست می دهد. با وجود این، تا زمانی که حرکت ذرات در مقایسه با سرعت نور، آهسته است، یا اینکه برهم کنشها خیلی ضعیف هستند، معادله (۵.۷) و نظریه ای که براساس آن شکل گرفته است، از تقریب کافی، برای تشریح وضعیتهای فیزیکی برخوردار است.

۸.۷ یکاهای نیرو

از معادلات (۱۲.۷) یا (۱۵.۷) می بینیم که یکای نیرو باید بر حسب یکای جرم و شتاب بیان شود. از این رو، در دستگاه یکاهای MKSC نیرو بر حسب m kg s^{-2} اندازه گیری می شود که نیوتون نام دارد و آن را با N نشان می دهند؛ به عبارت دیگر $N = \text{m kg s}^{-2}$. در نتیجه، نیوتون نیرویی است که هرگاه به جرمی به جرم یک کیلوگرم وارد شود به آن شتابی به اندازه 1 m s^{-2} می دهد.

هنوز هم یکای نیرو در دستگاه یکاهای cgs به نام دین را زیاد به کار می برند و آن نیرویی است که هرگاه به جرم یک گرمی وارد شود به آن شتابی برابر 1 cm s^{-2} می دهد؛ یا اینکه $1 = \text{cm gs}^{-2}$ دین. چون $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ و $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ است، به دست می آید: $N = (10^3 \text{ cm}) (1000 \text{ g}) = 10^5$ دین.

دو یکای دیگر نیز برای نیرو بوفور به وسیله مهندسين به کار می روند. این یکاها بر اساس رابطه (۱۶.۷) که وزن یک جسم را تعریف می کند بیان می شوند. یکی کیلوگرم-نیرو با علامت اختصاری kfg می باشد و آن وزن جسمی به جرم یک کیلوگرم است. بدین طریق، اگر m را برابر یک کیلوگرم در معادله (۱۶.۷) قرار دهیم به دست می آید $\text{kgf} = \text{g N} = 9.8067 \text{ N}$. یکای دیگر، پوند نیرو با علامت اختصاری lbf، نیرویی است برابر با وزن جسمی به جرم یک پوند. در اینجا نیز با قرار دادن $m = 1 \text{ lb}$ در معادله

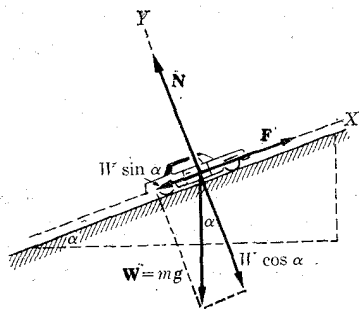
(۱۶۰۷) به دست می‌دهد $4448 \text{ N} = 1 \text{ lbf}$ توجه داشته باشید جرمی که بر حسب کیلوگرم یا پوند اندازه‌گیری شود و وزن آن که بر حسب کیلوگرم نیرو یا پوند نیرو اندازه‌گیری شود با عددهای یکسانی بیان می‌شوند.

هرچند که وزن، یک نیرو است و باید با نیوتون (N) بیان شود، معمولاً از نیروی چند کیلوگرمی، و نه چند کیلوگرم نیرو، صحبت می‌شود.

مثال ۳۰۷. اتومبیلی به جرم 1000 kg در خیابان سربالایی به شیب 20° بالا می‌رود. نیروی موتور را هنگامی که اتومبیل (الف) دارای حرکت یکنواخت است (ب) با شتاب 2 ms^{-2} حرکت می‌کند، پیدا کنید. در هر دو مورد نیروی وارد بر اتومبیل از طرف خیابان را حساب کنید.

حل: فرض کنید جرم اتومبیل برابر m باشد؛ نیروهای وارد بر اتومبیل در شکل (۸۰۷) نشان داده شده‌اند و عبارتند از وزن آن، $W = mg$ که به سمت پایین است، نیروی موتور F که به سمت سربالایی و نیروی N ناشی از خیابان که عمود بر آن است. با به کار بردن دو محور نشان داده شده در شکل و معادله (۱۵۰۷)، در می‌یابیم که حرکت در راستای محور X ها در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$F - mg \sin \alpha = ma \quad \text{یا} \quad F = m(a + g \sin \alpha).$$



شکل ۸۰۷

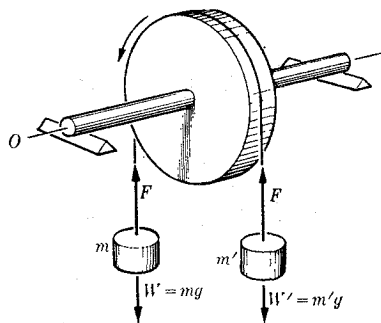
حرکتی در راستای محور Y ها وجود ندارد، بنا بر این

$$N - mg \cos \alpha = 0 \quad \text{یا} \quad N = mg \cos \alpha.$$

ملاحظه می‌شود که نیروی N حاصل از خیابان، مستقل از شتاب اتومبیل و مقدار عددی آن برابر 9210 N است. بر عکس، نیروی موتور F به شتاب بستگی دارد. وقتی که اتومبیل با حرکت یکنواخت جابجا می‌شود داریم $a = 0$ و $F = mg \sin \alpha$ که در مثال ما برابر است با $F = 3350 \text{ N}$. هنگامی که اتومبیل با شتاب 2 ms^{-2} حرکت می‌کند، $F = 3550 \text{ N}$ می‌شود.

به دانشجو توصیه می‌کنیم مسئله را برای حالتی که اتومبیل به سمت پایین حرکت می‌کند، حل کند.

مثال ۴۰۷. در شکل ۹۰۷ شتابهایی را که جرمهای m و m' با آن شتابها جابجا می‌شوند تعیین کنید. فرض کنید چرخ بدون مالش اطراف O حرکت می‌کند و از هرگونه اثر جرم



شکل ۹.۷

چرخ صرف نظر می شود (این اثرها را بعداً در فصل ۱۰ مورد بررسی قرار خواهیم داد).
حل: فرض کنیم حرکت در راستای سوی نشان داده شده با پیکان صورت می گیرد، به گونه ای که جرم m می افتد و جرم m' به سمت بالا می رود. ریسمان، غیر قابل انبساط فرض می شود؛ در این صورت هر دو جرم با شتاب یکسان a حرکت می کنند. دو جسم از طریق ریسمان برهم کنش می کنند، و بر یکدیگر نیروی مساوی و مخالفی را وارد می کنند که آن را با F نشان می دهیم. معادله حرکت سقوطی m با شتاب a عبارت از $mg - F = ma$ و معادله حرکت m' به سمت بالا، و با همان شتاب a عبارت است از $F - m'g = m'a$. با جمع کردن دو معادله فوق F حذف می شود و برای مقدار مشترک شتاب a به دست می آوریم

$$a = \frac{m - m'}{m + m'} g.$$

نیروی کششی ریسمان برابر می شود با

$$F = \frac{2mm'}{m + m'} g.$$

گاهی برای مطالعه قوانین حرکت شتابدار از وسیله مشابهی به نام ماشین آتوود استفاده می شود. یکی از برتریهای این دستگاه است که با انتخاب m و m' خیلی نزدیک به هم، می توان شتاب a را به قدر کافی کوچک کرد و این امر مشاهده حرکت را بسیار آسان می کند.
مثال ۵.۷. جسمی به جرم 10 kg بر اثر نیروی $F = (120t + 40) \text{ N}$ در خط مستقیم جا بجا می شود. در لحظه $t = 0$ جسم در نقطه $x_0 = 5 \text{ m}$ با سرعت اولیه $v_0 = 6 \text{ ms}^{-1}$ قرار دارد. سرعت و مکان جسم را در لحظات بعد به دست آورید.

حل: با به کار بردن معادله (۵.۷) به دست می آوریم

$$(120t + 40) = 10a \quad \text{یا} \quad a = (12t + 4) \text{ ms}^{-2}$$

از اینجا، با شیوه ای که در مثال ۲.۵ به کار رفت عمل می کنیم. چون در یک حرکت مستقیم الخط $a = dv/dt$ است، پس

$$dv/dt = 12t + 4$$

با انتگرال گیری از این رابطه به دست می آید

$$\int_0^v dv = \int_0^t (12t + 4) dt \quad \text{یا} \quad v = 6t^2 + 4t + 6 \text{ ms}^{-1}$$

با قرار دادن $v = dx/dt$ و انتگرال گیری مجدد داریم

$$\int_0^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t (6t^2 + 4t + 6) dt$$

$$x = 2t^3 + 2t^2 + 6t + 5 \text{ m.}$$

این رابطه امکان می دهد مکان جسم را در هر لحظه دلخواه به دست آوریم.

۹.۷ نیروهای مالش

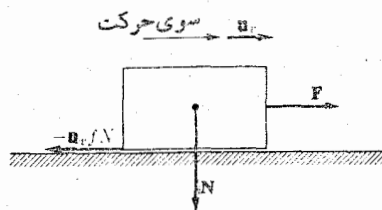
زمانی که دو جسم با هم تماس پیدا کنند، مانند کتابی که روی میزی قرار می گیرد، مقاومتی به وجود می آید که با حرکت نسبی دو جسم مخالفت می کند. به عنوان مثال، فرض کنید کتابی را روی میزی با سرعتی می کشیم. پس از رها کردن، حرکت کتاب بتدریج کند می شود و بالاخره می ایستد. از بین رفتن اندازه حرکت نشان می دهد که نیرویی با حرکت مخالفت می کند؛ این نیرو را نیروی مالش لغزشی می نامند. نیروی مالش از برهم کنش مولکولهای دو جسم ناشی می شود، که بر حسب اینکه دو جسم از مواد یکسان یا مختلف تشکیل شده باشند بترتیب نیروی همدردسش^۱ یا دوسش^۲ نامگذاری می شوند. مالش پدیده نسبتاً پیچیده ای است و به عوامل زیادی مانند حالت و جنس سطرها، سرعت نسبی آنها و غیره بستگی دارد. بتجربه ثابت می شود که نیروی مالش F_f کمیتی است که در بیشتر کاربردهای عملی، می توان آن را با نیروی عمودی N که یک جسم را به جسم دیگر می فشارد متناسب گرفت (شکل ۱۰.۷). ثابت این تناسب ضریب مالش نام دارد که آن را با f نشان می دهند می دهند. پس

$$F_f = fN. \quad (10.7)$$

نیروی مالش لغزشی همیشه با حرکت جسم مخالفت می کند و در نتیجه در سوی مخالف سرعت می باشد. می دانیم که با تقسیم بردار سرعت بر بزرگی آن، بردار یکا در راستای حرکت به دست می آید: $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$. می توان از این تعریف استفاده کرد و رابطه (۱۰.۷) را به صورت برداری زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_f = -\mathbf{u}_v fN.$$

به عنوان مثال، در مورد شکل (۱۰.۷) اگر سوی $\mathbf{F}$ نیروی مؤثر برای جابجا کردن جسم به سمت راست باشد (فرضاً ناشی از کشیدن ریسمانی که به آن وصل شده است)، نیروی برآیند افقی به سمت راست برابر است با $\mathbf{F} - \mathbf{u}_v fN$. با به کار گرفتن معادله (۱۵.۷)، معادله حرکت جسم به دست می آید:



شکل ۱۰.۷. نیروی مالش با حرکت مخالفت می کند و به نیروی عمودی بستگی دارد.

$$ma = F - u_v f N.$$

معمولاً دو نوع ضریب مالش وجود دارد: ضریب ایستایی^۱ مالش، f_s ، که هرگاه در نیروی عمودی ضرب شود، حداقل نیروی لازم را برای به حرکت در آوردن نسبی دو جسم در حال تماس و در حالت سکون نسبت را به هم به دست می دهد. ضریب جنبشی^۲ مالش، f_k ، که اگر آن را در نیروی عمودی ضرب کنیم نیروی لازم برای نگهداری دو جسم در حرکت نسبی یکنواخت به دست می آید. از آزمایشهایی که تا کنون روی مواد مختلف انجام گرفته ثابت شده است که f_s بزرگتر از f_k است. در جدول ۱۰.۷ مقادیر f_s و f_k برای چند جسم داده شده اند.

جدول ۱۰.۷. ضرایب مالش (سطحهای خشک)*

f_k	f_s	مواد
۰.۴۲	۰.۷۸	فولاد روی فولاد (سخت)
۰.۵۷	۰.۷۴	فولاد روی فولاد (نرم)
۰.۹۵	۰.۹۵	سرب روی فولاد (نرم)
۰.۳۶	۰.۵۳	مس روی فولاد (نرم)
۰.۵۳	۱.۱۰	نیکل روی نیکل
۰.۱۵	۱.۱۰	چدن روی چدن
		تفلن روی تفلن
۰.۰۴	۰.۰۴	(یا روی فولاد)

* این عددها را باید فقط به عنوان مقادیر متوسط پذیرفت، زیرا ضرایب مالش کمیت‌های میکروسکوپیکی هستند که به ویژگیهای میکروسکوپیکی دو ماده بستگی دارند، بنابراین این درمقادیر آنها کاهشها یا افزایشهای زیادی مشاهده می شود.

مالش یک مفهوم آماری است، زیرا نیروی F_f نمایش مجموع تعداد زیادی برهم کنش بین مولکولهای دو جسم در حال تماس می باشد. بدیهی است غیر ممکن است تک تک این برهم کنشهای مولکولی را به حساب آورد، بنابراین آنها را به صورت جمعی و با یک شیوه تجربی به دست می آورند و به طور تقریبی با ضریب مالش نمایش می دهند.

در مثالهای زیر چگونگی حل مسایل دینامیک را که در آنها نیروهای مالش بین جامدات دخالت دارند نشان می دهیم.

مثال ۶.۷. جسمی به جرم 80 kg روی یک سطح شیب دار به شیب 30° قرار دارد. چه نیرویی باید به جسم وارد شود تا (الف) جابجایی به سمت بالا باشد، (ب) جابجایی به سمت پایین باشد؟ در هر دو حالت حرکت جسم را یکبار یکنواخت و بار دوم با شتاب 10 ms^{-2} فرض کنید. ضریب مالش لغزشی روی صفحه 30° است.

حل: ابتدا حرکت جسم به سمت بالا را بررسی می کنیم. نیروهای وارد بر جسم در شکل ۱۱.۷ (الف) رسم شده اند. این نیروها عبارتند از وزن $W = mg$ در راستای قائم به سمت پایین، نیروی اعمال شده F (که به سمت بالای سطح فرض می کنیم) و نیروی مالش F_f که همیشه در سوی مخالف حرکت است و در این حالت به سمت پایین خواهد بود. * اگر نیروی وزن در راستاهای موازی و عمود بر صفحه حرکت تجزیه شود، با استفاده از رابطه (۱۵.۷)، حرکت جسم در صفحه چنین نوشته می شود:

$$F - mg \sin \alpha - F_f = ma.$$

بنا به معادله (۱۷.۷) باید نوشت $F_f = fN$. ولی در شکل ۱۱.۷ (الف) مشاهده می شود که نیروی عمودی که جسم را روی صفحه می فشارد برابر $mg \cos \alpha$ است. در نتیجه $F_f = f mg \cos \alpha$ ، و معادله حرکت به صورت زیر درمی آید:

$$F - mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) = ma.$$

از رابطه فوق به دو صورت می توان استفاده کرد. با داشتن شتاب a می توانیم نیروی اعمال شده F را حساب کنیم. یا برعکس، اگر نیروی F در دست باشد می توان شتاب a را پیدا کرد. در حالت اول داریم

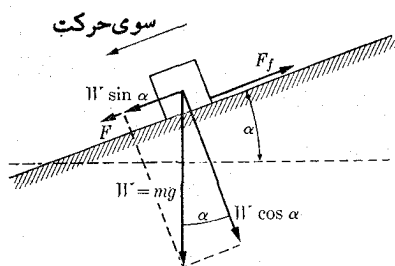
$$F = m[\alpha + g(\sin \alpha + f \cos \alpha)].$$

به عنوان مثال، اگر حرکت یکنواخت باشد، $a = 0$ است. با قرار دادن مقادیر عددی مربوط، به دست می آید $F = 595 \text{ N}$. هنگامی که جسم با شتاب 10 ms^{-2} جابجا می شود داریم $F = 603 \text{ N}$.

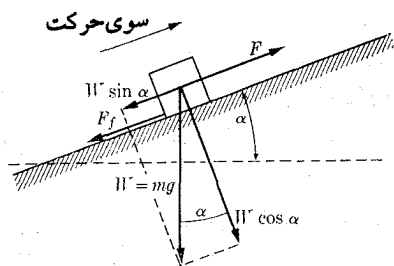
وقتی که جسم روی سطح شیب دار پایین می آید، نیروها مطابق آنچه که در شکل ۱۱.۷ (ب) آمده است خواهند بود. در اینجا سوی نیروی F به سمت پایین فرض شده

☆ نیروی دیگری که در شکل نشان داده نشده نیرویی است که سطح بر جسم وارد می کند. در این مسئله احتیاجی به نمایش این نیرو نیست.

است، ولی می‌توان سوی نیروی F را به سمت بالا نیز فرض کرد. به هر حال، چون F_f با حرکت مخالفت می‌کند سوی آن باید به سمت بالا باشد. اگر سوی پایین را به عنوان



(ب) جسم به طرف پایین حرکت می‌کند.



(الف) جسم به طرف بالا حرکت می‌کند.

شکل ۱۱.۷

سوی مثبت انتخاب کنیم، دانشجو می‌تواند تحقیق کند که این بار معادله حرکت به صورت زیر است:

$$F + mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) = ma$$

$$F = m[\alpha - g(\sin \alpha - f \cos \alpha)].$$

اگر حرکت یکنواخت ($a = 0$) باشد، با وارد کردن مقادیر عددی، به دست می‌آید $F = -1888 \text{ N}$ ، در حالی که اگر جسم با شتاب 10 ms^{-2} به پایین بلغزد، خواهیم داشت $F = -180 \text{ N}$. علامت منفی نشان می‌دهد که سوی نیرو در هر دو حالت به سمت بالا است، نه آن سمتی که فرض کردیم، یعنی پایین.

به دانشجو توصیه می‌کنیم حرکت جسم را هنگامی که هیچگونه نیرویی به آن وارد نمی‌شود ($F = 0$) تعیین و با توجه به نتیجه حاصل، علامت منفی F را که قبلاً به دست آمد توجیه کند.

۱۰.۷ نیروهای مالش در شاره‌ها

هنگامی که یک جسم در شاره‌ای، نظیر گاز یا آبگون، با سرعت نسبتاً کندی حرکت کند، می‌توان نیروی مالش را تقریباً متناسب با سرعت و در سوی مخالف حرکت در نظر گرفت. بنا بر این می‌نویسیم

$$F_f = -K\eta v. \quad (18.7)$$

ضریب K به شکل جسم بستگی دارد. به عنوان مثال، در مورد کره‌ای به شعاع R ، یک محاسبه دشوار به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$K = 6\pi R. \quad (19.7)$$

این رابطه به نام قانون استوکس^۲ شناخته می‌شود. ضریب η به مالش داخلی شاره

(یعنی نیروی مالش بین لایه‌های مختلف شاره که با سرعت‌های گوناگون حرکت می‌کنند)، بستگی دارد. مالش داخلی را وشکسانی^۱ (چسبندگی) و η را ضریب وشکسانی می‌نامند. در فصل ۲۴، تعریف کلی تری از ضریب وشکسانی خواهد آمد. ضریب وشکسانی در دستگاه یکا‌های MKSC بر حسب Nsm^{-2} بیان می‌شود، که می‌توان آن را به طریق زیر به دست آورد. از قانون استوکس، معادله (۱۹.۷)، می‌بینیم که K بر حسب m است (برای تمام اجسام و با هر شکلی که باشند همین واحد به کار می‌رود). پس بنا بر معادله (۱۸.۷)، η باید بر حسب $\text{N/m}(\text{ms}^{-1})$ بیان شود که درست همان است که در بالا ذکر شد. با یادآوری اینکه $\text{N} = \text{mkg s}^{-2}$ است، می‌توان وشکسانی را بر حسب $\text{m}^{-1}\text{kgs}^{-1}$ نیز بیان کرد، همچنین وشکسانی با $\text{cm}^{-1}\text{gs}^{-1}$ نیز بیان می‌شود که آن را پواز^۲ می‌نامند و با علامت اختصاری P نشان می‌دهند. یک پواز برابر یک دهم یکای وشکسانی در دستگاه یکا‌های MKSC است، زیرا

$$1\text{m}^{-1}\text{kgs}^{-1} = (10^2\text{cm})^{-1}(10^3\text{g})\text{s}^{-1} = 10\text{cm}^{-1}\text{gs}^{-1} = 10P.$$

ضریب وشکسانی آبگونها با افزایش دما کاهش می‌یابد، در صورتی که در گازها ضریب وشکسانی با افزایش دما افزایش می‌یابد. در جدول ۲.۷ ضریب وشکسانی چند شاره ذکر شده است. جدول ۲.۷. ضرایب وشکسانی، بر حسب پواز*

$\eta \times 10^4$	گاز	$\eta \times 10^2$	آبگون
۱۷۷۱	هوا (0°C)	۱۷۷۹۲	آب (0°C)
۱۷۸۱	هوا	۱۷۰۰۵	آب
۱۷۹۰	هوا (40°C)	۰۶۵۶	آب (40°C)
۰۹۳	هیدروژن	۸۳۳	گلیسرین
۰۹۷	آمونیاک	۹۸۶	روغن کرچک
۱۴۶	گاز کربنیک	۰۳۶۷	الکل

وقتی که جسمی در داخل یک شاره وشکسان تحت اثر نیروی F حرکت می‌کند، نیروی برآیند برابر است با $F - K\eta v$ و معادله حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ma = F - K\eta v. \quad (20.7)$$

اگر F ثابت فرض شود، شتاب a موجب افزایش مداوم v و زیاد شدن مالش شاره می‌گردد، به گونه‌ای که بالاخره سمت راست معادله برابر صفر می‌شود. در این صورت، شتاب نیز برابر صفر می‌شود و دیگر برای سرعت افزایشی وجود نخواهد داشت، زیرا مالش شاره

1. viscosity 2. poise

* بجز موارد ذکر شده، تمام اندازه‌ها در دمای 20°C هستند.

با نیروی اعمال شده کاملاً خنثی می‌شود. جسم در سوی نیرو با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. این سرعت را سرعت حد یا سرعت نهایی^۱ می‌نامند که برابر است با

$$v_L = F/K\eta. \quad (21.7)$$

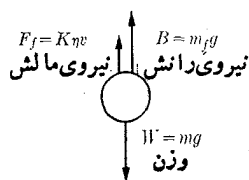
بنا بر این سرعت حد به K و η یعنی به وشکسانی شاره و شکل جسم متحرک بستگی دارد. در سقوط آزاد تحت تأثیر نیروی گرانی $F = mg$ ، معادله (۲۱.۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$v_L = \frac{mg}{K\eta}. \quad (22.7)$$

در معادله (۲۲.۷) باید نیروی رانش^۲ شاره را در نظر گرفت و آن را تصحیح کرد. بنا به اصل ارشمیدس نیروی رانش برابر است با وزن شاره جابجا شده توسط جسم. اگر m_f جرم شاره جابجا شده به وسیله جسم باشد، وزن آن برابر می‌شود با $m_f g$ به گونه‌ای که نیروی رانش به سمت بالا و برابر است با $B = -m_f g$ و نیروی مؤثر به سمت پایین برابر می‌شود با $g(m - m_f) = mg - m_f g$. از اینجا، به جای معادله (۲۲.۷) به دست می‌آید

$$v_L = \frac{(m - m_f)g}{K\eta}. \quad (23.7)$$

سه نیروی وارد بر جسم، در این حالت، در شکل ۱۲.۷ نشان داده شده‌اند. برای اجسام با ابعاد خیلی بزرگ و سرعت‌های بالا، نیروی مالش متناسب با توان‌های بالاتر سرعت می‌باشد و بحث بند پیش برای تشریح پدیده‌های فیزیکی کافی نیست.



شکل ۱۲.۷. نیروهای وارد بر جسمی که در داخل یک شاره سقوط می‌کند.

مثال ۷.۷. سرعت حد یک قطره باران را پیدا کنید. قطر قطره را $10^{-2}m$ و چگالی هوا نسبت به آب را مساوی $10^{-3} \times 1350$ فرض کنید.

حل: به فرض اینکه قطره‌های باران کروی و شعاع آنها r باشد، با به کار بردن معادله (۱۰.۱)، جرم هر قطره برابر می‌شود با

$$m = \rho V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

که در آن ρ چگالی آب است. اگر در این مسئله چگالی شاره را (که در اینجا هواست) با ρ_f نشان دهیم، داریم

$$m_f = \rho_f V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_f$$

و از آنجا

$$m - m_f = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_f).$$

چون قطره‌های باران کروی هستند از معادله (۱۹.۷) داریم $K = 6\pi r$. با به کار بستن معادله (۲۳.۷)، برای سرعت حد به دست می‌آید

$$v_L = \frac{2(\rho - \rho_f)r^2g}{9\eta}.$$

از جایگذاری مقادیر عددی $\eta = 1.81 \times 10^{-5} \text{ Nsm}^{-2}$ و $\rho = 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ به دست می‌آوریم $v_L = 30 \text{ ms}^{-1}$ یا تقریباً 107 km hr^{-1} . سرعت نهایی یک قطره درشت، با توجه به آنچه که در بند قبل از این مثال ذکر شد، نمی‌تواند خیلی متفاوت تر از این باشد.

مثال ۸.۷. سرعت ذره‌ای را که در داخل شاره‌ و شکسانی جابجا می‌شود به صورت تابعی از زمان تعیین کنید. فرض کنید معادله (۲۰.۷) برقرار است و نیرو ثابت و حرکت در خط مستقیم صورت می‌گیرد.

حل: چون حرکت مستقیم الخط است، با قراردادن $a = dv/dt$ در معادله (۲۰.۷) می‌توان نوشت

$$m \frac{dv}{dt} = F - K\eta v$$

و از آنجا

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K\eta}{m} \left(v - \frac{F}{K\eta} \right).$$

با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v - F/K\eta} = -\frac{K\eta}{m} \int_0^t dt$$

یا

$$\ln \left(v - \frac{F}{K\eta} \right) - \ln \left(v_0 - \frac{F}{K\eta} \right) = -\frac{K\eta}{m} t.$$

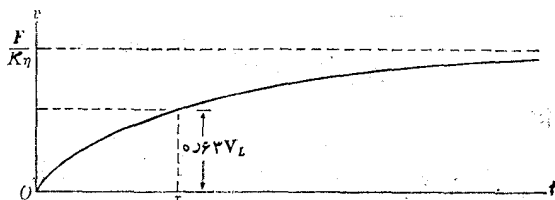
با مراجعه به معادله (پ.۱۸) که در آن $\ln e^x = x$ است، به دست می‌آید

☆ رجوع کنید به پیوست ریاضی در پایان کتاب.

$$v = \frac{F}{K\eta} + \left(v_0 - \frac{F}{K\eta} \right) e^{-(K\eta/m)t}$$

جمله دوم خیلی سریع کاهش می یابد و خیلی زود قابل صرف نظر کردن می شود، در نتیجه سرعت ثابت مانده و برابر $F/K\eta$ می شود که با معادله (۲۱.۷) مطابقت دارد. به عبارت دیگر، سرعت حد مستقل از سرعت اولیه است. اگر $v_0 = 0$ باشد، داریم

$$v = \frac{F}{K\eta} (1 - e^{-(K\eta/m)t})$$



شکل ۱۳.۷. نمودار سرعت بر حسب زمان برای جسمی که در یک شاره و شکسان سقوط می کند.

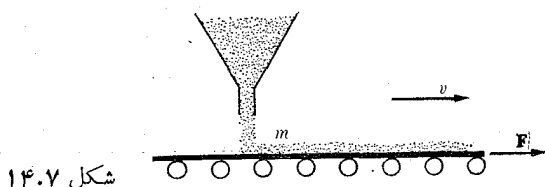
در شکل ۱۳.۷ نمودار تغییر سرعت v بر حسب t رسم شده است. زمان واهلش^۱ با $\tau = m/K\eta$ تعریف می شود. این زمانی است که در انتهای آن v برابر v_L می شود، چنانکه دانشجو خود می تواند مستقیماً آن را تحقیق کند. به دانشجو توصیه می کنیم که محاسبه را ادامه دهد و با به کار بردن نتیجه به دست آمده برای v ، مسافت پیموده شده را بر حسب زمان و همچنین مسافت پیموده شده مربوط به زمان τ را حساب کند.

۱۱.۷ دستگاههای با جرم متغیر

بخش اعظم دستگاههای فیزیکی را می توان با جرم ثابت در نظر گرفت، با وجود این، در بعض موارد، جرم ثابت نیست. مثال خیلی ساده یک قطره باران است. هنگام سقوط قطره، احتمال دارد بخار آب روی آن بنشیند یا مقداری از آب آن تبخیر شود، که در هر دو حالت جرم قطره تغییر می کند. فرض کنیم جرم قطره هنگامی که با سرعت v حرکت می کند برابر m باشد و بخار آب که دارای سرعت v_0 است، به میزان dm/dt روی آن چگالیده شود. آهنگ کل تغییر اندازه حرکت برابر است با مجموع $m dv/dt$ ، که مربوط به شتاب قطره است، و $(dm/dt)(v - v_0)$ که افزایش اندازه حرکت بخار آب ناشی می شود. بنابراین، با استفاده از معادله (۱۴.۷)، معادله حرکت قطره عبارت می شود از

$$F = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} (v - v_0)$$

برای حل این معادله، لازم است فرضهایی را روی چگونگی تغییر جرم با زمان بپذیریم. تسمه نقاله‌ای که در یک سر آن بار می‌گذارند و (یا) در سر دیگر آن را تخلیه می‌کنند، نمونه دیگری از جرم متغیر است. به عنوان مثال، تسمه شکل ۱۴.۷ را در نظر می‌گیریم، که در آن باری به میزان $dm/dt \text{ kgs}^{-1}$ به طور مداوم روی تسمه متحرک ریخته می‌شود. دستگاه



با سرعت ثابت v حرکت می‌کند و برای جابجا کردن تسمه نیروی F به آن وارد می‌شود. اگر M جرم تسمه و m جرم جسمی باشد که در لحظه t روی تسمه قرار دارد، اندازه حرکت کل دستگاه در این لحظه برابر است با $P = (M + m)v$. بنابراین نیروی وارد بر تسمه برابر می‌شود با

$$F = \frac{dP}{dt} = v \frac{dm}{dt}$$

توجه داشته باشید که در این حالت نیرو منحصراً به تغییر جرم مربوط می‌شود نه تغییر سرعت. شاید موشک جالبترین مثال از این نوع باشد، زیرا مصرف سوخت باعث کاهش جرم موشک می‌شود. در مثال زیر به تجزیه و تحلیل دینامیک یک موشک می‌پردازیم.

مثال ۹.۷. در حرکت یک موشک بحث کنید.

حل: موشک پرتابه‌ای است که به جای آنکه مانند گلوله توپ ضربه اولیه حاصل از انبساط گازهای داخلی خود را دریافت کند، به وسیله یک نیروی دایم ناشی از فرار گازهای حاصل از احتراق مواد سوختی خود موشک، به سمت جلو رانده می‌شود. در لحظه پرتاب موشک دارای مقدار معینی مواد سوختی است که بتدریج مصرف می‌شود و در نتیجه جرم آن رو به کاهش می‌گذارد.

سرعت موشک نسبت به یک دستگاه لخت را v می‌نامیم. در اینجا زمین را با تقریب کافی می‌توان دستگاه لخت فرض کرد. فرض کنیم v' نیز سرعت خروج گازها نسبت به زمین باشد. در این صورت سرعت خروج گازها نسبت به موشک برابر می‌شود با

$$v_e = v' - v.$$

این سرعت همیشه در سویی مخالف v و معمولاً ثابت است. در هر لحظه، جرم موشک و سوخت آن را m فرض می‌کنیم. در مدت زمان خیلی کوتاه dt ، جرم دستگاه موشک و مواد سوختی به مقدار کمی، یعنی به اندازه dm تغییر می‌کند. dm منفی است زیرا جرم کاهش

می‌یابد. در همین فاصله زمانی سرعت موشک به اندازه dv تغییر می‌کند. اندازه حرکت دستگاه در لحظه t برابر $p = mv$ است. چون dm مقدار مثبت جرم گازهای خارج شده است، اندازه حرکت در لحظه $t + dt$ برابر است با

$$p' = \underbrace{(m + dm)(v + dv)}_{\text{موشک}} + \underbrace{(-dm)v'}_{\text{گاز}}$$

$$= mv + m dv - (v' - v)dm$$

یا

$$p' = mv + m dv - v_e dm.$$

در رابطه فوق از جمله کوچک مرتبه دوم $dm dv$ صرف نظر شده است. تغییر اندازه حرکت در مدت dt برابر می‌شود با

$$dp = p' - p = m dv - v_e dm$$

و تغییر اندازه حرکت در واحد زمان برابر است با

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = v_e \frac{dm}{dt}.$$

اگر F نیروی خارجی وارد بر موشک باشد، به موجب معادله (۲۲.۷)، معادله حرکت آن چنین می‌شود:

$$m \frac{dv}{dt} - v_e \frac{dm}{dt} = F. \quad (24.7)$$

غالباً جمله دوم سمت چپ معادله (۲۴.۷) را نیروی پیشران^۱ موشک می‌نامند، زیرا برابر است با «نیروی» که از فرار گازها فراهم می‌شود. برای حل این معادله، باید فرضی روی v_e بشود. معمولاً v_e را ثابت فرض می‌کنند. با چشم پوشی از مقاومت هوا و تغییر شتاب گرانی با ارتفاع، می‌توان نوشت $F = mg$ ، در نتیجه معادله (۲۴.۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_e}{m} \frac{dm}{dt} = g. \quad (25.7)$$

برای سهولت، حرکت را در راستای قائم در نظر می‌گیریم. در این صورت v به سمت بالا و g و v_e به سمت پایین است و معادله (۲۵.۷) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{dv}{dt} - \frac{v_e}{m} \frac{dm}{dt} = -g.$$

با ضرب طرفین در dt و با انتگرال گیری از آغاز حرکت ($t = 0$)، که در آن سرعت v_0 و جرم m_0 است، تا لحظه اختیاری t ، داریم

$$\int_{v_0}^v dv + v_e \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -g \int_0^t dt.$$

در نتیجه

$$v - v_0 + v_e \ln \frac{m}{m_0} = -gt$$

یا

$$v = v_0 + v_e \ln \frac{m_0}{m} - gt. \quad (۲۶.۷)$$

اگر t زمان لازم برای مصرف تمام سوخت باشد، در این صورت، در معادله (۲۶.۷) m جرم نهایی و v بیشینه سرعتی است که موشک به آن می‌رسد. معمولاً $v_0 = 0$ و جمله آخر (در بیشتر موارد) قابل اغماض است. به عنوان مثال، اگر جرم اولیه موشکی $m_0 = 3000 \text{ ton}$ و جرم نهایی آن پس از تمام شدن مواد سوختی $m = 2780 \text{ ton}$ باشد و گاز با آهنگ 1290 kg در ثانیه خارج شود، در این صورت $t = 155 \text{ s}$ به دست می‌آید. اگر سرعت خروج گاز را 55000 ms^{-1} و $v_0 = 0$ فرض کنیم، طبقه اول موشک حداکثر به سرعت زیر می‌رسد:

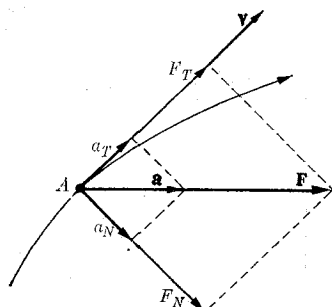
$$\begin{aligned} v &= 55000 \ln \frac{3000}{2780} \text{ ms}^{-1} - (9.8 \text{ ms}^{-2})(155 \text{ s}) \\ &= (55000 \ln 1.08 - 1520) \text{ ms}^{-1} = 2710 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

این سرعت تقریباً معادل 9750 kmhr^{-1} است. این مشخصات مربوط به موشک سانتورا است که دارای ۵ موتور است و هر موتور آن می‌تواند هنگام بلند شدن از زمین ۷۰ تن نیروی پیشران به موشک وارد کند.

۱۲.۷ حرکت منحنی الخط

در مثالهایی که ناکنون آوردیم در مورد حرکت مستقیم الخط بحث کردیم. حال حرکت منحنی الخط را در نظر می‌گیریم. اگر نیرو در راستای سرعت باشد، حرکت در خط مستقیم صورت می‌گیرد. برای به وجود آمدن حرکت منحنی الخط لازم است نیروی برآیند با راستای سرعت زاویه‌ای بسازد به گونه‌ای که شتاب، مؤلفه‌ای در راستای عمود بر سرعت داشته باشد تا بدین طریق بتوان تغییر راستای حرکت را توجیه کرد. از طرف دیگر، یادآور می‌شویم که (اگر جرم ثابت باشد) شتاب موازی نیرو است. رابطه بین این بردارهای مختلف در شکل ۱۵.۷ نشان داده شده است.

از رابطه $F = ma$ و در معادله (۴۴.۵) نتیجه می‌گیریم که مؤلفه نیرو در امتداد مماس بر مسیر، یا نیروی هماسی، برابر است با



شکل ۱۵.۷. رابطه بین مؤلفه‌های مماسی و قایم نیرو و شتاب در یک حرکت منحنی الخط

$$F_T = ma_T \quad \text{یا} \quad F_T = m \frac{dv}{dt} \quad (۲۷.۷)$$

و مؤلفه نیرو در امتداد عمود بر مسیر، یا نیروی عمودی یا مرکزگرا، برابر است با

$$F_N = ma_N \quad \text{یا} \quad F_N = \frac{mv^2}{\rho} \quad (۲۸.۷)$$

که در آن ρ شعاع انحنای مسیر است. نیروی مرکزگرا همیشه به سمت مرکز انحنای مسیر است. نیروی مماسی موجب تغییر بزرگی سرعت و نیروی مرکزگرا موجب تغییر راستای آن می‌شود. اگر نیروی مماسی برابر صفر باشد، شتاب مماسی وجود ندارد، و حرکت دایره‌ای یکنواخت خواهد بود. اگر نیروی مرکزگرا برابر صفر باشد، شتاب عمودی وجود ندارد، و حرکت مستقیم الخط می‌باشد.

در حالت ویژه حرکت دایره‌ای، ρ برابر شعاع دایره R و $v = \omega R$ است، به‌طوری که نیرو برابر می‌شود با

$$F_N = m\omega^2 R. \quad (۲۹.۷)$$

در یک حرکت دایره‌ای یکنواخت تنها شتاب a_N وجود دارد، که آن را نیز می‌توان با استفاده از معادله (۵۸.۵) به صورت برداری چنین نوشت: $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. در نتیجه $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{v})$ و چون $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است، بنابراین داریم

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \quad (۳۰.۷)$$

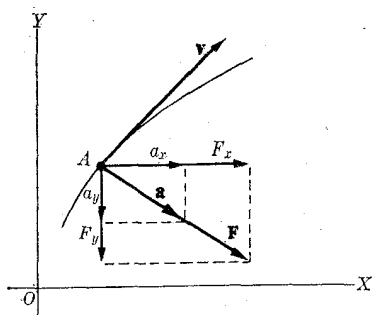
این یک رابطه ریاضی مفید بین نیرو، سرعت زاویه‌ای و اندازه حرکت یک ذره در حرکت دایره‌ای یکنواخت است.

گاهی اوقات راحت‌تر است از مؤلفه‌های قایم $\mathbf{F}$ استفاده شود (شکل ۱۶.۷). به‌عنوان مثال، در مورد حرکت در صفحه، معادله برداری $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ به دو معادله زیر تجزیه می‌شود:

$$F_x = ma_x \quad \text{و} \quad F_y = ma_y$$

یا

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt} \quad \text{و} \quad F_y = m \frac{dv_y}{dt} \quad (۳۱.۷)$$



شکل ۱۶.۷. رابطه بین مؤلفه‌های نیرو و شتاب در حرکت منحنی الخط، در مختصات قایم

با انتگرال‌گیری از این معادله‌ها، می‌توان سرعت و مکان ذره را در هر لحظه به دست آورد. در حالت کلی، اگر جرم متغیر مورد نظر باشد، باید رابطه $F = dp/dt$ را به کار برد. چون p موازی با سرعت است، مماس بر مسیر می‌باشد. بنا بر این می‌توان نوشت $p = u_T p$ و با استفاده از معادله (۴۲.۵)، داریم

$$F = \frac{dp}{dt} = u_T \frac{dp}{dt} + p \frac{du_T}{dt} = u_T \frac{dp}{dt} + u_N \frac{vp}{\rho}.$$

بنا بر این به جای معادله‌های (۲۷.۷) و (۲۸.۷)، داریم

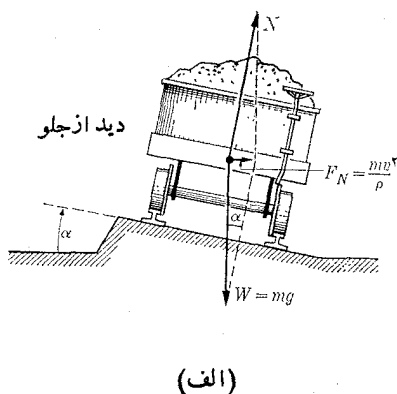
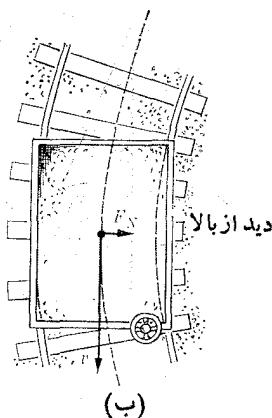
$$F_T = \frac{dp}{dt} \quad \text{و} \quad F_N = \frac{pv}{\rho}.$$

مثال ۱۵.۷. در پیچ راه آهن و جاده‌ها قسمت خارج را بلندتر می‌کنند تا برای خودروهایی که از پیچ می‌گذرند نیروی مرکزگرای لازم را ایجاد کنند. زاویه برآمدگی یا شیب را بر حسب سرعت خودرو در طول پیچ پیدا کنید.

حل: شکل ۱۷.۷ چگونگی ساختن پیچ راه‌ها را نشان می‌دهد؛ در اندازه زاویه‌ها مبالغه شده است. نیروهای وارد بر اتومبیل عبارتند از وزن $W = mg$ و نیروی عمودی واکنش جاده N . برآیند نیروها F_N باید برای ایجاد نیروی مرکزگرایی که از رابطه (۲۸.۷) به دست می‌آید کافی باشد. بنا بر این داریم $F_N = mv^2/\rho$ که در آن ρ شعاع پیچ است. در این صورت، از روی شکل به دست می‌آید

$$\tan \alpha = \frac{F_N}{W} = \frac{v^2}{\rho g}.$$

بنا براین، نتیجه حاصل به جرم خودرو بستگی ندارد. وقتی که α یک بار برای همیشه تعیین و تراورسها گذاشته شدند، این فرمول سرعت درستی را تعیین می کند که هر خودرو می تواند داشته باشد تا نیروهای جانبی به آن وارد نشود. برای سرعتهای کمتر از این یا کمی بیشتر، مسئله ای وجود ندارد، زیرا جاده نیروی ترازمندی لازم را فراهم می آورد. ولی در سرعتها خیلی زیادتر، سربچهها اتومبیل می گوشت از جاده بیرون بجهد.



شکل ۱۷.۷. ترتیب ساختن پیچها برای به وجود آوردن نیروی مرکزگرا

مثال ۱۱.۷. جرم m را که توسط نخ به طول L از نقطه ثابتی آویزان است با سرعت زاویه ای ω دور محور قایم می چرخانیم. زاویه نخ با قایم را پیدا کنید. این وسیله آونگ مخروطی نام دارد.

حل: دستگاه در شکل ۱۸.۷ نشان داده شده است. جرم A دور قایم OC جابجا می شود و دایره ای به شعاع $R = CA = OA \sin \alpha = L \sin \alpha$ رسم می کند. نیروهای وارد بر A عبارتند از نیروی وزن $W = mg$ و کشش نخ F . برآیند این دو نیرو F_N ، باید درست برابر نیروی مرکزگرا برای پیمودن دایره باشد. بنابراین با استفاده از معادله (۲۹.۷) داریم

$$F_N = m\omega^2 R = m\omega^2 L \sin \alpha.$$

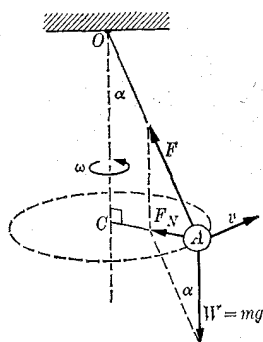
از شکل پیدا است که

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_N}{W} = \frac{\omega^2 L \sin \alpha}{g}$$

یا چون $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ است، به دست می آید

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 L}.$$

بنابراین هرچه سرعت بیشتر باشد زاویه α بزرگتر می‌شود، چیزی که آزمایش نیز آن را تأیید می‌کند. به‌همین دلیل، مدت‌ها آونگ مخروطی به‌عنوان تنظیم‌کننده سرعت درماشینهای بخار به‌کار می‌رفت، بدین ترتیب که هروقت سرعت از حد معینی که از پیش تعیین می‌شود تجاوز کند دریچه ورود بخار را می‌بندد و هنگامی که پایین‌تر از این حد باشد دریچه را باز می‌کند.

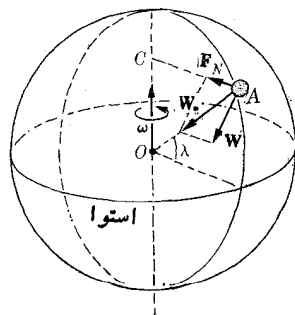


شکل ۱۸.۷. آونگ مخروطی

مثال ۱۲.۷. آثار چرخش زمین روی وزن یک جسم را تجزیه و تحلیل کنید.

حل: در بخش ۵.۶، از نقطه نظر سینماتیکی، حرکت یک جسم را نسبت به یک چارچوب مرجع لخت که همراه زمین می‌چرخد بررسی کردیم. در اینجا همان مسئله را از نظر دینامیکی مورد بحث قرار می‌دهیم.

شکل ۱۹.۷ ذره A را در سطح زمین نشان می‌دهد. نیروی گرانشی ناشی از جاذبه زمین را با W_0 نشان می‌دهیم. اگر زمین دارای حرکت چرخشی نبود، شتاب هر جسم در نزدیکی سطح زمین برابر $g_0 = W_0/m$ می‌بود. اکنون به سبب حرکت وضعی زمین،



شکل ۱۹.۷. اثر چرخش زمین روی وزن یک جسم

بخشی از این نیرو باید صرف به وجود آوردن نیروی مرکزگرای F_N شود که برای جابجا کردن A روی دایره‌ای به شعاع $CA = r \cos \lambda$ ، با سرعت زاویه‌ای ω لازم است. به‌گفته دیگر، با استفاده از معادله (۲۹.۷) داریم $F_N = m \omega^2 r \cos \lambda$. اختلاف $W_0 - F_N$

نیروی خالص W را به دست می دهد که موجب جذب جسم به سمت پایین می شود. بنا براین شتاب گرانی مؤثر عبارت است از $g = W/m$. اگر A به وسیله نخى از نقطه ای آویزان شود، (مانند خط شاقول)، نخ راستای W را اختیار می کند. نیروی کششی نخ روی A نیز باید برابر W باشد. بنا براین، وقتی که فنری برای تعیین وزن یک جسم به کار می رود، نیروی W را اندازه می گیرد. فقط در قطبها و استواست که W و W_0 در راستای هم قرار دارند و خط شاقول در راستای شعاعی است.

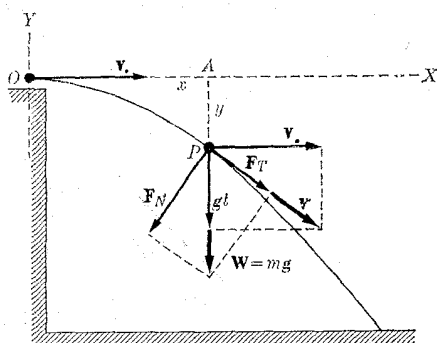
مثال ۲۰.۷. جسمی از بلندی یک ساختمان به طور افقی پرتاب می شود. نیروهای عمودی و مماسی وارد بر جسم را حساب کنید.

حل: اگر جسم با سرعت اولیه افقی v_0 پرتاب شود (شکل ۲۰.۷)، سرعت افقی در نقطه P نیز برابر v_0 ولی سرعت قائم آن gt است، که در آن t زمانی است که طول کشیده تا جسم به اندازه فاصله y پایین بیاید، یا زمانی است که برای پیمودن فاصله افقی $x = v_0 t$ لازم دارد. بنا براین سرعت کل پرتابه برابر است با

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

در نتیجه، بنا به معادله (۲۷.۷) نیروی مماسی برابر است با

$$F_T = m \frac{dv}{dt} = \frac{mg^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$



شکل ۲۰.۷

برای پیدا کردن نیروی مرکزگرا می توان از معادله (۲۸.۷) استفاده کرد، ولی در این صورت لازم است قبلاً شعاع انحنای مسیر که در اینجا یک سهمی است معلوم باشد. در این مورد از این محاسبه اجتناب می کنیم، زیرا می دانیم نیروی برآیند برابر است با

$$W = mg = \sqrt{F_T^2 + F_N^2}$$

$$F_N = \sqrt{W^2 - F_T^2} = \frac{mgv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

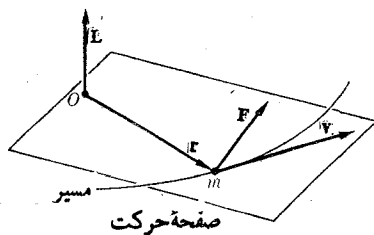
۱۳.۷ اندازه حرکت زاویه‌ای

اندازه حرکت زاویه‌ای ذره‌ای به جرم m که با سرعت $\mathbf{v}$ (بنابرین با اندازه حرکت $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) جابجا می‌شود نسبت به نقطه O (شکل ۲۱.۷) با حاصل ضرب برداری زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

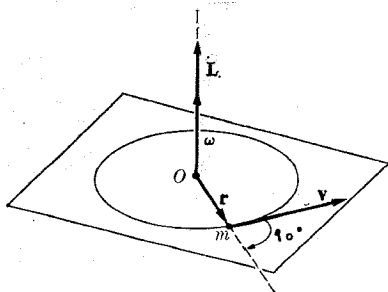
یا

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (32.7)$$



شکل ۲۱.۷. اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره

بنابرین اندازه حرکت زاویه‌ای برداری است عمود بر سطح حاصل از $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$. به طور کلی همراه با حرکت ذره، بزرگی و راستای اندازه حرکت زاویه‌ای آن نیز تغییر می‌کند. ولی



شکل ۲۲.۷. رابطه برداری بین سرعت زاویه‌ای و اندازه حرکت زاویه‌ای در یک حرکت دایره‌ای

اگر ذره در صفحه جابجا شود و نقطه O در این صفحه باشد، راستای اندازه حرکت زاویه‌ای بدون تغییر، یعنی عمود بر صفحه باقی می‌ماند، زیرا $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ هر دو در صفحه می‌باشند. در حالت حرکت دایره‌ای (شکل ۲۲.۷)، اگر O مرکز دایره باشد، بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ برهم عمودند و

$v = \omega r$ است، در نتیجه

$$L = mrv = mr^2\omega. \quad (33.7)$$

راستا و سوی L و ω یکی است، بنابراین معادله (۳۳.۷) را می توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$L = mr^2\omega. \quad (34.7)$$

اگر حرکت در صفحه، دایره ای نبوده، ولی منحنی الخط باشد، می توان سرعت را به مؤلفه های شعاعی و عمود بر راستای شعاع (عرضی)، مطابق آنچه که در بخش ۱۱.۵ توضیح داده شد، تجزیه کرد. در نتیجه به دست می آید $v = v_r + v_\theta$ (شکل ۲۳.۷). در نتیجه اندازه حرکت زاویه ای را می توان به صورت زیر نوشت:

$$L = m\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\theta$$

زیرا $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r = 0$ است (دو بردار موازی اند). بنابراین بزرگی L برابر می شود با $L = mrv_\theta$. بالاخره، چون بنا به معادله (۶۴.۵)، $v_\theta = r(d\theta/dt)$ است، می توان نوشت

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (35.7)$$

این رابطه هم ارز معادله (۳۳.۷) است که برای حرکت دایره ای به دست آوردیم، زیرا $\omega = d\theta/dt$ است، ولی در حالت کلی r ثابت نیست. با در نظر گرفتن معادله (۲۶.۳) در مورد حاصل ضرب برداری، اندازه حرکت زاویه ای یک ذره را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

یا بر حسب مؤلفه ها:

$L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$, $L_z = xp_y - yp_x$. (۳۶.۷)
باید توجه داشت که اگر حرکت در صفحه، مثلاً در صفحه XY صورت بگیرد، داریم $z = 0$ و $p_z = 0$ ، به طوری که $L_x = L_y = 0$ و تنها مؤلفه L_z وجود دارد. یعنی، همچنانکه قبلاً با استفاده از منطق دیگری نشان دادیم، اندازه حرکت زاویه ای بر صفحه عمود است.

اکنون از معادله (۲۳.۷) نسبت به زمان مشتق می گیریم؛ به دست می آید

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (37.7)$$

چون $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ و $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ است، داریم

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

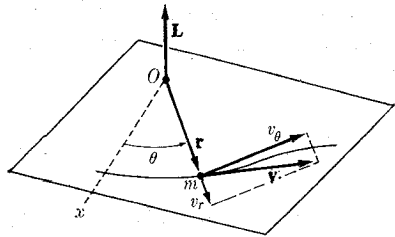
از طرف دیگر، بنا به معادله (۱۲.۷)، $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ است. بنا بر این معادله (۳۷.۷) به این صورت درمی آید:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

اگر به یاد داشته باشیم که بنا به تعریف (۵.۴) گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ نسبت به O برابر است با $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ، بالاخره به دست می آید

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (۳۸.۷)$$

باید توجه داشته باشیم این رابطه تنها زمانی درست است که $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}$ نسبت به یک نقطه اندازه گیری شوند.



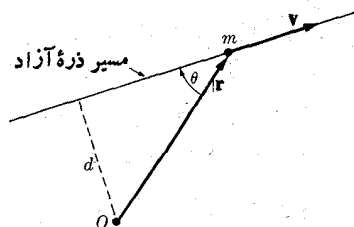
شکل ۲۳.۷. رابطه بین اندازه حرکت زاویه ای و مؤلفه عرضی سرعت

معادله (۳۸.۷) شباهت زیادی به معادله (۱۲.۷) دارد، که در آن اندازه حرکت زاویه ای $\mathbf{L}$ جانشین اندازه حرکت خطی $\mathbf{p}$ و گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ به جای $\mathbf{F}$ آمده است. این معادله یک رابطه اساسی درمسایل مربوط به حرکت چرخشی است و بیان می کند که مشتق اندازه حرکت زاویه ای ذره نسبت به زمان برابر است با گشتاور نیروی وارد بر آن ذره.

بیان فوق حاکی از آن است که تغییر $d\mathbf{L}$ در اندازه حرکت زاویه ای درفاصله زمانی کوتاه dt ، موازی است با $\boldsymbol{\tau}$ ، گشتاور وارد بر ذره.

۱۴.۷ نیروهای مرکزی

اگر گشتاور وارد بر ذره برابر صفر باشد ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$)، در این صورت بنا به معادله (۳۸.۷) باید داشته باشیم $d\mathbf{L}/dt = 0$ یا $\mathbf{L} = \text{const}$ (بردار ثابت). بنا بر این اگر گشتاور نیروهای وارد بر ذره برابر صفر باشد اندازه حرکت زاویه ای ذره ثابت است. و این شرط وقتی حاصل می شود که $\mathbf{F} = 0$ ، یعنی ذره آزاد باشد. از شکل ۲۴.۷ داریم $L = mvr \sin\theta = mvd$ که در آن $d = r \sin\theta$ است. این کمیت ثابت است زیرا تمام سازه های وارد در آن ثابت هستند، همچنین مسیر ذره آزاد خط مستقیم است و سرعت آن تغییر نمی کند.



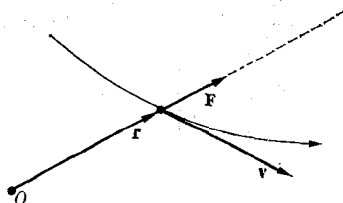
شکل ۲۴.۷. برای یک ذره آزاد اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است

اگر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ موازی باشند، به عبارت دیگر، اگر راستای $\mathbf{F}$ از نقطه O بگذرد، نیز شرط $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ حاصل است. نیرویی که راستای آن همیشه از نقطه ثابتی بگذرد، نیروی مرکزی نام دارد (شکل ۲۵.۷). بنابراین هنگامی که جسمی تحت تأثیر یک نیروی مرکزی حرکت می‌کند، اندازه حرکت زاویه‌ای آن ثابت باقی می‌ماند، عکس این مطلب نیز درست است. به بیان دیگر می‌توان گفت:

هنگامی که نیرو مرکزی باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به مرکز نیرو، یک ثابت حرکت است، و برعکس.

این نتیجه بسیار اهمیت دارد زیرا بسیاری از نیروهای طبیعت مرکزی‌اند. به عنوان مثال، زمین بر اثر یک نیروی مرکزی که راستای آن همیشه به سمت مرکز خورشید است دور آن می‌گردد. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای زمین نسبت به خورشید ثابت است. الکترون در اتم هیدروژن، اساساً بر اثر نیروی مرکزی ناشی از برهم‌کنش الکتروستاتیک با هسته حرکت می‌کند، و راستای این نیرو همیشه به سمت هسته است. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون نسبت به هسته ثابت است.

در اتم‌هایی که دارای چندین الکترون هستند، نیروی وارد بر هر الکترون دقیقاً مرکزی نیست، زیرا علاوه بر هم‌کنش مرکزی با هسته، برهم‌کنشهایی نیز با سایر الکترون‌ها وجود دارند. با وجود این، در حالت کلی، می‌توان نیروی میانگین مؤثر روی الکترون را مرکزی در نظر گرفت. در بعضی هسته‌ها، با تقریب اول، می‌توان فرض کرد که عناصر تشکیل دهنده آنها (پروتون‌ها و نوترون‌ها) تحت تأثیر نیروهای مرکزی میانگین حرکت می‌کنند.



شکل ۲۵.۷. در یک حرکت بر اثر نیروی مرکزی، اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است.

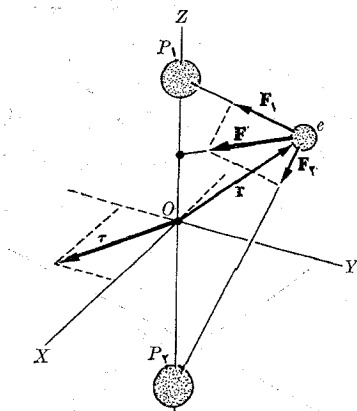
برعکس، در یک مولکول، نیروی وارد بر یک الکترون مرکزی نیست، زیرا این نیرو برآیند نیروهای جاذبه حاصل از هسته‌های مختلف و نیروهای دافعه ناشی از الکترونهاست. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون ثابت نیست. در یک مولکول دواتمی وضع جالبی به وجود می‌آید (شکل ۲۶.۷). الکترون e تحت تأثیر نیروهای F_1 و F_2 با برآیند $F = F_1 + F_2$ دور هسته‌های P_1 و P_2 می‌چرخد. نیروی برآیند F همیشه در صفحه حاصل از $\vec{Oe}$ و خط واصل بین دو هسته که محور Z می‌نامیم، قرار دارد. گشتاور برآیند روی الکترون نسبت به O ، مرکز جرم مولکول، (اگر از سایر برهم‌کنشهای الکترون چشم‌پوشی شود) عبارت است از

$$\tau = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

از شکل ۲۶.۷ پیداست که این گشتاور بر صفحه حاصل از بردار مکان $\mathbf{r}$ و محور Z عمود است. بنابراین گشتاور در صفحه XY قرار دارد، یعنی $\tau_z = 0$. از اینجا بنا به معادله (۳۸.۷) نتیجه می‌گیریم که $dL_z/dt = 0$ و $L_z = \text{const}$. بنابراین، هرچند که اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون ثابت نیست، ولی مؤلفه آن در راستای محور مولکول، یا محور Z ، ثابت است. این نتیجه نه تنها در مورد مولکولهای دواتمی، بلکه تمام مولکولهای خطی، یا به صورت کلی‌تر، برای هر حرکتی تحت تأثیر نیرویی که همیشه یک محور ثابت را قطع می‌کند، صادق است. چنین نیرویی نیروی محوری^۱ نام دارد. بنابراین

هنگامی که نیرو محوری باشد، مؤلفه اندازه حرکت زاویه‌ای (روی محور) ثابت است.

این نتیجه در مطالعه اتمها و مولکولها بسیار مفید است.



شکل ۲۶.۷. در حرکتی که بر اثر یک نیروی محوری صورت می‌گیرد، مؤلفه اندازه حرکت زاویه‌ای روی این محور، ثابت است.

حرکت ناشی از یک نیروی مرکزی همیشه در صفحه است، زیرا L ثابت است. بنابراین، با استفاده از معادله (۲۵.۷) داریم

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \quad (39.7)$$

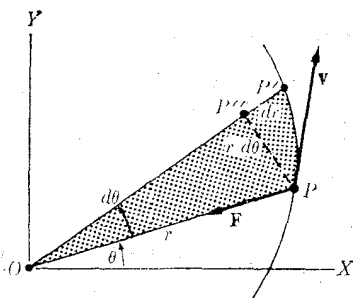
زمانی که ذره از نقطه P به نقطه P' جا بجا می‌شود (شکل ۲۷.۷)، بردار شعاع r ، مساحت مثلث OPP' را، جاروب می‌کند. در نتیجه

$$dA = \text{مساحت مثلث } OPP' = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

و مساحت جاروب شده در واحد زمان برابر است با

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

با مقایسه این نتیجه با معادله (۳۹.۷)، مشاهده می‌شود که $dA/dt = \text{const}$ ، یعنی در هر حرکت بر اثر نیروی مرکزی، بردار شعاع ذره در مدت زمانهای برابر، مساحتهای برابر را جاروب می‌کند. این نتیجه با توجه به ارتباط آن با کشف قوانین حرکت سیارات، دارای جنبه تاریخی است، و به نام قانون دوم کپلر شناخته می‌شود. در فصل ۱۳، هنگام بحث درباره حرکت سیارات یک بار دیگر آن را بتفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد.



شکل ۲۷.۷. بر اثر نیروهای مرکزی، بردار مکان در مدت زمانهای برابر، مساحتهای برابر را جاروب می‌کند.

مثال ۱۴.۷. در مورد پرتابه مثال ۱۳.۷، اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور را دور نقطه O پیدا کنید، سپس درستی معادله (۳۸.۷) را تحقیق کنید.

حل: با انتخاب OY و OX مطابق آنچه که شکل ۲۵.۷ نشان می‌دهد، مختصات نقطه P عبارت می‌شوند از $x = OA = v_0 t$ و $y = AP = gt^2/2$ و مؤلفه‌های سرعت پرتابه در نقطه P عبارتند از $v_x = v_0$ و $v_y = -gt$. با توجه به اینکه $p = mv$ است و با استفاده از رابطه سوم معادله‌های (۳۶.۷)، می‌توان نوشت

$$L_z = x p_y - y p_x = m(xv_y - yv_x) = -\frac{1}{4} mgv_0 t^2.$$

مؤلفه‌های نیروی وارد بر پرتابه در نقطه P عبارتند از $F_x = 0$ و $F_y = -mg$. بنابراین با به کار بردن معادله (۸.۴) به دست می‌آید

$$\tau_z = xF_y - yF_x = -mgv_0 t.$$

دانشجو خود می‌تواند تحقیق کند که در این حالت، $dL_z/dt = \tau_z$ و در نتیجه معادله (۳۸.۷) برقرار است.

مثال ۱۵.۷. اندازه حرکت زاویه‌ای زمین دور خورشید و نیز الکترون دور هسته در اتم هیدروژن را برآورد کنید. جهت سهولت حل مسئله، در هر دو مورد، برای اینکه بتوان روابط مربوط به شکل (۲۲.۷) را به کار برد، مدار حرکت را دایره فرض کنید.

حل: جرم زمین $598 \times 10^{24} \text{ kg}$ و فاصله میانگین آن از خورشید برابر $1.49 \times 10^{11} \text{ m}$ است. از تعریف ثانیه، که در بخش ۳.۲ آمده است، دوره حرکت انتقالی زمین دور خورشید برابر است با $3.16 \times 10^7 \text{ s}$. بنابراین طبق معادله (۵۱.۵) سرعت زاویه‌ای میانگین زمین دور خورشید برابر می‌شود با

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{3.16 \times 10^7 \text{ s}} = 1.98 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

در نتیجه، بنا به معادله (۳۳.۷)، اندازه حرکت زاویه‌ای زمین نسبت به خورشید برابر است با

$$L = m\omega r^2 = (598 \times 10^{24} \text{ kg})(1.98 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1})^2 \times (1.49 \times 10^{11} \text{ m})^2 = 2.67 \times 10^{40} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$$

از طرف دیگر، الکترون در اتم هیدروژن دارای جرم $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و فاصله میانگین آن از هسته برابر $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ و سرعت زاویه‌ای آن $4.13 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ است. در اینجا نیز معادله (۳۳.۷) را به کار می‌بریم. برای اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون دوره‌هسته به دست می‌آید

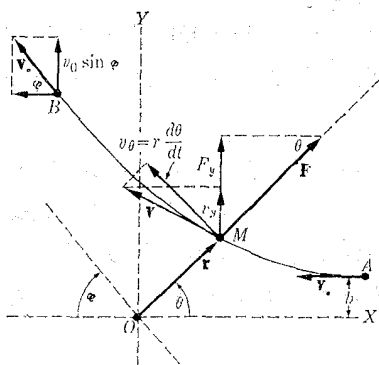
$$L = m\omega r^2 = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(4.13 \times 10^{16} \text{ s}^{-1})^2 \times (5.29 \times 10^{-11} \text{ m})^2 = 1.05 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$$

این عدد یکی از ثابتهای بسیار مهم فیزیک را تشکیل می‌دهد، و آن را با نماد $\hbar$ نشان می‌دهند و « $\hbar$ -تیره» می‌خوانند. اندازه حرکت زاویه‌ای اتمها و ذرات بنیادی معمولاً با یکی $\hbar$ بیان می‌شود. کمیت $\hbar = 2\pi\hbar$ ثابت پلانک خوانده می‌شود.

قطعاً دانشجو به بی‌تناسبی ستراگی که در مقدار کمیت‌های فیزیکی در دو مورد بالا وجود دارد، توجه می‌کند و از خود می‌پرسد آیا یک قانون می‌تواند بر دو مورد حاکم باشد؟ در شرایط حاضر به این سؤال پاسخ مثبت می‌دهیم، چون در هر دو مورد نیروی مرکزی

وارد می‌شود، اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است. با وجود این در مورد الکترون، چون یک ذره اتمی مورد بررسی قرار می‌گیرد، لازم است در روشهای کار تجدید نظرهایی بشود؛ تکنیک جدید مکانیک کوانتومی^۱ نام دارد، که فعلا در مورد آن وارد گفتگو نمی‌شویم، ولی از هم اکنون می‌توان با تأکید گفت که نتیجه این مثال در اساس با آنچه که از مکانیک کوانتومی به دست می‌آید تطبیق می‌کند.

مثال ۱۶.۷. پراکندگی^۲ یک ذره بر اثر یک نیروی مرکزی دافعه عکس مجذوری^۳.
حل: انحراف یا پراکندگی یک ذره را تحت تأثیر یک نیروی مرکزی دافعه متناسب با عکس مجذور فاصله بین ذره متحرک و یک نقطه ثابت یا مرکز نیرو، در نظر می‌گیریم. این مسئله بویژه از این نظر جالب است که در فیزیک اتمی و هسته‌ای کار برد دارد. به عنوان مثال، زمانی که یک پروتون که به وسیله دستگاهی مانند سیکلوترون شتاب گرفته است از نزدیکی هسته ماده هدف می‌گذرد، بر اثر نیرویی از همین نوع، که گفتیم مربوط به دافعه الکتروستاتیک هسته است، منحرف یا پراکنده می‌شود.



شکل ۲۸.۷. پراکندگی یک ذره بر اثر نیروی مرکزی عکس مجذوری

فرض کنیم مرکز نیرو و A ذره‌ای است که از فاصله خیلی دور با سرعت v به سمت O پرتاب می‌شود (شکل ۲۸.۷). فاصله b ، فاصله بین خط اثر v و خطی موازی آن که از O می‌گذرد، فراسنج برخورد^۴ نامیده می‌شود. اگر فرض شود که نیروی بین O و A مرکزی و دافعه است، ذره مسیر AMB را اختیار می‌کند. شکل منحنی به چگونگی تغییر نیرو با فاصله بستگی دارد. اگر نیرو با عکس مجذور فاصله متناسب باشد، یعنی اگر

$$F = \frac{k}{r^2} \quad (۴۰.۷)$$

باشد، چنانکه در بخش ۵.۱۳ ثابت خواهد شد، مسیر یک هذلولی است. وقتی که ذره در

نقطه A قرار دارد اندازه حرکت زاویه‌ای آن برابر است با $mv_0 b$. در هر مکان دیگری مانند M ، مطابق معادله (۳۵.۷)، اندازه حرکت زاویه‌ای آن برابر می‌شود با $mr^2(d\theta/dt)$. چون اندازه حرکت زاویه‌ای باید ثابت باقی بماند، زیرا نیروی مرکزی است، داریم

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mv_0 b. \quad (41.7)$$

معادله حرکت در راستای Y از ترکیب معادله (۴۰.۷) و معادله دوم (۴۱.۷) به دست می‌آید:

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y = F \sin \theta = \frac{k \sin \theta}{r^2}.$$

چنانچه با استفاده از معادله (۴۱.۷) r^2 را حذف کنیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{k}{mv_0 b} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

برای پیدا کردن انحراف ذره، باید از این رابطه بین دو انتهای مسیر انتگرال گرفت. در نقطه A مقدار v_y برابر صفر است، زیرا حرکت اولیه ذره موازی محور X ها و نیز $\theta = 0$ است. در نقطه B داریم

$$\theta = \pi - \varphi \quad \text{و} \quad v_y = v_0 \sin \varphi.$$

توجه داشته باشید که سرعت در نقطه B از نو برابر v_0 است، زیرا به سبب تقارن، سرعتی که ذره هنگام نزدیک شدن به نقطه O از دست داده، باید هنگام دور شدن از نقطه O مجدداً کسب کند. (اصل بقای انرژی که در فصل بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت نیز این امر را تأیید می‌کند.) در این صورت

$$\int_0^{v_0 \sin \varphi} dv_y = \frac{k}{mv_0 b} \int_0^{\pi - \varphi} \sin \theta d\theta$$

یا

$$v_0 \sin \varphi = \frac{k}{mv_0 b} (1 + \cos \varphi).$$

با توجه به اینکه $\cotg(\varphi/2) = (1 + \cos \varphi)/\sin \varphi$ است، بالاخره به دست می‌آید

$$\cotg \frac{1}{2} \varphi = \frac{mv_0^2 b}{k}. \quad (42.7)$$

این رابطه زاویه انحراف φ ذره را بر حسب فراسنج برخورد b به دست می‌دهد.

در بخش ۷.۱۴، این معادله را در مورد انحراف ذرات باردار به وسیله هسته‌ها به کار خواهیم برد. توجه داشته باشید که نتیجه (۴۲.۷) فقط برای یک نیروی عکس مجذوری صادق است. اگر رابطه بین نیرو و فاصله به نحو دیگری باشد، زاویه انحراف در معادله دیگری

صدق خواهد کرد. بنا بر این آزمایشهای پراکندگی برای پیدا کردن قانون نیرو در بین ذرات بسیار مفیدند.

در آزمایشگاههای فیزیک هسته‌ای «پراکندگی» را با شتاب دادن به الکترونها، پروتونها یا دیگر ذره‌ها به وسیلهٔ سیکلوترون، شتابدهندهٔ وان دوگراف^۱ یا وسایل دیگر، انجام می‌دهند و توزیع زاویه‌ای ذره‌های پراکنده شده را مشاهده می‌کنند.

۱۵.۷ ترازمندی و سکون

این فصل را با مروری کوتاه به مفاهیم سکون و ترازمندی پایان می‌دهیم. ذره‌ای نسبت به یک ناظر لخت در حال سکون است که سرعتی که ناظر برای آن اندازه می‌گیرد برابر صفر باشد. ذره‌ای نسبت به ناظر لخت در حال ترازمندی است، اگر شتاب آن برابر صفر باشد ($a = 0$). از معادلهٔ (۱۵.۷) نتیجه می‌گیریم که در این حالت $F = 0$ است، به گفتهٔ دیگر، ذره‌ای در حال ترازمندی است که برآیند نیروهای وارد بر آن برابر صفر باشد. این تعریف را در فصل ۴ به کار بردیم.

یک ذره ممکن است نسبت به یک ناظر لخت در حال سکون باشد، ولی در حال ترازمندی نباشد، به عنوان مثال، وقتی که سنگی به طور قایم به سمت بالا پرتاب می‌شود، سنگ هنگام رسیدن به حداکثر ارتفاع خود لحظه‌ای در حال سکون می‌ماند، با وجود این در حال ترازمندی نیست، زیرا نیروی جاذبهٔ زمین بر آن اثر می‌کند و چیزی این نیرو را خنثی نمی‌کند. بدین دلیل است که سنگ بلافاصله شروع به سقوط می‌کند.

همچنین احتمال دارد، ذره‌ای در حال ترازمندی باشد ولی نسبت به ناظر لخت در حال سکون نباشد. ذرهٔ آزاد مثالی از این گونه می‌باشد. چون هیچگونه نیرویی به آن اثر نمی‌کند، شتابی وجود ندارد و ذره در حال ترازمندی است. با وجود این ذره نسبت به بسیاری از ناظرهای لخت می‌تواند در حال سکون نباشد. وضعی که بیشتر با آن برخورد می‌شود آن است که یک ذره همزمان در حال سکون و در حال ترازمندی باشد. به همین دلیل است که خیلیها بغلط این دو مفهوم را مترادف در نظر می‌گیرند. بدیهی است، یک ذره در حال ترازمندی، ممکن است در بعض چارچوبهای مرجع لخت همیشه در حال سکون باشد.

فهرست منابع

1. «Inertia,» D. Sciama, *Sci. Am.*, February 1957, page 99.
2. «Galileo and the Law of Inertia,» S. Drake, *Am. J. Phys.* 32, 601 (1964).
3. «Isaac Newton,» I. Cohen, *Sci. Am.*, December 1955, page 73.
4. «Resource Letter PhM-1 on the Philosophical Foundation of Classical Mechanics,» M. Hesse, *Am. J. Phys.* 32, 905 (1964).
5. «The Conservation Laws of Physies,» G. Feinberg and M. Goldharber, *Sci. Am.*, October 1963, page 36.

6. «Friction,» F. Palmer, *Sci. Am.*, February 1951, page 54.
 7. «Resource Letter F-1 on Friction,» E. Rabinowicz, *Am. J. Phys.* 31, 897 (1963).
 8. «The Shape of Raindrops,» J. McDonald, *Sci. Am.*, February 1954, page 64.
 9. «Billiard-Ball Collision Experiment,» J. Bayes and W. Scott, *Am. J. Phys.* 31, 197 (1963).
 10. «Duration of Atomic Collisions,» O. Oldenberg, *Am. J. Phys.* 25, 94 (1957).
 11. *Concepts of Mass in Classical and Modern Physics*, M. Jammer. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1961.
 12. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1963; Sections 1-6 through 1-10, 3-10, 3-6, 3-7.
 13. *Introduction to Engineering Mechanics*, John V. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1951, Chapter 19.
 14. *Vector Mechanics*, D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 6 and 12; Sections 7-1 through 7-5.
 15. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 9, 10, and 18.
 16. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 1, Galileo; page 30, Newton.
 17. *Foundations of Modern Physical Science*, Gerald Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapters 16 and 17.
۱۸. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمه اعظم نیرومند راد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۲-۴، ۴-۴ و ۴-۵.

مسئله‌ها

۱۰۷. جسمی به جرم 32 kg با سرعت 60 ms^{-1} به سمت غرب حرکت می‌کند. جسم دیگری به جرم 16 kg با سرعت 50 ms^{-1} به سمت شمال جابجا می‌شود. دو جسم وارد برهم‌کش می‌شوند. در انتهای ثانیه دوم جسم اول با سرعت 30 ms^{-1} به سمت 30° شمال شرقی حرکت می‌کند. (الف) بزرگی و راستا و سوی سرعت جسم دوم را پیدا کنید. (ب) اندازه حرکت کل دو جسم را، در ابتدا و بعد از گذشتن دو ثانیه حساب کنید. (ج) تغییر اندازه حرکت هر جسم را پیدا کنید. (د) تغییر سرعت دو جسم، و (ه) مقدار این تغییر سرعتها را پیدا کنید؛ معادله (۹.۷) را تحقیق کنید.

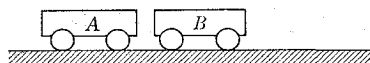
۲۰۷. تنه درختی به جرم 45 kg با سرعت 1 kmhr^{-1} در سرازیری رودخانه‌ای شناور است. قویی به جرم 10 kg که با سرعت 1 kmhr^{-1} در سوی مخالف جریان رودخانه پرواز می‌کند می‌کوشد روی تنه درخت بنشیند. قو روی تمام طول تنه درخت می‌لغزد و با سرعت 2 kmhr^{-1} از انتهای آن می‌افتد. سرعت نهایی تنه درخت را حساب کنید. از مالش آب صرف‌نظر می‌شود. آیا لازم است سرعتها بر حسب متر بر ثانیه تبدیل شوند؟

۳.۷. در واکنش شیمیایی $H + Cl \rightarrow HCl$ اتم هیدروژن با سرعت اولیه $10^5 \text{ ms}^{-1} \times 1.57$ به سمت راست حرکت می‌کند، درحالی که اتم کلر در راستای عمود با سرعت $10^4 \text{ ms}^{-1} \times 3.4$ حرکت می‌کند. بزرگی و راستای سرعت مولکول HCl را (نسبت به حرکت اولیه H) پیدا کنید. از جرمهای اتمی داده شده در جدول پ. ۱ استفاده کنید.

۴.۷. معادله‌ای بنویسید که بقای اندازه حرکت را در واکنش شیمیایی $A + BC \rightarrow AB + C$ بیان کند.

۵.۷. ذره‌ای به جرم 2 kg که با سرعت 4 ms^{-1} در راستای محور X ها حرکت می‌کند با ذرهٔ بیحرکتی به جرم 3 kg برخورد می‌کند. بعد از برخورد، ذرهٔ اول با سرعت 2 ms^{-1} در راستایی که با محور X زاویهٔ 40° می‌سازد حرکت می‌کند. تعیین کنید (الف) بزرگی و راستای سرعت ذرهٔ دوم را بعد از برخورد، و (ب) تغییر سرعت و اندازه حرکت هر ذره را. (ج) رابطهٔ (۹.۷) را تحقیق کنید.

۶.۷. اندازه حرکت دریافت شده توسط جرمهای 1 kg و 10^6 kg را هنگامی که از ارتفاع 100 m می‌افتند پیدا کنید. چون اندازه حرکتی را که زمین کسب می‌کند برابر و درسوی مخالف است، سرعت (به سمت بالا) اخذ شده به وسیلهٔ زمین را تعیین کنید. جرم زمین در جدول ۱۰.۱۳ داده شده است. در هر مورد بزرگی نیرو را حساب کنید.



شکل ۲۹.۷

۷.۷. دو گاری A و B به سمت یکدیگر می‌شوند (شکل ۲۹.۷). در آغاز B بیحرکت است، درحالی که A با سرعت 5 ms^{-1} به سمت راست حرکت می‌کند. بعد از برخورد، A با سرعت 1 ms^{-1} باز می‌گردد و B با سرعت 3 ms^{-1} به سمت راست جا بجا می‌شود. در آزمایش دیگری، بار 1 kg را روی گاری A نهاده و آن را با سرعت 5 ms^{-1} به سمت B هل می‌دهند. بعد از برخورد، A بیحرکت باقی می‌ماند در صورتی که B با سرعت 5 ms^{-1} به سمت راست حرکت می‌کند. جرم هریک از گاریها را پیدا کنید.

۸.۷. دستگاه ماه - زمین را در نظر بگیرید (حرکت این دستگاه را به دور خورشید نادیده می‌گیریم). در مدت ۲۸ روز ماه در دایره‌ای به شعاع $10^8 \text{ m} \times 40$ یکبار دور زمین می‌گردد. (الف) تغییر اندازه حرکت ماه در ۱۴ روز چقدر است؟ (ب) در همین مدت تغییر اندازه حرکت زمین چقدر است؟ (ج) آیا در دستگاه ماه - زمین، زمین ساکن است؟ (د) جرم زمین ۸۰ برابر جرم ماه است. تغییر سرعت زمین در ۱۴ روز چه مقدار است؟

۹.۷. دوشی A و B که در روی یک خط افقی بدون مالش حرکت می‌کنند، با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند. اندازه حرکت A برابر است با $p_A = p_0 - bt$ ، که در آن p_0 و b ثابت و t زمان است. اندازه حرکت B را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید، اگر (الف) B در آغاز بیحرکت باشد، (ب) اندازه حرکت اولیهٔ B برابر p_0 باشد.

۱۰.۷. خمپاره‌ای که به‌طور افقی با سرعت 1 km s^{-1} حرکت می‌کند در انفجار به سه تکه برابر تقسیم می‌شود. تکه اول با سرعت 16 km s^{-1} به حرکت افقی خود ادامه می‌دهد. تکه دیگر با زاویه 45° به سمت بالا پرتاب می‌شود و تکه سوم با همین زاویه ولی به سمت پایین می‌افتد. سرعت تکه‌های دوم و سوم را پیدا کنید.

۱۱.۷. ماهواره‌ای با سرعت 1 km s^{-1} «به‌طور افقی» نسبت به زمین حرکت می‌کند. می‌خواهند یک بار 50 kg را با بیرون راندن آن به‌طور افقی، مستقیماً به سمت زمین رها کنند. سرعت ماهواره را پس از بیرون انداختن بار حساب کنید. می‌دانیم که جرم ماهواره (به انضمام جرم بار) 450 kg است. سرعت بار نسبت به زمین بلافاصله پس از بیرون افتادن از ماهواره چقدر است؟

۱۲.۷. یک واگن خالی راه آهن به جرم 10^5 kg با سرعت 5 ms^{-1} از سطح شیب‌داری جهت بارگیری به زیر یک دستگاه زغال پرکن سرازیر می‌شود. اگر هنگام عبور واگن از زیر دستگاه، $10^5 \text{ kg} \times 2$ زغال سنگ در آن بار شود، (الف) سرعت نهایی واگن چقدر می‌شود؟ (ب) اگر در انتها زغال سنگها از طریق قیفهای زیر واگن از آن بیرون ریخته شوند سرعت واگن چقدر می‌شود؟ زغالها نسبت به واگن در خط راست پایین می‌ریزند. (ج) فرض کنیم که بتوان تمام زغال را یکباره از عقب واگن بیرون ریخت، به گونه‌ای که بتوان زغال را نسبت به زمین بیحرکت در نظر گرفت، در این حالت واگن چه سرعتی به خود می‌گیرد؟ (د) اگر زغال تحت زاویه‌ای نسبت به راستای حرکت واگن بیرون پرتاب شود، در چه شرایطی نتیجه (ج) به دست می‌آید؟

۱۳.۷. بارکشی به جرم 150 kg که با سرعت 2 ms^{-1} در خط خود حرکت می‌کند در انتهای خط به مانع ثابتی برخورد می‌کند. تغییر اندازه حرکت بارکش و نیروی میانگین وارد بر آن چقدر است، اگر در 18 ms^{-1} بارکش (الف) از حرکت باز بماند؛ (ب) با سرعت 1 ms^{-1} برگردد؟ بقای اندازه حرکت در برخورد را بررسی کنید.

۱۴.۷. چه نیروی ثابتی لازم است تا در مدت 5 s اندازه حرکت جسمی را از 2300 kgms^{-1} تا 3000 kgms^{-1} افزایش دهد؟

۱۵.۷. اتومبیلی دارای 1500 kg جرم و سرعت اولیه 60 km hr^{-1} است. راننده با ایجاد یک شتاب ثابت در خلاف جهت حرکت، ترمز می‌کند و اتومبیل بعد از 12 دقیقه متوقف می‌شود. نیروی وارد بر اتومبیل را تعیین کنید.

۱۶.۷. چه مدت زمانی نیروی ثابت 80 N باید روی جسمی به جرم 125 kg اثر کند تا آن را از حرکت باز دارد؟ می‌دانیم سرعت اولیه جسم 72 km hr^{-1} است.

۱۷.۷. جسمی به جرم 10 g از ارتفاع 3 m روی یک توده شن می‌افتد. جسم قبل از متوقف شدن 3 cm در شن فرو می‌رود. چه نیرویی از طرف شن به جسم وارد شده است؟

۱۸.۷. دو قاطر یک کرجی را توسط دو ریسمان که به جلوی کرجی وصل شده‌اند در کانالی به جلو می‌کشند. زاویه بین دو ریسمان 40° و کشش آنها به ترتیب 2500 N و

۲۰۰۰N است. (الف) به فرض اینکه جرم کرجی 1700 kg باشد آب هیچگونه مقاومتی درمقابل حرکت نشان ندهد، شتاب آن چقدر است؟ (ب) چنانچه حرکت کرجی یکنواخت باشد، مقاومت آب چقدر است؟

۱۹۰۷. شخصی برکف کامیونی که با سرعت 35 kmhr^{-1} حرکت می‌کند سرپا ایستاده است. اگر درمدت 2 s سرعت کامیون به (الف) 45 kmhr^{-1} ، (ب) 9 kmhr^{-1} برسد، این شخص باید درچه جهت و تحت چه زاویه‌ای خم شود تا نیفتد؟

۲۰۰۷. آسانسوری به جرم 250 kg ، سه نفر به جرمهای 80 ، 60 و 100 کیلوگرم را با خود حمل می‌کند. نیرویی که ازطرف موتور بر آن وارد می‌شود برابر با 5000 N است. آسانسور با چه شتابی بالا می‌رود؟ اگر آسانسور درآغاز ساکن باشد درمدت 5 s تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۲۱۰۷. فرض کنیم شخص 100 کیلوگرمی مسئله پیش، روی ترازویی قرار گرفته است. هنگامی که آسانسور شتاب می‌گیرد «وزن» این شخص چقدر است؟

۲۲۰۷. یک آسانسور خالی به جرم 500 kg که ازحالت سکون شروع به حرکت کرده است با شتاب ثابتی در راستای قائم پایین می‌رود و در 10 ثانیه اول 30 m جا بجا می‌شود. کشش کابل نگهدارنده آسانسور را حساب کنید.

۲۳۰۷. پسری به جرم 60 kg روی ترازویی ایستاده است. اگر این پسر ناگهان با شتاب 245 cms^{-2} خود را به سمت بالا بکشد. ترازو چه عددی را نشان می‌دهد؟ با به کار بردن مایشینی که شتابهای یک جسم را با اندازه‌گیری نیروهای وارد بر آن اندازه‌گیری می‌کند، درآثر مربوط به این مسئله بحث کنید (چنین دستگاهی شتاب‌سنج نامیده می‌شود که وسیله بسیار مفیدی درصنعت و آزمایشگاههای پژوهشی است).

۲۴۰۷. جرم 200 g با سرعت ثابت 50 cms^{-1} حرکت می‌کند. هنگامی که جرم در نقطه $\mathbf{r} = -\mathbf{u}_x 10\text{ cm}$ قرار دارد، نیروی ثابت $\mathbf{F} = -\mathbf{u}_x 400\text{ dyn}$ بر آن وارد می‌شود. تعیین کنید (الف) زمانی را که طول می‌کشد تا جسم بایستد؛ (ب) مکان جرم را در لحظه‌ای که می‌ایستد.

۲۵۰۷. شخصی به جرم 90 kg در آسانسوری قرار دارد. نیروی وارد ازطرف کف آسانسور به این شخص را در حالت‌های زیر تعیین کنید: (الف) آسانسور با سرعت یکنواختی بالا می‌رود؛ (ب) آسانسور با سرعت یکنواختی پایین می‌رود؛ (ج) آسانسور دارای شتاب 3 ms^{-2} به سمت بالاست؛ (د) با همین شتاب به سمت پایین می‌رود؛ (ه) کابل پاره می‌شود و آسانسور آزادانه سقوط می‌کند.

۲۶۰۷. جسمی به جرم 2 kg روی یک سطح افقی بدون مالش با نیروی افقی $F = 55 + t^2$ حرکت می‌کند. F بر حسب نیوتون و t بر حسب ثانیه است. سرعت جسم را در $t = 5\text{ s}$ حساب کنید. (در لحظه $t = 0$ جسم بی‌حرکت است).

۳۷.۷. جسمی به جرم m در راستای محور X مطابق قانون $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ حرکت می‌کند. A ، ω و φ ثابت هستند. نیروی وارد بر جسم را به صورت تابعی از مکان آن حساب کنید. سوی نیرو هنگامی که x (الف) مثبت، (ب) منفی باشد چیست؟

۳۸.۷. نیروی برآیند وارد بر جسمی به جرم m برابر است با $F = F_0 - kt$ ، که در این رابطه F_0 و k ثابت و t زمان است. شتاب را پیدا کنید. با انتگرال‌گیری، سرعت و مکان جسم را به دست آورید.

۳۹.۷. روی ذره‌ای که در آغاز در حال سکون است، در فاصله زمانی $0 \leq t \leq 2T$ ، نیروی $F = F_0 [1 - (t - T)^2 / T^2]$ اثر می‌کند. ثابت کنید که سرعت ذره در انتهای این فاصله زمانی برابر است با $\frac{4}{3} F_0 T / m$. توجه داشته باشید که سرعت منحصرأ به حاصل ضرب $F_0 (2T)$ بستگی دارد و اگر T خیلی کوچک باشد، با بزرگ کردن متناسب F_0 ، به همان سرعت می‌رسیم. نمودار F را بر حسب t رسم کنید. آیا می‌توانید یک وضع فیزیکی را تصور کنید که این مسئله بتواند توصیف متناسبی برای آن باشد؟

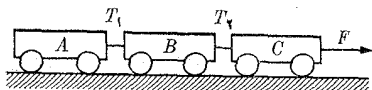
۳۵.۷. جسمی که در آغاز در x بیحرکت است بر اثر نیروی $F = -K/x^2$ در خط راست به حرکت درمی‌آید. ثابت کنید که سرعت جسم در نقطه x برابر است با $v^2 = 2(K/m)(1/x - 1/x_0)$. این روش را می‌توان برای تعیین سرعت جسمی که از ارتفاع زیاد روی زمین می‌افتد به کار برد.

۳۹.۷. مثال ۳.۷ را در حالتی که اتومبیل از سرآشینی پایین می‌رود حل کنید.

۳۲.۷. جسمی به جرم 1 kg بدون مالش روی صفحه شیب‌داری که با سطح افق زاویه 30° می‌سازد حرکت می‌کند. اگر یک نیروی 8 N به موازات صفحه و (الف) به سمت بالا، (ب) به سمت پایین بر آن اثر کند، جسم با چه شتابی جابجا می‌شود؟

۳۳.۷. کامیونی به جرم 5000 kg به مدت 20 s با سرعت 30 ms^{-1} به سمت شمال راه می‌پیماید، بعد به سمت جاده‌ای در امتداد 70° شمال شرقی می‌پیچد. پیدا کنید (الف) تغییر اندازه حرکت آن را؛ (ب) بزرگی و راستای نیروی میانگین وارد بر کامیون را.

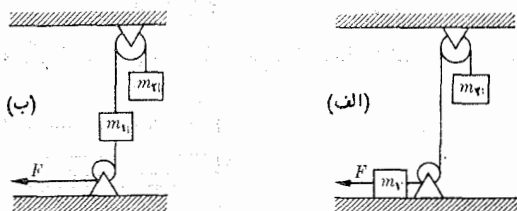
۳۴.۷. اجسام شکل ۳۵.۷ بترتیب دارای جرمهای 10 kg ، 15 kg و 20 kg می‌باشند. نیروی F برابر 50 N روی C وارد می‌شود. شتاب دستگاه و کشش هریک از کابلها را پیدا کنید. در حالتی که این دستگاه به جای حرکت در راستای افقی در راستای قائم حرکت کند، مسئله را مورد بحث قرار دهید.



شکل ۳۵.۷

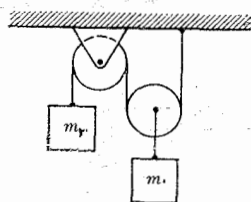
۳۵.۷. شتاب اجسام شکل ۳۱.۷ و کشش نخ آویز را حساب کنید. ابتدا مسئله را به طور جبری حل کنید. نتیجه را برای حالتی که $m_1 = 50 \text{ g}$ ، $m_2 = 80 \text{ g}$ و $F = 105 \text{ dyn}$

است به کار بندید.



شکل ۳۱.۷

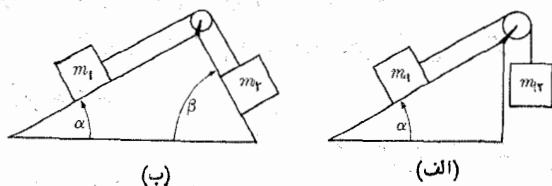
۳۶.۷. اجسام شکل ۳۲.۷، چنانکه شکل نشان می‌دهد، توسط نخ‌ی به هم وصل شده‌اند. به فرض اینکه قرقره‌ها بدون مالش باشند، شتاب اجسام و کشش نخ را حساب کنید. ابتدا مسئله را به طور جبری حل کنید، سپس نتیجه را در حالتی که $m_1 = 8\text{ kg}$ و $m_2 = 2\text{ kg}$ باشد به کار بندید.



شکل ۳۲.۷

۳۷.۷. شتاب حرکت اجسام شکنهای ۳۳.۷ (الف) و (ب) و همچنین کشش نخ‌ها را تعیین کنید. فرض کنید اجسام بدون مالش می‌لغزند. ابتدا مسئله را در حالت کلی حل کنید، سپس اعداد زیر را قرار دهید و نتیجه را به دست آورید:

$$m_1 = 200\text{ g}, m_2 = 180\text{ g}, \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ.$$



شکل ۳۳.۷

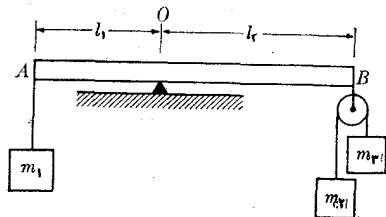
۳۸.۷. مسئله پیش را در حالتی که ضریب مالش روی سطح اول f_1 و روی سطح دوم f_2 باشد، از نو حل کنید. همه حرکات ممکن را مورد بررسی قرار دهید.

۳۹.۷. (الف) ثابت کنید در شرایطی که رابطه زیر برقرار باشد، میله AB در شکل ۳۴.۷

در حال ترازمندی است:

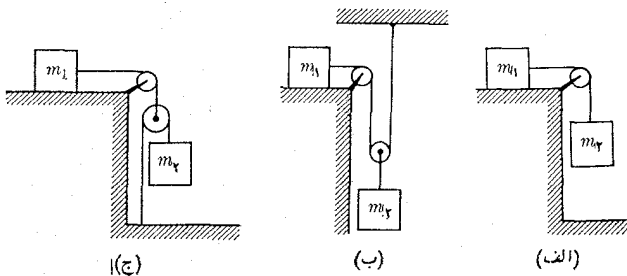
$$m_1(m_1 + m_2)l_1 = 4m_1m_2l_2$$

(ب) نیرویی را که تکیه‌گاه روی میله وارد می‌کند پیدا کنید.



شکل ۳۴.۷

۴۰.۷. در شکل ۳۵.۷، شتاب جرم‌های m_1 و m_2 و کشش نخ‌ها را حساب کنید. تمام قرقره‌ها بدون وزن و بدون مالش فرض می‌شوند و اجسام بدون مالش می‌لغزند. چه دستگاهی به جرم m_1 شتابی پیش از شتاب سقوط آزاد می‌تواند بدهد؟ مسئله را ابتدا به‌طور جبری حل کنید، سپس حالتی را در نظر بگیرید که $m_1 = 4\text{ kg}$ و $m_2 = 6\text{ kg}$ باشد.



شکل ۳۵.۷

۴۱.۷. نشان دهید که شتاب اجسام شکل ۳۶.۷، به‌فرض

$$P = g/(m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3)$$

دارای بزرگیهای زیر هستند:

$$a_1 = 4m_2m_3P \quad (\text{الف})$$

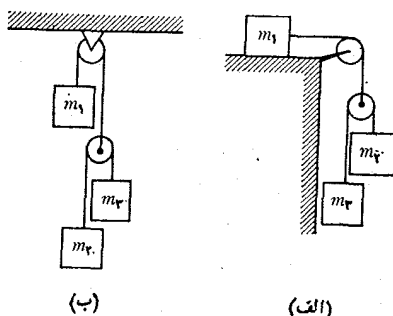
$$a_2 = (m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3)P$$

$$a_3 = (m_1m_3 - m_1m_2 + 4m_2m_3)P$$

$$a_1 = (4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3)P \quad (\text{ب})$$

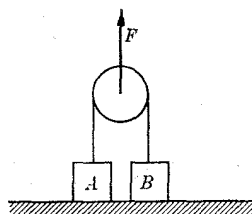
$$a_2 = (3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3)P$$

$$a_3 = (m_1m_3 - 3m_1m_2 + 4m_2m_3)P.$$



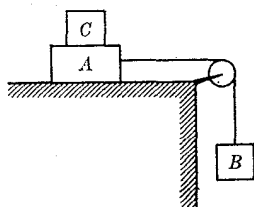
شکل ۳۶.۷

۴۲.۷. در شکل ۳۷.۷، A و B بترتیب دارای جرمهای 3 kg و 1 kg هستند. اگر نیروی $F = 5t^2\text{ N}$ در راستای قائم به قرقه وارد شود شتاب A و B را بر حسب t پیدا کنید. هنگامی که B به قرقه رسید چه اتفاقی رخ می دهد؟



شکل ۳۷.۷

۴۳.۷. جرمهای A و B ، در شکل ۳۸.۷، بترتیب 10 kg و 5 kg می باشند. ضریب مالش A با میز برابر است با 0.25 . حداقل جرم C را که مانع حرکت A می شود پیدا کنید. شتاب دستگاه را هنگامی که جرم C را برمی دارند حساب کنید.



شکل ۳۸.۷

۴۴.۷. نیروی مالش مؤثر از طرف هوا روی یک جرم 4 kg را هنگامی که با شتاب 2 m s^{-2} سقوط می کند حساب کنید.

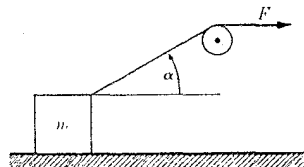
۴۵.۷. مثال ۶.۷ را در حالتی که هیچگونه نیرویی بر جسم وارد نمی شود، از نو حل کنید. سرعت اولیه جسم 2 m s^{-1} و به سمت بالاست. جسم قبل از اینکه بایستد تا کجای صفحه

بالا می‌رود؟ حداقل ضریب مالش ایستایی برای این جسم چقدر باید باشد تا به محض اینکه ایستاد نتواند به سمت عقب برگردد؟

۴۶.۷. قطعه‌ای به جرم 2 kg از صفحه شیب‌داری که با افق زاویه 30° می‌سازد با سرعت 12 m s^{-1} بالا می‌رود. اگر ضریب مالش لغزشی 0.16 باشد، این جسم قبل از اینکه بایستد تا کجا بالا می‌رود؟ سرعت جسم هنگامی که به پایین صفحه شیب‌دار می‌رسد چقدر است؟

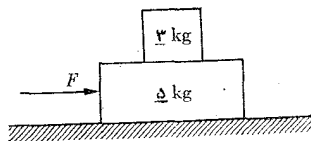
۴۷.۷. قطاری به جرم 100 تن از یک سربالایی که در هر 224 m یک متر ارتفاع می‌گیرد بالا می‌رود. نیروی کشش 45000 N و شتاب حرکت 2 m s^{-2} است، نیروی مالش را حساب کنید.

۴۸.۷. اگر f ضریب مالش با زمین باشد، شتاب جسم m در شکل ۳۹.۷ را پیدا کنید. همچنین نیروی وارد از طرف زمین روی جسم را تعیین کنید. مقادیر عددی $m = 20\text{ kg}$ ، $f = 0.2$ و $F = 15\text{ N}$ را به کار ببرید.



شکل ۳۹.۷

۴۹.۷. قطعه‌ای به جرم 3 kg روی قطعه دیگری به جرم 5 kg قرار گرفته است (شکل ۴۰.۷). فرض کنید بین قطعه 5 kg و سطحی که روی آن قرار گرفته است مالش وجود ندارد. ضرایب مالش ایستایی و جنبشی بین دو جسم به ترتیب 0.2 و 0.1 می‌باشند. (الف) حداکثر نیرویی که می‌توان به هر قطعه وارد کرد تا دستگاه بلغزد و در عین حال دو قطعه با هم بمانند، چقدر است؟ (ب) هنگامی که نیروی حداکثر وارد شود شتاب چقدر است؟ (ج) شتاب قطعه 3 kg هنگامی که نیرویی بیش از نیروی حداکثر بالا به قطعه 5 kg وارد شود چقدر است؟ و اگر این نیرو به قطعه 3 kg وارد شود شتاب آن چقدر می‌شود؟



شکل ۴۰.۷

۵۰.۷. سرعت حد کره‌ای به شعاع 2 cm و چگالی 1850 g cm^{-3} را که در گلیسرین (به چگالی 126 g cm^{-3}) فرومی‌رود پیدا کنید. همچنین، زمانی که شتاب کره 100 cm s^{-2} است سرعت آن را تعیین کنید.

۵۱.۷. جسمی به جرم 45 kg با سرعت اولیه 60 ms^{-1} در راستای قائم پرتاب می‌شود. جسم با مقاومت $F = -3v/100$ از طرف هوا مواجه می‌شود، که F بر حسب نیوتون و

v سرعت جسم بر حسب m s^{-1} است. چقدر طول می کشد تا این جسم به حداکثر ارتفاع خود برسد؟ این ارتفاع بیشینه چقدر است؟

۵۲.۷. جسمی که در آغاز بی حرکت است از ارتفاع 108 m در مدت 5 s پایین می افتد. اگر مقاومت متناسب با سرعت باشد سرعت حد را پیدا کنید.

۵۳.۷. با استفاده از نتایج مثال ۷.۸، زمانی را که طول می کشد تا قطرات باران در مثال ۷.۷ به 50% و 63% سرعت حد برسند پیدا کنید. همچنین مسافت پیموده شده در مدت τ را تعیین کنید.

۵۴.۷. نمودار سرعت جسمی را که در یک شارهٔ وiskسان سقوط می کند و سرعت اولیه آن صفر نیست، به صورت تابعی از زمان رسم کنید. دוחالتی را که v بزرگتر و کوچکتر از $F/k\eta$ است در نظر بگیرید. هنگامی که $F/k\eta = v_0$ باشد چه رخ می دهد؟

۵۵.۷. در اتم هیدروژن، الکترون روی یک مدار تقریباً دایره ای به شعاع 10^{-10} m و با سرعتی در حدود 10^6 m s^{-1} $2\pi \times 10^6$ به دور پروتون در گردش است. بزرگی نیروی بین الکترون و پروتون را برآورد کنید.

۵۶.۷. سنگی به جرم 4 kg به انتهای نخ به طول 8 m بسته شده است. اگر سنگ را با سرعت 80 دور در دقیقه به دوران درآورند، بزرگی نیروی وارد از طرف نخ به سنگ چقدر است؟ هرگاه درکشش بالاتر از 500 N نخ پاره شود، حداکثر سرعت زاویه ای ممکن سنگ چقدر است؟

۵۷.۷. پاره سنگی به جرم 1 kg به نخ به طول 6 m بسته شده است و 60 دور در دقیقه روی یک دایرهٔ قایم می چرخد. کشش نخ را در حالتی که سنگ، (الف) در بالاترین نقطهٔ دایره است؛ (ب) در پایین ترین نقطهٔ دایره است؛ (ج) هنگامیکه نخ افقی است، حساب کنید. (د) سرعت خطی را که سنگ باید در بالاترین نقطه داشته باشد تا کشش نخ برابر صفر شود پیدا کنید.

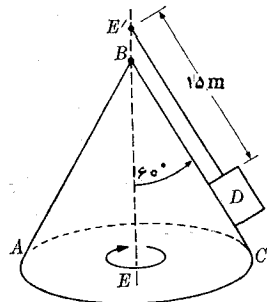
۵۸.۷. قطاری با سرعت 63 km hr^{-1} از پیچی می گذرد. شعاع انحنای پیچ 300 m است. (الف) زاویهٔ برآمدگی لازم را که باید به پیچ داده شود تا به قطار هیچگونه نیروی جانبی وارد نشود حساب کنید. (ب) چنانچه زنجیری به سقف یکی از واگنها وصل شده باشد زاویه ای را که این زنجیر با راستای قایم می سازد پیدا کنید.

۵۹.۷. بزرگراهی 24 m پهنا دارد. اختلاف سطح بین کناره های داخلی و خارجی جاده را در حالتی که یک اتومبیل بتواند با سرعت 75 km hr^{-1} (بدون تحمل هیچگونه نیروی جانبی) از پیچی به شعاع 600 m بگذرد حساب کنید.

۶۰.۷. در پیچ بزرگراهی به شعاع 300 m برآمدگی ایجاد نشده است. فرض می کنیم که ضریب مالش بین لاستیک و اسفالت خشک برابر 0.75 ، بین لاستیک و اسفالت خیس 0.50 و بین لاستیک و یخ 0.25 است. حداکثر سرعتی را که با ایمنی می توان از این پیچ گذشت در موارد زیر تعیین کنید: (الف) در هوای خشک؛ (ب) هنگام ریزش باران؛

(ج) هنگام یخبندان، چرا این مقادیر به جرم اتومبیل بستگی ندارند؟

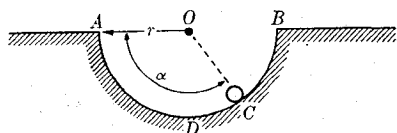
۶۱.۷. جسم D به جرم 6 kg (شکل ۴۱.۷) روی سطح بدون مالش مخروط ABC قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای 10 دور در دقیقه دور محور EE' می‌چرخد. حساب کنید (الف) سرعت خطی جسم را؛ (ب) واکنش سطح روی جسم را؛ (ج) کشش نخ را؛ (د) سرعت زاویه‌ای لازم را برای اینکه واکنش سطح برابر صفر شود.



شکل ۴۱.۷

۶۲.۷. گوی کوچکی به جرم m ، که ابتدا در نقطه A بوده است، بدون مالش روی سطح دایره‌ای ADB می‌لغزد (شکل ۴۲.۷). هنگامی که گوی در نقطه C است، ثابت کنید که سرعت زاویه‌ای و نیروی وارد از طرف سطح بر گوی به ترتیب برابرند با

$$\omega = \sqrt{2g \sin \alpha / r}, \quad F = mg(1 + 2 \sin \alpha)$$

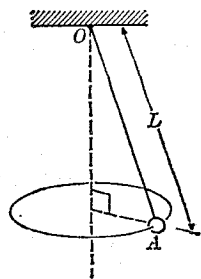


شکل ۴۲.۷

۶۳.۷. با مراجعه به آونگ مخروطی شکل ۴۳.۷، که روی دایره افقی با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، کشش نخ و زاویه آن را با راستای قائم درحالتی که

$$\omega = 30 \text{ rad s}^{-1} \text{ و } L = 1.16 \text{ m}, \quad M = 12 \text{ kg}$$

باشد، حساب کنید.



شکل ۴۳.۷

۶۴.۷. ثابت کنید که دورهٔ دوآونگ مخروطی با طولهای متفاوت، که از تراز یکسانی آویزان شده‌اند ولی به‌گونه‌ای حرکت می‌کنند که وزنه‌های آنها در ارتفاع یکسانی از سطح زمین قرار می‌گیرند، باهم برابرند.

۶۵.۷. ذره‌ای به‌چگالی ρ_1 در داخل آبگون در حال چرخشی به‌چگالی ρ_2 آویزان است. ثابت کنید که اگر ρ_1 بزرگتر از ρ_2 باشد ذره به سمت محیط دوران و اگر ρ_1 کوچکتر از ρ_2 باشد به سمت محور دوران متوجه می‌شود.

۶۶.۷. اگر بر جسمی نیروی $\mathbf{F} = k\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ که در آن $\mathbf{u}$ یک برداریکی اختیاری است وارد شود، ثابت کنید حرکت آن دایره‌ای و با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega} = k\mathbf{u}$ ، یا در حالت کلی‌تر، مارپیچی موازی با $\mathbf{u}$ خواهد بود.

۶۷.۷. در لحظهٔ $t = 0$ ، جسمی به جرم 300 kg ، با سرعت $\mathbf{v} = (\mathbf{u}_x + 6\mathbf{u}_y) \text{ m s}^{-1}$ در نقطهٔ $\mathbf{r} = 4\mathbf{u}_x \text{ m}$ قرار دارد. اگر نیروی ثابت $\mathbf{F} = 5\mathbf{u}_y \text{ N}$ روی جسم اثر کند، (الف) تغییر اندازه حرکت (خطی) جسم را در انتهای 3 s ؛ (ب) تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای آن را در انتهای 3 s پیدا کنید.

۶۸.۷. گویی به جرم 200 g با سرعت 300 cm s^{-1} به سمت شمال حرکت می‌کند. هنگامی که بر این گوی نیرویی برابر با 2000 dyn در راستای مشرق وارد شود، معادلهٔ مسیر را بنویسید، و در انتهای 40 s (الف) بزرگی و راستای سرعت؛ (ب) فاصله از نقطهٔ آغاز حرکت؛ (ج) مسافت پیموده شده از نقطهٔ حرکت را حساب کنید.

۶۹.۷. بر ذره‌ای که با سرعت v در طول محور X ها حرکت می‌کند، در ناحیهٔ $0 \leq x \leq L$ نیرویی موازی با محور Y ها وارد می‌شود. تغییر راستای حرکت را پیدا کنید. درجه فاصله‌ای از محور X ها ذره با دیواری که در $x = L$ قرار دارد برخورد می‌کند؟

۷۰.۷. ذرهٔ جرم‌داری بر اثر نیروی ثابتی به‌مؤلفه‌های $F_x = 6\text{N}$ و $F_y = -7\text{N}$ در صفحهٔ XY حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t = 0$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $v_x = -2 \text{ ms}^{-1}$ و $v_y = 0$ است. مکان و سرعت ذره را در لحظهٔ $t = 2 \text{ s}$ پیدا کنید. جرم ذره را 16 kg فرض کنید.

۷۱.۷. $\mathbf{r}$ بردار مکان ذره‌ای به جرم 6 kg با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

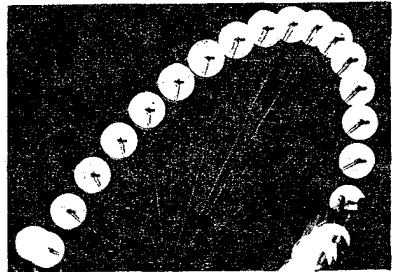
$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x(3t^2 - 4t) + \mathbf{u}_y(-4t^2) + \mathbf{u}_z(3t + 2) \text{ m}.$$

(الف) نیروی وارد بر جسم؛ (ب) گشتاور نیرویی که بر جسم اثر می‌کند نسبت به مبدأ؛ (ج) اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای جسم را نسبت به مبدأ پیدا کنید. (د) درستی $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ و $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ را تحقیق کنید.

۷۲.۷. در لحظهٔ $t = 0$ ، جسمی به جرم 3 kg با سرعت $10\mathbf{u}_y \text{ ms}^{-1}$ در نقطهٔ $\mathbf{r} = 5\mathbf{u}_x \text{ m}$ قرار دارد. هیچگونه نیرویی روی جسم اثر نمی‌کند. اندازه حرکت زاویه‌ای جسم را نسبت به مبدأ در زمانهای (الف) $t = 0.5 \text{ s}$ ؛ (ب) $t = 1.2 \text{ s}$ پیدا کنید.

۷۳.۷. به یک انتهای یک نخ لاستیکی دیسکی متصل شده و سر دیگر نخ در نقطه‌ای ثابت

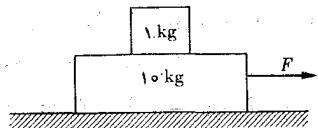
است. دیسک می تواند روی یک میز افقی بدون مالش حرکت کند. اگر نخ لاستیکی را کشیده و دیسک را تحت زاویه ای پرتاب کنید، مسیر نشان داده شده در شکل ۴۴.۷ را (که



شکل ۴۴.۷

با یک رشته درختهای پیاپی به فاصله زمانی ۵۸ گرفته شده اند) می بینید. با اندازه گیری مستقیم روی عکس، نشان دهید که این حرکت از قانون مساحت پیروی می کند. با توجه به توصیف فیزیکی مسئله، آیا نیروی وارد روی دیسک، مرکزی است؟

۴۴.۷. قطعه ای به جرم 1 kg روی قطعه ای به جرم 10 kg که خود مطابق شکل ۴۵.۷ روی یک سطح افقی قرار دارد گذاشته شده است. نیروی F با زمان t (بر حسب ثانیه) مطابق قانون $F = 2t\text{ N}$ تغییر می کند. اگر ضریب مالش ایستایی ۰.۴ و ضریب مالش لغزشی بین سایر سطوح ۰.۱۵ باشد، حرکت هریک از قطعه ها را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.



شکل ۴۵.۷

۴۵.۷. هنگامی که زمین در ۳۱ خرداد در اوج خود (مکانی با بیشترین فاصله از خورشید) می باشد فاصله آن $1.52 \times 10^{11}\text{ m}$ و سرعت مداری آن $29.93 \times 10^4\text{ ms}^{-1}$ است. سرعت مداری آن در شش ماه بعد که در حضيض (مکانی با کمترین فاصله از خورشید) قرار دارد، چقدر است؟ در این موقع فاصله زمین از خورشید $1.47 \times 10^{11}\text{ m}$ می باشد. آیا تغییرات سرعت روی طول روز شمسی اثر می گذارد؟ همچنین سرعت زاویه ای زمین دور خورشید را در دو حالت بالا پیدا کنید [دانهایی: در هر دو حالت اوج و حضيض، سرعت بر بردار مکان عمود است].

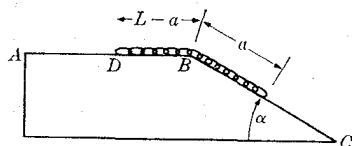
۴۶.۷. موشکی به جرم 10^3 kg به طور قائم در سکوی پرتاب خود قرار گرفته است. گاز با آهنگ 2 kgs^{-1} از آن خارج می شود. حداقل سرعت خروج گاز را که به ازای آن موشک شروع به بالا رفتن می کند پیدا کنید. همچنین با فرض اینکه سرعت خروج گاز

حداقل باشد، سرعت موشک را ۱۰s بعد از آتش کردن آن پیدا کنید.

۷۷۰۷. از موشکی که در راستای قائم پرتاب می شود، با آهنگ $5 \times 10^{-2} m \cdot kgs^{-1}$ گاز خارج می گردد. m جرم ابتدایی موشک است. سرعت خروج گاز نسبت به موشک برابر است با $5 \times 10^3 ms^{-1}$. سرعت و ارتفاع موشک را در انتهای ۱۰s پیدا کنید.

۷۸۰۷. یک زنجیر خم پذیر به طول L و به وزن W (شکل ۴۶۰۷) در آغاز روی سطح بدون مالش ABC قرار دارد. انتهای D به اندازه $L - a$ از B فاصله دارد. ثابت کنید هنگامی که D به نقطه B می رسد، سرعت زنجیر برابر می شود با

$$v = \sqrt{(g/L)/(L^2 - a^2)} \sin \alpha.$$

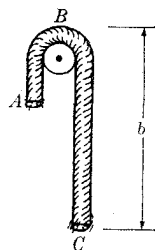


شکل ۴۶۰۷

۷۹۰۷. نخ یکنواختی به جرم M و طول L (شکل ۴۷۰۷) می تواند بدون مالش روی میخ صافی به شعاع کم بلغزد. هنگام آغاز حرکت $BC = b$ است. ثابت کنید هنگامی که $BC = 2L/3$ می شود، شتاب برابر $a = g/3$ و سرعت برابر

$$v = \sqrt{2g/L[(8L^2/3 + (2bL - b^2))]}$$

است. نتیجه را برای حالتی که $L = 12m$ و $b = 7m$ باشد به کار بندید.



شکل ۴۷۰۷

۸۰۰۷. جرم M به انتهای زنجیر خیلی درازی که جرم واحد طول آن m است بسته شده و با سرعت اولیه v در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می شود. ثابت کنید ارتفاع بیشینه ای که M می رسد برابر است با $h = (M/m)[\sqrt{1 + 3mv^2/2Mg} - 1]$ و هنگامی که M به سطح زمین می رسد سرعت آن برابر است با $v = \sqrt{2gh}$.

۸۱۰۷. بخار آب به میزان m واحد جرم در واحد زمان روی یک قطره باران چگالیده می شود. در آغاز، قطره در حال سکون و جرم آن M است. ثابت کنید که در مدت زمان t فاصله زیر رami پیماید:

$$\frac{1}{2}g\left\{\frac{1}{2}t^2 + \frac{M}{m}t - \frac{M^2}{m^2}\ln\left[1 + \frac{m}{M}t\right]\right\}$$

مقاومت هوا را نادیده بگیرید.

۸۲.۷. ذره‌ای بر اثر یک نیروی ثابت در داخل شاره‌ای که با نیرویی مقاوم و متناسب با سرعت با حرکت آن مخالفت می‌کند، جا بجا می‌شود. نشان دهید اگر موقعی که ذره به سرعت حد خود رسیده است نیرو حذف شود، رابطه سرعت در لحظه t عبارت می‌شود از $x = (m/k)v_L[1 - e^{-(k/m)t}]$ و مسافت پیموده شده برابر خواهد بود با $v = v_L e^{-(k/m)t}$. تحقیق کنید که مسافت پیموده شده قبل از توقف برابر است با $v_L(m/k)$. ثابت کنید که سرعت ذره در انتهای زمان $t = m/k$ به $1/e$ مقدار اولیه خود خواهد رسید.

۸۳.۷. جسمی بر اثر یک نیروی ثابت در داخل شاره‌ای که با نیرویی متناسب با مجذور سرعت، یعنی $F_f = -kv^2$ ، با حرکت آن مخالف می‌کند، جا بجا می‌شود. ثابت کنید که سرعت حد برابر است با $v_L = \sqrt{F/k}$. نشان دهید که رابطه بین سرعت و مسافت پیموده شده عبارت است از $v^2 = (F/k) + [v_0^2 - (F/k)]e^{-2(k/m)x}$. به ازای $v_0 = 0$ نمودار v^2 را بر حسب x رسم کنید. اگر به محض اینکه جسم به سرعت حد رسید نیرو حذف شود، ثابت کنید پس از اینکه جسم مسافتی برابر با m/k را پیمود سرعت آن به $1/e$ سرعت حد خواهد رسید.

۸۴.۷. ثابت کنید اگر جسمی تحت اثر نیروی مقاومی متناسب با مجذور سرعت، حرکت کند، سرعت آن در لحظه t برابر است با

$$v = v_L \frac{(v_0 + v_L)e^{-(kv_L/m)t} + (v_0 - v_L)e^{-(kv_L/m)t}}{(v_0 + v_L)e^{-(kv_L/m)t} - (v_0 - v_L)e^{-(kv_L/m)t}}.$$



کار و انرژی

مقدمه	۱۰.۸
کار	۲۰.۸
توان	۳۰.۸
یکاهای کار و توان	۴۰.۸
انرژی جنبشی	۵۰.۸
کار نیرویی با بزرگی و راستای ثابت	۶۰.۸
انرژی پتانسیل	۷۰.۸
بقای انرژی یک ذره	۸۰.۸
حرکت مستقیم الخط بر اثر نیروهای پایستار	۹۰.۸
حرکت بر اثر نیروهای مرکزی پایستار	۱۰۰.۸
بحث دربارهٔ منحنیهای انرژی پتانسیل	۱۱۰.۸
نیروهای ناپایستار	۱۲۰.۸
قضیهٔ ویریال برای یک ذره واحد	۱۳۰.۸
نقدی بر مفهوم انرژی	۱۴۰.۸

در این فصل به بحث دربارهٔ جنبه‌های گوناگون دینامیک یک ذره ادامه خواهیم داد. از این‌رو، تنها یک ذره را مورد مشاهده قرار می‌دهیم و برهم‌کنشهای این ذره را با بقیهٔ جهان در یک کلمه خلاصه می‌کنیم و آن را نیرو می‌خوانیم. هنگام حل معادلهٔ اساسی یک ذره (یعنی $F = dp/dt$)، اگر نیرو به صورت تابعی از زمان معلوم باشد می‌توان همیشه اولین انتگرال گیری را انجام داد، زیرا با انتگرال گیری از این معادله به دست می‌آید

$$\int_{p_0}^p dp = \int_{t_0}^t F dt$$

یا

$$p - p_0 = \int_{t_0}^t F dt = I. \quad (10.8)$$

کمیت $I = \int_{t_0}^t F dt$ که در سمت راست معادلهٔ (۱۰.۸) ظاهر شده است تکان^۱ نامیده می‌شود. بنا بر این معادلهٔ (۱۰.۸) بیان کند که

تغییر اندازه حرکت ذره برابر است با تکان.

چون تکان اساساً حاصل ضرب یک نیرو در یک زمان است، یک نیروی خیلی بزرگ که در زمان خیلی کوتاه اثر می‌کند می‌تواند تغییر اندازه حرکتی برابر تغییر اندازه حرکت یک نیروی خیلی ضعیف در زمان خیلی طولانی به وجود آورد. به عنوان مثال، وقتی بازیکنی توپی را شوت می‌کند، نیروی بزرگی در زمان خیلی کوتاه بر توپ وارد می‌کند، در نتیجه در اندازه حرکت توپ تغییر قابل ملاحظه‌ای به وجود می‌آید. برای ایجاد یک تغییر اندازه حرکت معادل، نیروی گرانی باید مدت زمان طولانی روی توپ اثر کند.

اگر به جای p کمیت معادل آن mv را قرار دهیم، ممکن است با انتگرال‌گیری مجدد مکان ذره را به صورت تابعی از زمان به دست آورد؛ داریم

$$mv - mv_0 = I \quad \text{یا} \quad v = v_0 + \frac{I}{m}$$

با توجه به اینکه $v = dr/dt$ است، می‌توان نوشت

$$\int_{r_0}^r dr = \int_{t_0}^t \left(v_0 + \frac{1}{m} I \right) dt \quad \text{یا} \quad r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t I dt.$$

از این رابطه r بر حسب زمان به دست می‌آید، پس‌این طریق مسئلهٔ دینامیکی به طور صوری حل می‌شود. در واقع، ما در مثال ۵.۷ مسئله‌ای از این‌گونه را در مورد یک حرکت مستقیم‌الخط حل کردیم.

با وجود این، در فیزیک به مسایل مهمی برخورد می‌شود که نیروی مؤثر روی ذره بر حسب زمان معلوم نیست، بلکه به صورت تابعی از مکان، یعنی r یا x, y, z داده می‌شود؛

به گفته دیگر، $F(\mathbf{r})$ یا $F(x, y, z)$ در دست است. در نتیجه، انتگرال ظاهر شده در معادله (۱۰۸) را نمی‌توان به دست آورد مگر اینکه x ، y و z به صورت توابعی از زمان معلوم باشند، یعنی نمی‌توان مسئله را حل کرد مگر اینکه کوشش کنیم معادله (۱۰۸) را حل کنیم! برای خروج از این دور باطل باید از فنون دیگر ریاضی کمک گرفت و این امر ما را به تعریف دو کمیت جدید کار و انرژی راهنمایی می‌کند. این روشهای توانا به ما امکان می‌دهند حتی در مواردی که نیرو معلوم نیست ولی می‌توانیم فرضیه‌های قابل قبولی درباره ویژگیهای آن به عمل آوریم، مسئله را حل کنیم.

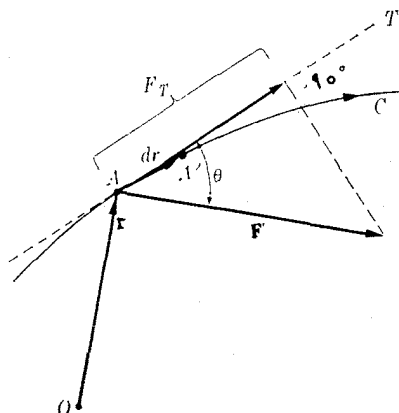
مثال ۱۰۸. تویی به جرم 1 kg از ارتفاع 2 m می‌افتد و پس از برخورد با زمین به اندازه 1.8 m بلند می‌شود. تکانی که توپ هنگام سقوط از طرف نیروی گرانی دریافت می‌کند چقدر است؟ تکانی که هنگام برخورد با زمین دریافت می‌کند چقدر است؟

حل: ابتدا با استفاده از معادله (۱۲۰۵) سرعت توپ را هنگام برخورد با زمین پیدا می‌کنیم. داریم $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ که در آن $h_1 = 2\text{ m}$ است. بنابراین $v_1 = 6.26\text{ ms}^{-1}$ می‌شود. چون سوی سرعت به سمت پایین است باید بنویسیم $v_1 = -(6.26\text{ ms}^{-1})$. اندازه حرکت اولیه برابر صفر است، در نتیجه تغییر اندازه حرکت کل هنگام سقوط برابر می‌شود با $mv_1 - 0 = -0.626\text{ kgms}^{-1}$. این تکان ناشی از نیروی گرانی است. می‌توان این تکان را مستقیماً از تعریف $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt$ به دست آورد. در این حالت $t_0 = 0$ و $\mathbf{F} = -\mathbf{u}_y mg = -\mathbf{u}_y (0.998)\text{ N}$ داریم. همچنین $t = v_1/g = 0.639\text{ s}$ بدین طریق از محاسبه مستقیم، تکان ناشی از نیروی گرانی بار دیگر $-(0.626)\text{ kgms}^{-1}$ به دست می‌آید.

هنگام برخورد توپ با زمین، نیروی جدیدی در زمان خیلی کوتاه اثر می‌کند. بزرگی این نیرو معلوم نیست ولی با محاسبه اندازه حرکت توپ هنگام بلند شدن از زمین می‌توان تکان را حساب کرد. چون توپ تا ارتفاع 1.8 m بلند می‌شود، سرعت برخاستن توپ از زمین $v_2 = \mathbf{u}_y (5.94)\text{ ms}^{-1}$ یا به صورت برداری $v_2 = \sqrt{2gh_2} = 5.94\text{ ms}^{-1}$ است، زیرا به توپ به سمت بالا حرکت می‌کند. تغییر اندازه حرکت با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = mv_2 - mv_1 = \mathbf{u}_y (1.221)\text{ kgms}^{-1}$$

این رابطه نیز تکان را نشان می‌دهد. با مقایسه این مقدار با نتیجه سقوط آزاد و با توجه به اینکه برخورد با زمین در مدت زمان خیلی کوتاهی صورت گرفته است، نتیجه می‌گیریم نیرویی که در حالت دوم اثر کرده است بسیار بزرگتر بوده است. اگر بتوان این فاصله زمانی را اندازه گرفت، نیروی میانگین مؤثر بر توپ به دست می‌آید.



شکل ۱.۸. کار برابر است با حاصل ضرب جابجایی در تصویر نیرو در راستای جابجایی.

زمان خیلی کوتاه dt ذره از نقطه A به نقطه A' می‌رود و جابجایی ذره برابر $\vec{AA'} = d\vec{r}$ است. کار انجام یافته در این جابجایی با حاصل ضرب اسکالر زیر تعریف می‌شود:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (۲.۸)$$

چنانچه بزرگی $d\mathbf{r}$ (یعنی مسافت پیموده شده) را با ds نشان دهیم می‌توانیم رابطه (۲.۸) را به صورت زیر بنویسیم:

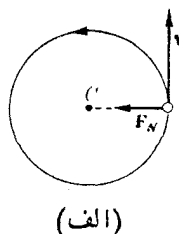
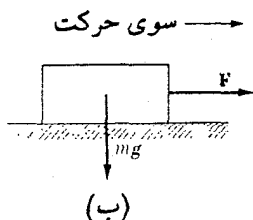
$$dW = F ds \cos \theta \quad (۳.۸)$$

که در آن θ زاویه بین نیروی $\mathbf{F}$ و جابجایی $d\mathbf{r}$ است. چون $F \cos \theta$ مؤلفه مماسی نیرو روی مسیر می‌باشد، داریم

$$dW = F_T ds \quad (۴.۸)$$

رابطه فوق را می‌توان چنین بیان کرد:

کار برابر است با جابجایی ضرب در مؤلفه نیرو در راستای جابجایی.



شکل ۲.۸. نیروهایی که کار انجام نمی‌دهند

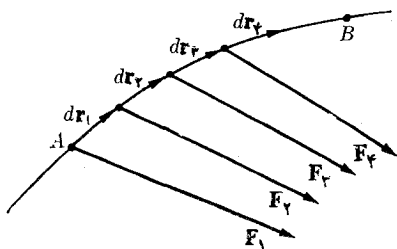
توجه داشته باشید که اگر نیرویی بر جابجایی عمود باشد ($\theta = 90^\circ$)، کاری که این نیرو انجام می‌دهد برابر صفر است. نیروی مرکزگرایی F_N در حرکت دایره‌ای [شکل ۲.۸ (الف)] یا نیروی گرانی mg در حرکت یکی جسم در راستای افقی [شکل ۲.۸ (ب)] چنین وضعی دارد. معادله (۲.۸) کار در یک جابجایی بینهایت کوچک را به دست می‌دهد. کار کل انجام یافته روی ذره در جابجایی آن از نقطه A تا نقطه B (شکل ۳.۸) برابر است با مجموع تمام کارهای جزئی انجام یافته در طول جابجاییهای بینهایت کوچک پیاپی؛ یعنی

$$W = F_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + F_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + F_3 \cdot d\mathbf{r}_3 + \dots$$

یا

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F_T ds. \quad * (5.8)$$

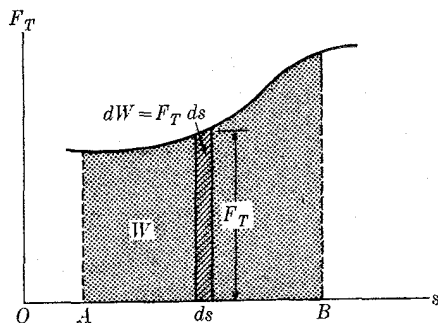
پیش از آنکه به حل انتگرالی که در رابطه (۵.۸) ظاهر می‌شود بپردازیم، باید $\mathbf{F}$ را به صورت تابعی از x ، y و z داشته باشیم. همچنین، به‌طور کلی، باید معادله مسیری را که ذره در طول آن حرکت می‌کند نیز بدانیم. یک امکان دیگر، شناختن $\mathbf{F}$ ، x ، y و z به صورت تابعی از زمان یا یک متغیر دیگر است.



شکل ۳.۸. کار کل برابر است با مجموع تعداد زیادی از کارهای جزئی.

گاهی راحت‌تر است F_T به صورت نمودار نشان داده شود. شکل ۴.۸، F_T را بر حسب مسافت ds نمایش می‌دهد. کار $dW = F_T ds$ که در جابجایی جزئی ds انجام می‌گیرد، متناظر با مساحت مستطیل کوچک است. بدین طریق، می‌توان کار کل را که روی ذره شکل ۳.۸ انجام شده تا از نقطه A به نقطه B برود، ابتدا با تجزیه مساحت هاشور خورده در شکل ۴.۸ به مستطیلهای باریک و سپس با جمع کردن مساحت این مستطیلهای به دست آورد. به گفته دیگر، کار انجام یافته برابر است با مساحت کل سطح هاشور خورده در شکل ۴.۸.

☆ برای هر بردار $\mathbf{V}$ که تابعی از مکان است، انتگرالی به شکل $\int_A^B \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ در طول مسیری که A را به B می‌پیوندد، انتگرال خطی $\mathbf{V}$ (linear integral) نامیده می‌شود. این انتگرال در موارد متعدد در این کتاب ظاهر خواهد شد.



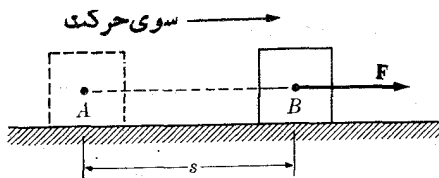
شکل ۴.۸. کار کل انجام یافته در جابجایی از B تا A برابر است با مساحت زیر منحنی.

یک حالت ویژه جالب آن است که سو و راستای نیرو ثابت باشد و جسم در خط مستقیمی در راستای نیرو جابجا شود (شکل ۵.۸). در این صورت $F_T = F$ است و معادله (۵.۸) به صورت زیر درمی آید:

$$W = \int_A^B F ds = F \int_A^B ds = Fs \quad (۶.۸)$$

یا: کار = مسافت $\times$ نیرو؛ رابطه‌ای که درکتابهای مقدماتی فیزیک پیدا می‌شود. اگر F_x , F_y , F_z مؤلفه‌های قائم F ، و dx , dy , dz مؤلفه‌های $d\mathbf{r}$ (شکل ۶.۸) باشند، با به کار بستن معادله (۲۰.۳) به دست می‌آید

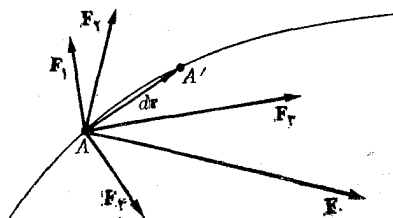
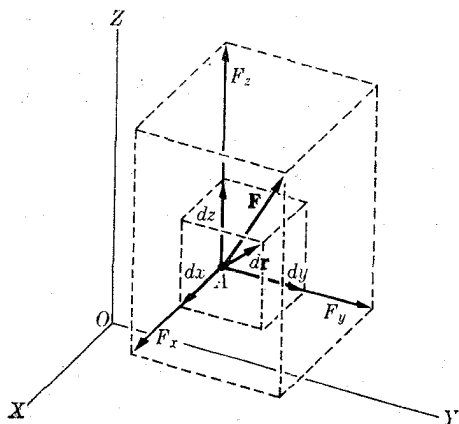
$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (۷.۸)$$



شکل ۵.۸. کار نیرویی با راستا و سوی ثابت

هنگامی که چندین نیرو مانند F_1 , F_2 , F_3 , ... روی ذره‌ای اثر می‌کنند، کار

انجام یافته به وسیله هر نیرو در جریان جابجایی $\vec{dr} = AA'$ (شکل ۷.۸) برابر است با $dW_1 = F_1 \cdot d\mathbf{r}$, $dW_2 = F_2 \cdot d\mathbf{r}$, $dW_3 = F_3 \cdot d\mathbf{r}$ و غیره ... توجه داشته باشید که برای تمام نیروها یکسان است زیرا همه آنها روی یک ذره اثر می‌کنند. کار کل انجام یافته dW روی ذره از جمع کارهای جزئی dW_1 , dW_2 , dW_3 و ... که به وسیله



شکل ۷.۸. هنگامی که چند نیرو بر یک ذره وارد می‌شوند، کار برآیند نیروها برابر است با مجموع کارهای هر یک از نیروهای مؤلفه.

شکل ۶.۸. کار انجام یافته به وسیله یک نیرو برابر است با مجموع کارهای انجام یافته به وسیله مؤلفه‌های قائم آن نیرو.

هر یک از نیروها انجام یافته است به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} dW &= dW_1 + dW_2 + dW_3 + \dots \\ &= F_1 \cdot dr + F_2 \cdot dr + F_3 \cdot dr + \dots \\ &= (F_1 + F_2 + F_3 + \dots) \cdot dr = F \cdot dr \quad (۸.۸) \end{aligned}$$

که در آن $F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ برآیند نیروهاست. آخرین نتیجه معادله (۸.۸) همان کار انجام یافته روی ذره به وسیله نیروی برآیند است. بدین طریق ثابت می‌شود که کار برآیند چند نیروی وارد بر یک ذره برابر است با جمع کارهای هر یک از نیروهای مؤلفه.

۳.۸ توان

در بعضی کارهای عملی، بویژه کارهای مربوط به ماشینها و مهندسی، دانستن آهنگ انجام کار از اهمیت زیاد برخوردار است. توان لحظه‌ای^۱، یا آهنگ انجام کار با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (۹.۸)$$

به گفته دیگر، توان عبارت است از کار انجام یافته در واحد زمان در فاصله زمانی خیلی کوتاه dt با استفاده از معادلات (۲.۸) و (۱۷.۵) می‌توان نوشت

$$P = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v. \quad (۱۰.۸)$$

1. instantaneous power

بدین طریق توان به صورت حاصل ضرب اسکالر نیرو در سرعت تعریف می شود. توان میانگین در فاصله زمانی t از تقسیم کار کل [به دست آمده از معادله (۵.۸)] بر زمان t به دست می آید؛ $P_{ave} = W/t$.

از نقطه نظر مهندسی، توان از اهمیت بیشتری برخوردار است، زیرا هنگامی که مهندسی طرح ساختمان یک ماشین را فراهم می کند، در آن سرعت انجام کار ماشین بیشتر اهمیت دارد تا مقدار کل کاری که ماشین توانایی انجام آن را دارد.

۴.۸ یکاهای کار و توان

از معادله های (۲.۸) یا (۶.۸)، می بینیم که کار را باید بر حسب حاصل ضرب یک یکای نیرو در یک یکای فاصله بیان کرد. در دستگاه MKSC کار را بر حسب نیوتون - متر، به نام ژول^۱ با علامت اختصاری J بیان می کنند. پس یک ژول مقدار کاری است که نیروی یک نیوتونی به هنگام جابجا کردن ذره ای در راستای نیرو به اندازه یک متر انجام می دهد. با توجه به اینکه $N = \text{mkgs}^{-2}$ است، داریم $J = \text{Nm} = \text{m}^2\text{kgs}^{-2}$. نام ژول به افتخار جیمز پرسکات ژول^۲ (۱۸۱۶-۱۸۶۹) (۱۱۹۵-۱۲۴۸ ه. ش.) دانشمند نامی انگلیسی، به خاطر تحقیقات ارزنده وی روی مفاهیم انرژی و گرما، انتخاب شده است.

در دستگاه یکاهای cgs یکای کار، دین سانتیمتر است که ادگد^۳ نامیده می شود. بنابراین $\text{erg} = \text{dyn cm}$. چون $1\text{N} = 10^5\text{dyn}$ ، $1\text{m} = 10^2\text{cm}$ می باشد، داریم $1\text{J} = (10^5\text{dyn})(10^2\text{cm}) = 10^7\text{erg}$.

بنا به تعریف (۹.۸)، توان باید بر حسب یک یکای کار تقسیم بر یکای زمان بیان شود. در دستگاه یکاهای MKSC توان بر حسب ژول بر ثانیه، به نام وات^۴، با علامت W بیان می شود. یک وات توان ماشینی است که در هر ثانیه یک ژول کار انجام می دهد. چون $J = \text{m}^2\text{kgs}^{-2}$ است، بنابراین داریم $J = \text{m}^2\text{kgs}^{-3} = \text{Js}^{-1}$. کلمه وات از نام جیمز وات^۵ [۱۷۳۶-۱۸۱۹] (۱۱۱۵-۱۱۹۸ ه. ش.) مهندس انگلیسی، به مناسبت ابتکاراتی که وی در رفع نقایص ماشین بخار به کار برده، گرفته شده است. معمولاً اضعاف وات به نام کیلووات (kW) و مگاوات (MW) با اندازه های $1\text{kW} = 10^3\text{W}$ و $1\text{MW} = 10^6\text{W}$ را به کار می برند. یکای دیگر توان که بیشتر به وسیله مهندسين به کار می رود اسب بخار^۶ با علامت اختصاری hp است که برابر 746W می باشد*.

کیلووات ساعت یک یکای دیگر کار است، و آن معادل کاری است که یک ماشین با توان یک کیلووات در مدت یک ساعت انجام می دهد. بنا بر این داریم

$$1\text{ kWhr} = (10^3\text{W})(3600 \times 10^3\text{s}) = 3600 \times 10^6\text{J}.$$

1. joule	2. James prescott Joule	3. erg
4. watt	5. James Watt	

☆ انگلیسی ها به جای این یکا، یکای دیگری به نام هورس پاور (horsepower) به کار می برند که برابر است با ۵۵۰ فوت درپوند بر ثانیه.

مثال ۲.۸. اتومبیلی به جرم 1200 kg با سرعت 36 کیلومتر در ساعت در طول یک سربالایی به شیب 5° بالا می‌رود. کار انجام یافته به وسیله موتور در مدت 5 دقیقه را حساب کنید. توان اعمال شده از طرف موتور چقدر است؟ از همه اثرات مالشی صرف نظر کنید.

حل: حرکت اتومبیل در سربالایی از نیروهای F و $W \sin \alpha$ ناشی می‌شود که بترتیب از طرف موتور و وزن اتومبیل اعمال می‌گردند (شکل ۸.۸). بنابراین با استفاده از $W = mg$ می‌توان نوشت

$$F - mg \sin \alpha = ma.$$

چون حرکت یکنواخت است، $a = 0$ و $F = mg \sin \alpha = 12023 \times 10^3 \text{ N}$ می‌شود. سرعت اتومبیل $v = 36 \text{ km hr}^{-1} = (36 \times 10^3 \text{ m})(3600 \text{ s})^{-1} = 10 \text{ ms}^{-1}$ است و مسافتی که در $5 \text{ min} = 300 \text{ s}$ طی می‌کند برابر می‌شود با

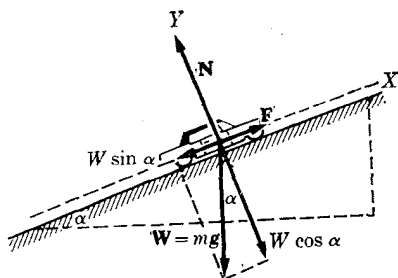
$$s = (10 \text{ ms}^{-1})(300 \text{ s}) = 3 \times 10^3 \text{ m}.$$

با استفاده از معادله (۶.۸)، کار انجام یافته برابر است با

$$W = Fs = (12023 \times 10^3 \text{ N})(3 \times 10^3 \text{ m}) = 3.6069 \times 10^6 \text{ J}.$$

توان میانگین را می‌توان به دوشیوه مختلف حساب کرد. با روش اول، می‌گوییم

$$P = \frac{W}{t} = \frac{3.6069 \times 10^6 \text{ J}}{3 \times 10^2 \text{ s}} = 12023 \times 10^4 \text{ W}.$$



شکل ۸.۸

به روش دیگر، می‌توان گفت

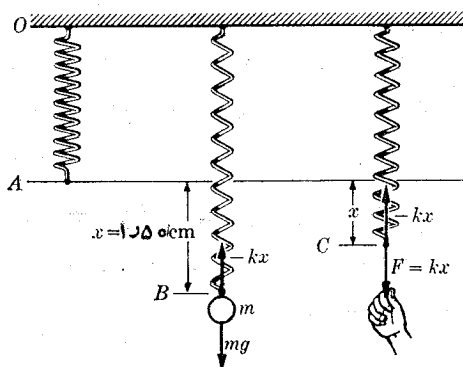
$$P = Fv = (12023 \times 10^3 \text{ N})(10 \text{ ms}^{-1}) = 12023 \times 10^4 \text{ W}.$$

مثال ۳.۸. کار لازم برای اینکه طول فنر شکل ۹.۸ بدون شتاب به اندازه 2 cm کشیده شود چقدر است؟ می‌دانیم اگر یک جرم 4 کیلوگرمی به فنر آویزان کنیم 1.5 cm به طول آن افزوده می‌شود.

حل: وقتی که هیچ وزنه‌ای به فنر آویزان نباشد، طول فنر برابر فاصله نقطه O تا یک تراز افقی مانند A است. با آزمایش اثبات شده است که برای کشیدن بدون شتاب فنر به

اندازه طول کوچک x ، نیرویی متناسب با این طول لازم است؛ یا $F = kx$. در این صورت فنر نیز نیرویی برابر و در خلاف جهت این نیرو اعمال می‌کند. ترازوی فنری یا دینامومتر، که معمولاً برای اندازه‌گیری نیرو به کار می‌رود، بر این اساس ساخته شده است. برای تعیین ثابت تناسب k از این نکته استفاده می‌کنیم که فنر در مقابل نیروی وزن جرم m به اندازه $x = 1.50 \text{ cm} = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ کشیده می‌شود. در این مورد F برابر وزن $mg = 3.92 \text{ N}$ است. در نتیجه با نوشتن $mg = kx$ ، به دست می‌آید

$$k = \frac{3.92 \text{ N}}{1.50 \times 10^{-2} \text{ m}} = 2.61 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$$



شکل ۹.۸. کار انجام یافته هنگام افزایش فنر

برای کشیدن بدون شتاب فنر به اندازه x ، نیروی $F = kx$ را به آن اعمال می‌کنیم. برای این کار می‌توان نخ‌ی را که به فنر بسته شده است بآهستگی کشید. بتدریج که x زیاد می‌شود نیرو نیز لزوماً به طور منظم افزایش می‌یابد. برای محاسبه کار انجام یافته، باید از معادله (۵.۸) استفاده کنیم؛ به دست می‌آید

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

رابطه فوق کار انجام یافته در جابجایی x را نشان می‌دهد. با وارد کردن مقادیر عددی مربوط به k و x ، کار لازم برای کشیدن فنر به اندازه 2 cm ، به دست می‌آید که برابر می‌شود با

$$W = 5.22 \times 10^{-1} \text{ J}.$$

مثال ۴.۸. روی ذره‌ای به جرم 2 kg نیروی $F = 6t \text{ N}$ اثر می‌کند. اگر ذره قبل از وارد شدن نیرو ساکن باشد، کار انجام یافته در طول دو ثانیه اول را پیدا کنید.

حل: در مثال پیش پیدا کردن کار انجام یافته آسانتر بود، زیرا نیرو به صورت تابعی از مکان ($F = kx$) داده شده بود. در این مثال، برعکس، نیرو تنها بر حسب زمان معلوم است ($F = 6t$). بنا بر این نمی توان کار را مستقیماً از رابطه $W = \int F dx$ حساب کرد. پس ابتدا باید با استفاده از رابطه $F = ma$ جابجایی را بر حسب زمان پیدا کنیم. بنا بر این $a = F/m = 3t \text{ ms}^{-2}$. با به کار بردن معادله (۶.۵) به ازای $v_0 = 0$ (زیرا ذره در آغاز بدون حرکت است)، می توان نوشت

$$v = \int_0^t (3t) dt = 1.5t^2 \text{ ms}^{-1}$$

اکنون اگر معادله (۳.۵) را با $x_0 = 0$ به کار ببریم و مبدأ مختصات را نقطه آغاز حرکت اختیار کنیم، به دست می آید

$$x = \int_0^t (1.5t^2) dt = 0.5t^3 \text{ m}.$$

حال، با داشتن x به صورت تابعی از t ، می توان به دو روش زیر عمل کرد:
(الف) با حل رابطه فوق بر حسب t به دست می آید $x^{1/3} = 0.5t^3 \Rightarrow t = (x/0.5)^{1/3} = 1.26 \times x^{1/3}$. در این صورت نیرو برابر می شود با $F = 6t = 7.56 \times x^{1/3} \text{ N}$. با استفاده از معادله (۵.۸)، داریم

$$W = \int_0^x (7.56 \times x^{1/3}) dx = 5.76 \times x^{4/3}$$

وقتی $t = 2 \text{ s}$ باشد، خواهیم داشت $x = 0.5 \times (2)^3 = 4 \text{ m}$ ، در نتیجه $W = 360 \text{ J}$ می شود.

(ب) اکنون مسئله را به روش دیگری حل می کنیم: از رابطه $x = 0.5t^3$ داریم $dx = 1.5t^2 dt$. سپس با استفاده از رابطه نیرو بر حسب زمان، می توان نوشت

$$W = \int_0^t (6t)(1.5t^2) dt = 4.5t^4 \text{ J}.$$

به ازای $t = 2 \text{ s}$ به دست می آید $W = 360 \text{ J}$ ، که با نتیجه قبل تطبیق می کند. معمولاً موقعی که نیرو به صورت تابعی از زمان معلوم باشد باید از روش دوم استفاده کرد، زیرا حتی پس از حل معادله حرکت، اغلب یافتن رابطه نیرو بر حسب مکان ذره مشکل است.

۵.۸ انرژی جنبشی

بنا به معادله (۲۷.۷)، مقدار نیروی مماسی برابر است با $F_T = m dv/dt$. بنا بر این

$$F_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = mv dv$$

زیرا به موجب معادله (۲۳.۵)، $v = ds/dt$ است. بنا براین انتگرالی که در معادله (۵.۸) در محاسبه کار کل ظاهر می شود، برابر است با

$$W = \int_A^B F_T ds = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (11.8)$$

که در آن v_B سرعت ذره در نقطه B و v_A سرعت آن در نقطه A است. نتیجه (۱۱.۸) نشان می دهد که شکل تابعی نیروی F و مسیری که ذره می پیماید هر چه باشد، مقدار کار W انجام یافته به وسیله نیرو همواره برابر است با اختلاف کمیت $mv^2/2$ در آنها و ابتدای مسیر. این کمیت مهم انرژی جنبشی^۱ نامیده می شود و آن را با علامت E_k نشان می دهند. بنا براین

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{یا} \quad E_k = \frac{p^2}{2m} \quad (12.8)$$

زیرا $p = mv$ است. به این ترتیب معادله (۱۱.۸) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$W = E_{k,B} - E_{k,A} \quad (13.8)$$

رابطه فوق را می توان چنین بیان کرد:

کار انجام گرفته دوی یک ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن ذره.

ماهیت نیرو هر چه باشد، این نتیجه اعتبار خود را حفظ می کند.

معادله (۱۳.۸) بوضوح نشان می دهد که انرژی جنبشی با یکای کسار اندازه گیری می شود؛ یعنی در دستگاه یکاهای MKSC یکای انرژی ژول و در دستگاه یکاهای cgs، ارگ می باشد. درستی بیان فوق را می توان از روی معادله (۱۲.۸) نیز تحقیق کرد، که در آن E_k در دستگاه یکاهای MKSC را باید بر حسب m^2kgs^{-2} نوشت که رابطه ابعادی^۲ ژول بر حسب یکاهای اصلی است.

در اینجا از یکاهای دیگری برای انرژی به نام الکترون - ولت^۳ با علامت اختصاری eV، که در بخش ۹.۱۴ (جلد دوم کتاب) به طور دقیق تعریف خواهد شد، نام می بریم که اغلب به عنوان یکای انرژی در بیان فرایندهای شیمیایی و هسته ای به کار می رود. رابطه هم ارزی الکترون ولت با ژول چنین است: $1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\text{J}$. یکی از اضعاف مفید الکترون - ولت، MeV است که برابر 10^6eV یا $1.602 \times 10^{-13}\text{J}$ می باشد. نتیجه (۱۳.۸) که تغییر انرژی جنبشی E_k یک ذره را با W ، کار انجام یافته به وسیله نیرو مربوط می کند، شباهت زیادی با معادله (۱۰.۸) دارد که تغییر p ، اندازه حرکت یک ذره را با I ، تکان نیرو پیوند می دهد. اختلاف این دو رابطه در آن است که تکان که انتگرال روی زمان است هنگامی می تواند مفید باشد که نیرو را به صورت تابعی از زمان در دست داشته باشیم، ولی، کار یک انتگرال روی مکان است و وقتی که نیرو به صورت تابعی از مکان معلوم باشد با سانی قابل محاسبه است. ما معمولاً نیرو را بر حسب مکان می شناسیم، و به همین جهت است که مفاهیم نیرو و انرژی نقشی چنین مهم در فیزیک دارند.

لازم است یادآوری کنیم که مفاهیم کار و انرژی، آن طور که در فیزیک به کار برده می‌شوند دارای معنای کاملاً دقیق هستند که باید آنها را خوب فهمیده و نباید با استنباطی که در زندگی عادی از آنها وجود دارد اشتباه کرد.

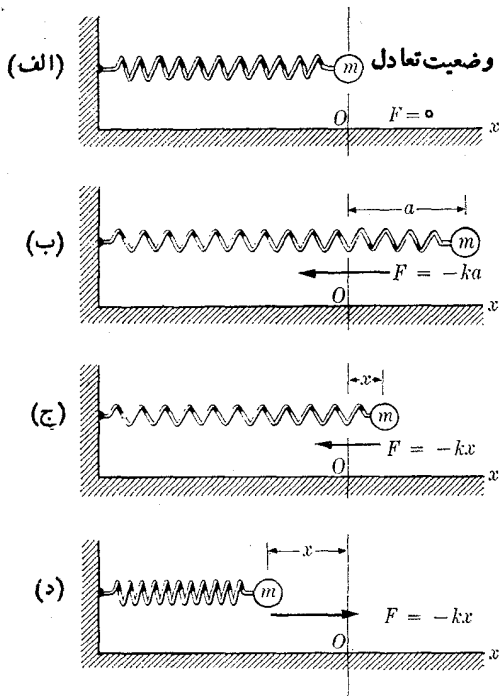
مثال ۵.۸. با استفاده از داده‌های مثال ۴.۸، انرژی جنبشی را که ذره در زمان t کسب می‌کند مستقیماً حساب کنید.

حل: از حل مثال ۴.۸ به یاد داریم که سرعت در لحظه t برابر است با $v = ۱۵t^2 \text{ ms}^{-1}$. بنابراین انرژی جنبشی ذره برابر می‌شود با

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2\text{kg})(15t^2 \text{ ms}^{-1})^2 = 225t^4 \text{ J}.$$

انرژی جنبشی اولیه ذره در لحظه $t = 0$ ، برابر صفر است. در نتیجه انرژی جنبشی که ذره در فاصله زمانی t کسب می‌کند برابر است با $E_k - E_{k,0} = 225t^4 \text{ J}$ ، که مطابق نتیجه دوم مثال ۴.۸، درست برابر W ، کار انجام یافته روی ذره است.

مثال ۶.۸. فنر مثال ۳.۸ را مطابق شکل ۱۰.۸ در وضع افقی قرار می‌دهیم. جرم m را به اندازه a به سمت راست کشیده رها می‌کنیم. انرژی جنبشی ذره را هنگامی که در فاصله x از وضع تعادل خود قرار دارد حساب کنید.



حل: بنا به توضیحی که در مثال ۳.۸ داده شد، هنگامی که جرم m در فاصله x از وضع تعادل خود قرار دارد از طرف فنر نیروی $F = -kx$ روی آن اثر می‌کند (علامت منفی نشان می‌دهد که نیروی حاصل از فنر، هنگامی که x به سمت راست باشد، به سمت چپ است). در وضع تعادل، $x = 0$ و در نتیجه $F = 0$ است. در وضع (ب) هنگامی که جرم در حال رها شدن است $x = a$ و $F = -ka$ و سرعت برابر صفر است ($v_0 = 0$)، یعنی انرژی جنبشی اولیه برابر صفر است. سرعت در وضع میانی x را برابر v فرض می‌کنیم. با به کار بردن معادله (۱۱.۸) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \int_a^x F dx = \int_a^x (-kx)dx \\ &= \frac{1}{2}k(a^2 - x^2) \end{aligned}$$

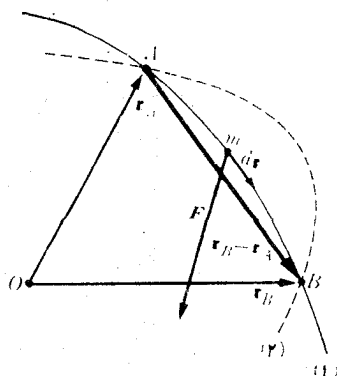
یا

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}.$$

این رابطه سرعت ذره را بر حسب مکان آن به دست می‌دهد. توجه کنید که v به مجذور x بستگی دارد. معنای فیزیکی چنین رابطه‌ای چیست؟ با چه سرعتی ذره به وضع $x = 0$ می‌رسد؟ آیا لازم است علامت $\pm$ جلورادیکال مربوط به سرعت v قرار دهیم؟ حدی برای مقادیر ممکن x وجود دارد؟ آیا دانشجو می‌تواند حرکتی را که بدین طریق به وجود می‌آید با روش ترسیمی نشان دهد؟

۶.۸ کار نیرویی با بزرگی و راستای ثابت

ذره m را که تحت تأثیر نیروی F با راستا و بزرگی ثابت قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۱۱.۸). ممکن است روی ذره نیروهای ثابت و یا غیر ثابت دیگری نیز اثر کنند، که



شکل ۱۱.۸. کار انجام یافته به وسیله نیرویی با بزرگی و راستای ثابت

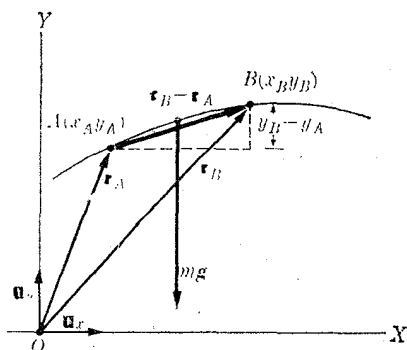
فعلا آنها را به کنار می‌نهم. هنگامی که ذره روی مسیر (۱) از نقطه A به نقطه B تغییر مکان می‌دهد، کار نیروی F برابر است با

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \int_A^B d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A). \quad (۱۴.۸)$$

نتیجه مهمی از معادله (۱۴.۸) به دست می‌آید این است که کار انجام یافته در این حالت، مستقل از مسیری است که نقطه A را به نقطه B می‌پیوندد. به عنوان مثال، اگر ذره به جای حرکت روی مسیر (۱)، مسیر (۲) را که آن هم نقطه A را به نقطه B متصل می‌کند پیماید، کار تغییر نمی‌کند، زیرا تفاضل برداری $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ تغییر نمی‌کند. توجه داشته باشید معادله (۱۴.۸) را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_B - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_A \quad (۱۵.۸)$$

بنابراین رابطه، کار برابر است با اختلاف بین مقادیر کمیت $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ که در دو انتهای مسیر اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۱۲.۸. کار انجام گرفته به وسیله نیروی گرانی

یک کاربرد بسیار مهم معادله (۱۴.۸) در مورد کار انجام یافته به وسیله نیروی گرانی است (شکل ۱۲.۸). در این مورد

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -u_y mg \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = u_x(x_B - x_A) + u_y(y_B - y_A)$$

است. بنابراین با قراردادن این مقادیر در معادله (۱۴.۸) و با به کار بردن معادله (۱۹.۳) برای ضرب اسکالر، داریم

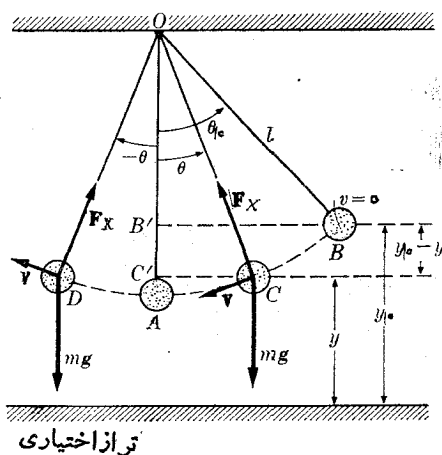
$$W = -mg(y_B - y_A) = mgy_A - mgy_B. \quad (۱۶.۸)$$

بدیهی است در معادله (۱۶.۸) هیچ اشاره‌ای به مسیر نمی‌شود، و کار فقط به $y_B - y_A$ اختلاف ارتفاع دو انتها، بستگی دارد.

مثال ۷.۸. یک جرم ۲ کیلوگرمی را که از نخ به طول یک متر آویزان است از وضع

قایم به اندازه 30° منحرف و سپس رها می‌کنیم. وقتی که نخ در طرفین خط قایم زاویه 10° با آن می‌سازد سرعت جسم را پیدا کنید.

حل: معمولاً یک جرم آویزان از نخ را آونگه می‌نامند. وقتی که جرم بسته به نخ به اندازه 30° منحرف و رها می‌شود (شکل ۱۳.۸)، سرعت اولیه آن برابر صفر است. جسم بر اثر نیروی وزن mg و کشش نخ F_N ، با رسم کمانی از دایره به نقطه A می‌رسد، سپس از A گذشته به سمت چپ حرکت می‌کند تا اینکه به نقطه متقارن با نقطه‌ای که رها شده است برسد. از این به بعد، حرکت رفت و برگشت ادامه پیدا می‌کند و نوسانهای شناخته شده‌ای به نام حرکت آونگی به وجود می‌آید. (در فصل ۱۲ حرکت نوسانی به طور مفصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت.)



شکل ۱۳.۸. رابطه‌های انرژی در حرکت یک آونگ

برای پیدا کردن v از روی اصل انرژی جنبشی، یعنی معادله (۱۱.۸)، ابتدا باید کار نیروهای وارد بر ذره را به دست آورد. نیروی مرکزگرای F_N کاری انجام نمی‌دهد، زیرا این نیرو در هر نقطه بر راستای سرعت عمود است. کار نیروی گرانی را می‌توان به کمک معادله (۱۶.۸) حساب کرد که عبارت می‌شود از $W = mgy_0 - mgy = mg(y_0 - y)$. اکنون اگر ارتفاع را از یک صفحه افقی اختیاری حساب کنیم به دست می‌آوریم $OC' = l \cos \theta$ و $OB' = l \cos \theta_0$. ولی چون $y_0 - y = B'C' = OC' - OB'$ است، بنابراین داریم

$$y_0 - y = l(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$W = mgy_0 - mgy = mgl(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

انرژی جنبشی در نقطه C برابر $E_k = mv^2/2$ و در نقطه B برابر صفر است. بنابراین با استفاده از معادله (۱۳.۸) به دست می آید

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

یا

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

توجه کنید که نتیجه به دست آمده به جرم آونگ بستگی ندارد. با وارد کردن مقادیر عددی خواهیم داشت

$$v = \sqrt{2(9.8 \text{ m s}^{-2})(1 \text{ m})(\cos 10^\circ - \cos 30^\circ)} = 1.526 \text{ m s}^{-1}.$$

برای نقطه D ، وضع متقارن با C که زاویه $10^\circ -$ با خط قائم می سازد، همین نتیجه به دست می آید، زیرا $\cos(-\theta) = \cos\theta$ است.

۷.۸ انرژی پتانسیل

مسئله ای که در بخش پیش مطالعه کردیم، نمونه ای است از یک گروه بزرگ و مهم از نیروها که نیروهای پایستار خوانده می شوند. دلیل این اسم گذاری در بخشهای بعدی این فصل توضیح داده خواهد شد.

نیروی پایستار است که چگونگی بستگی آن به بردار مکان $\mathbf{r}$ یا مختصات x, y و z ذره طوری باشد که همیشه بتوان کار W را به عنوان اختلاف مقادیر یک کمیت $E_p(x, y, z)$ در نقاط ابتدا و انتها بیان کرد. کمیت $E_p(x, y, z)$ انرژی پتانسیل^۲ نام دارد و تابعی از مختصات نقطه است. اگر $\mathbf{F}$ نیرویی پایستار باشد داریم

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = E_{p,A} - E_{p,B} \quad (17.8)$$

توجه کنید که می نویسیم $E_{p,A} - E_{p,B}$ و نه $E_{p,B} - E_{p,A}$ ؛ یعنی اینکه کار انجام یافته برابر است با E_p در نقطه مبدأ منهای E_p در نقطه مقصد؛ به عبارت دیگر

انرژی پتانسیل تابعی است از مختصات که اختلاف بین مقدار این تابع در مبدأ و مقصد برابر است با کاری که روی ذره انجام می شود تا از نقطه مبدأ به نقطه مقصد برسد.

به گفته دقیقتر، انرژی پتانسیل E_p باید به مختصات ذره مورد نظر و همچنین مختصات کلیه ذره های دیگری که با این ذره برهم کنش می کنند، بستگی داشته باشد. با وجود این، همچنانکه در فصل ۷ هنگام بررسی دینامیک یک ذره گفته شد، بقیه جهان اساساً ثابت فرض می شود و در نتیجه تنها مختصات ذره مورد نظر در تابع E_p ظاهر می شوند.

دانشجو، با مقایسه معادله (۱۷.۸) با معادله (۱۲.۸)، که برای انرژی جنبشی به دست آمده است، باید توجه داشته باشد که معادله (۱۲.۸) به طور کلی در مورد هر نیرویی مانند F صادق است، یعنی رابطه $E_k = (mv^2/2)$ همواره اعتبار دارد، در صورتی که تابع $E_p(x, y, z)$ به ماهیت نیروی F بستگی دارد و شرطی که معادله (۱۷.۸) برقرار می‌کند نمی‌تواند در مورد هر نیرویی صادق باشد. تنها نیروهایی که در چنین شرطی صدق می‌کنند نیروهای پایستار خوانده می‌شوند. به عنوان مثال، از مقایسه معادله (۱۷.۸) با معادله (۱۶.۸) ملاحظه می‌شود که نیروی گرانی، پایستار است و انرژی پتانسیل مربوط به گرانی برابر است با

$$E_p = mgy. \quad (18.8)$$

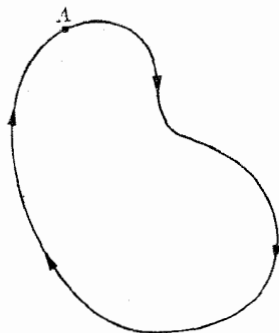
همچنین از معادله (۱۵.۸) فهمیده می‌شود که انرژی پتانسیل یک نیروی ثابت، برابر است با

$$E_p = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \quad (19.8)$$

انرژی پتانسیل همیشه با تقریب یک ثابت اختیاری تعریف می‌شود، زیرا اگر به جای معادله (۱۸.۸) بنویسیم $mgy + C$ ، معادله (۱۶.۸) تغییر نمی‌کند، چون ثابت C در هر دو جمله ظاهر و در نتیجه حذف می‌شود. به سبب این مقدار ثابت اختیاری، می‌توان صفر یا تراز مرجع انرژی پتانسیل را در جایی که بیشتر مناسب باشد انتخاب کرد. به عنوان مثال، در مسایل مربوط به سقوط اجسام، سطح زمین مناسبترین تراز مرجع است، از این رو انرژی پتانسیل مربوط به گرانش را در سطح زمین برابر صفر اختیار می‌کنند. برای ماه حقیقی یا یک قمر مصنوعی، صفر انرژی پتانسیل معمولاً در بینهایت تعریف می‌شود.

کار انجام یافته به وسیله نیروهای پایستار به مسیر پیچیده شده بستگی ندارد.

این بیان از معادله تعریفی (۱۷.۸) نیز پیداست، زیرا مسیری که A و B را به هم می‌پیوندد هر چه باشد، اختلاف $E_{p,A} - E_{p,B}$ تغییر نمی‌کند، برای اینکه این تفاضل تنها



شکل ۱۴.۸. کار انجام یافته به وسیله یک نیروی پایستار در طول یک مسیر بسته برابر صفر است.

به مختصات نقطه‌های A و B بستگی دارد. در حالت خاص، اگر مسیر بسته باشد (شکل ۱۴.۸)، به گونه‌ای که نقطه انتهایی بر نقطه ابتدایی منطبق باشد (یعنی A و B روی یک نقطه قرار داشته

باشند) $E_{p,A} - E_{p,B}$ و کار برابر صفر است ($W = 0$). این بدان معنی است که در قسمتی از مسیر، کار مثبت و در بخش دیگر کار برابر با قسمت اول ولی با علامت منفی است تا کار کل برابر صفر شود. اگر مسیر پیچیده شده بسته باشد علامت انتگرال رابطه (۱۷.۸) را به صورت $\oint$ می‌نویسند. دایره وسط علامت انتگرال بسته بودن مسیر را نشان می‌دهد. بنابراین برای یک نیروی پایستار داریم

$$W_0 = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (20.8)^*$$

بعکس، می‌توان ثابت کرد که شرط بیان شده به وسیله معادله (۲۰.۸) را می‌توان به عنوان تعریف نیروی پایستار پذیرفت. به عبارت دیگر، اگر نیرویی مانند $\mathbf{F}$ در یک مسیر بسته اختیاری در معادله (۲۰.۸) صدق کند، در این صورت می‌توان ثابت کرد که معادله (۱۷.۸) درست است.

برای برقرار بودن معادله (۱۷.۸) لازم است

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dE_p \quad (21.8)$$

باشد، زیرا در این صورت داریم

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A dE_p \\ = - (E_{p,B} - E_{p,A}) = E_{p,A} - E_{p,B}$$

که با معادله (۱۷.۸) مطابقت دارد. توجه داشته باشید برای اینکه به جای $E_{p,B} - E_{p,A}$ مقدار $E_{p,A} - E_{p,B}$ به دست آید، علامت منفی در رابطه (۲۱.۸) لازم است.

چون $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos \theta$ است که در آن θ زاویه بین نیرو و جابجایی است، به جای معادله (۲۱.۸) می‌توان نوشت

$$F \cos \theta = - \frac{dE_p}{ds} \quad (22.8)$$

همچنانکه در باره شکل ۱۰.۸ توضیح داده شد، $F \cos \theta$ تصویر نیرو روی راستای جابجایی ds است؛ بنابراین اگر $E_p(x, y, z)$ معلوم باشد، می‌توان با محاسبه کمیت $-dE_p/ds$ ، یعنی مشتق مکانی E_p روی یک راستا با علامت مخالف، مؤلفه $\mathbf{F}$ را روی آن راستا به دست آورد که آن را مشتق راستایی E_p می‌نامند. هرگاه یک بردار به گونه‌ای باشد که تصویر آن روی یک راستای اختیاری برابر مشتق راستایی یک تابع نسبت به همان راستا باشد، آن بردار را گرادیان^۲ این تابع می‌نامند. بنابراین، گوییم $\mathbf{F}$ برابر است با گرادیان

☆ برای هر برداری مانند $\mathbf{V}$ که تابع مختصات نقطه باشد، انتگرالی به شکل $\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ روی یک مسیر بسته، گردش (circulation) بردار $\mathbf{V}$ نامیده می‌شود. در این کتاب با عبارت فوق برخورد فراوان خواهیم داشت.

E_p با علامت مخالف، ومعادله (۲۲.۸) را به صورت کلی زیر می نویسیم

$$\mathbf{F} = - \text{grad } E_p$$

که در آن «grad» به معنای گرادیان است. اگر مؤلفه‌های قائم $\mathbf{F}$ روی محورهای X و Y و Z مورد توجه باشند، در معادله (۲۲.۸)، $F \cos \theta$ بترتیب برابر می‌شود با F_x ، F_y و F_z ، و جابجایی ds عبارت می‌شود از dx ، dy و dz ، به‌طوری که داریم

$$F_x = - \frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial E_p}{\partial z} \quad (۲۳.۸)$$

یا

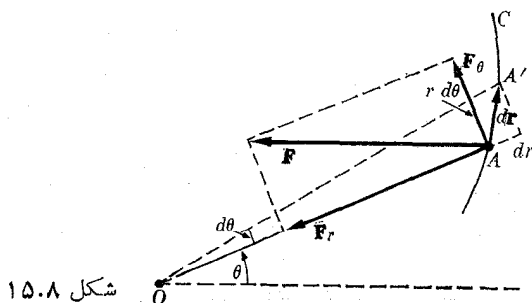
$$\mathbf{F} = - \text{grad } E_p = - \left(\mathbf{u}_x \frac{\partial E_p}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial E_p}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial E_p}{\partial z} \right). \quad (۲۴.۸)$$

توجه داشته باشید که در نوشتن معادله‌های (۲۳.۸) یا (۲۴.۸) برای اولین بار در این کتاب نماد مربوط به مشتق‌های جزئی به کار می‌رود. استفاده از این علامت الزامی است، زیرا پتانسیل $E_p(x, y, z)$ در حالت کلی، تابعی از سه متغیر x ، y و z است. ولی وقتی ذره‌ای روی محور X ها به اندازه dx جابجا می‌شود، مختصات y و z ذره تغییر نمی‌کند. در حالت کلی به جای نوشتن dE_p/dx باید علامت $\partial E_p/\partial x$ را که ریاضی‌دانها برای این‌گونه موارد پذیرفته‌اند به کار برد.

اگر حرکت روی یک صفحه صورت بگیرد و بخواهیم مختصات r و θ را به کار ببریم (شکل ۱۵.۸) جابجایی روی بردار شعاع $\mathbf{r}$ برابر dr و جابجایی عمود بر آن مساوی $r d\theta$ است، بنابراین مؤلفه‌های شعاعی و عرضی نیرو برابر می‌شود با

$$F_r = - \frac{\partial E_p}{\partial r}, \quad F_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta}. \quad (۲۵.۸)$$

توجه کنید که باز هم از نماد مشتق جزئی استفاده کردیم.



شکل ۱۵.۸

یکی از موارد بسیار مهم حالتی است که در آن انرژی پتانسیل E_p به فاصله r بستگی دارد ولی مستقل از زاویه θ است؛ به عبارت دیگر، به جای $E_p(r, \theta)$ داریم $E_p(r)$. در

این حالت $\partial E_p / \partial \theta = 0$ است و از معادله‌های (۲۵.۸) به دست می‌آید $F_\theta = 0$. در این صورت نیرو مؤلفه عرضی ندارد، و تنها دارای یک مؤلفه شعاعی است، بدین معنی که نیرو مرکزی است و خط اثر نیرو همیشه از مرکز می‌گذرد. متقابلاً، اگر نیرو مرکزی باشد، تنها مؤلفه شعاعی وجود دارد و $F_\theta = 0$ است که موجب می‌شود $\partial E_p / \partial \theta = 0$ شود، در نتیجه E_p مستقل از زاویه θ است، بنابراین یک نیروی مرکزی تنها به فاصله ذره از مرکز بستگی دارد. این نتیجه مهم را می‌توان در بیان زیر خلاصه کرد:

انرژی پتانسیل مربوط به یک نیروی مرکزی فقط به فاصله ذره از مرکز بستگی دارد و برعکس.

اگر نیروها مرکزی نباشند، نسبت به نقطه O گشتاور نیرویی وجود خواهد داشت که از رابطه $\tau = F_\theta r$ به دست می‌آید، زیرا نیروی شعاعی در گشتاور نیرو دخالت ندارد. با استفاده از رابطه دوم معادله‌های (۲۵.۸)، گشتاور نیرو نسبت به O برابر می‌شود با

$$\tau = - \frac{\partial E_p}{\partial \theta}. \quad (26.8)$$

این یک رابطه کلی است که گشتاور نیرو را در راستای عمود بر صفحه‌ای که زاویه θ در آن اندازه‌گیری می‌شود به دست می‌دهد. چون گشتاور نیرو موجب تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای می‌شود [به معادله (۳۸.۷) مراجعه کنید]، نتیجه می‌گیریم

وقتی انرژی پتانسیل به زاویه بستگی دارد، گشتاور نیرویی بردستگاه وارد می‌شود و این گشتاور تغییری در اندازه حرکت زاویه‌ای در راستای عمود بر صفحه زاویه به وجود می‌آورد.

اشاره به مفهوم گرادیان. در فیزیک، اغلب به روابطی همانند معادله (۲۴.۸) برخورد می‌کنیم؛ بنابراین لازم است تصویر روشنی از معنای گرادیان داشته باشیم. تابعی مانند $V(x, y, z)$ را که به سه مختصه یک نقطه بستگی دارد در نظر می‌گیریم. سطحهای

$$V(x, y, z) = C_1 \quad \text{و} \quad V(x, y, z) = C_2$$

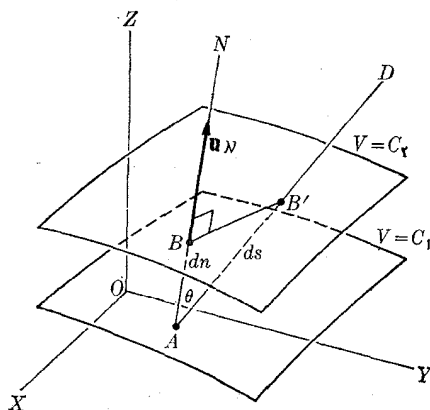
را رسم می‌کنیم (شکل ۱۶.۸). در جایی از نقطه‌ای مانند A واقع روی صفحه C_1 به نقطه‌ای مانند B روی C_2 ، تابع V به اندازه $C_2 - C_1$ تغییر می‌کند. اگر اختلاف C_1 و C_2 بینهایت کوچک باشد، می‌توان نوشت $dV = C_2 - C_1$. تغییر V نسبت به واحد طول یا «مشتق راستایی» V برابر است با

$$dV/ds = (C_2 - C_1)/ds.$$

حالتی را مورد بررسی قرار دهیم که در آن A و B هر دو روی N ، عمود مشترک دو سطح قرار دارند. مشتق راستایی در امتداد AN برابر است با dV/dn . از طرف دیگر، از شکل ۱۶.۸ پیداست که $dn = ds \cos \theta$ می‌باشد، بنا بر این داریم

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn} \frac{dn}{ds} = \frac{dV}{dn} \cos \theta.$$

این رابطه مشتق راستایی در امتداد عمود را با مشتق راستایی در یک راستای غیر مشخص دیگر به هم مربوط می‌کند. چون $\cos \theta$ به ازای $\theta = 0$ بیشینه است، نتیجه می‌گیریم که



شکل ۱۶.۸. گرادیان $V(x, y, z)$ یک تابع برداری است که در هر نقطه بر سطح $V = \text{const}$ عمود می‌باشد.

dV/dn بیشینه مشتق راستایی V را به دست می‌دهد. با وارد کردن بردار یکای $\mathbf{u}_N$ عمود بر سطح در نقطه A ، گرادیان چنین تعریف می‌شود:

$$\text{grad } V = \mathbf{u}_N \frac{dV}{dn}$$

در نتیجه گرادیان برداری است عمود بر سطح $V(x, y, z) = \text{const}$ و برابر است با بیشینه مشتق راستایی $V(x, y, z)$. پس می‌توان نوشت

$$dV/dn = |\text{grad } V| \cos \theta.$$

این رابطه نشان می‌دهد که مشتق مکانی در راستای AD یا مشتق راستایی $V(x, y, z)$ برابر است با تصویر گرادیان V روی این راستا. این رابطه‌ای است که برای رسیدن از معادله (۲۲.۸) به معادله‌های (۲۳.۸) و (۲۴.۸) مورد استفاده قرار گرفت. برای خلاصه کردن نمادگذاری، عملگر دیفرانسیل ∇ را که «دل» خوانده می‌شود معرفی می‌کنیم که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

با توجه به این عملگر، می‌توان گرادیان را چنین نوشت:

$$\text{grad } V = \nabla V.$$

مثال ۸.۸. انرژی پتانسیل وابسته به نیروهای مرکزی (الف) $F = kr$ و (ب) $F = k/r^2$ را حساب کنید. در هر دو حالت اگر k منفی باشد نیرو جاذبه و در صورت مثبت بودن آن، نیرو دافعه است.

حل: با به کار بردن معادله (۲۵.۸) در حالت (الف) داریم

$$F = -\partial E_p / \partial r = kr \quad \text{یا} \quad dE_p = -kr dr.$$

با انتگرال گیری از آن به دست می آید

$$E_p = \int -kr dr = -\frac{1}{2}kr^2 + C.$$

ثابت C از اختصاص دادن یک مقدار E_p به یک نقطه مشخص تعیین می شود. طبق عادت، به ازای $k = 0$ مقدار E_p را برابر صفر می گیرند ($E_p = 0$)، در نتیجه $C = 0$ و $E_p = -kr^2/2$ می شود. چون $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ است، می توان نوشت $E_p = -k(x^2 + y^2 + z^2)/2$. با استفاده از معادله (۲۳.۸) مؤلفه های نیرو به دست می آیند:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = kx, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = ky, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = kz$$

و این نتیجه ای است که انتظار آن را داشتیم، زیرا صورت برداری نیروی مرکزی $F = kr$ چنین نوشته می شود: $\mathbf{F} = k\mathbf{r} = k(u_x x + u_y y + u_z z)$.

در حالت (ب) داریم $F = -\partial E_p / \partial r = k/r^2$ یا $dE_p = -k(dr/r^2)$ با انتگرال گیری از آن به دست می آید

$$E_p = \int -k \frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r} + C.$$

برای نیروهای متناسب با $1/r$ معمولاً در $r = \infty$ انرژی پتانسیل را برابر صفر قرار می دهند، در نتیجه $C = 0$ و $E_p = k/r$ می شود. در این حالت مؤلفه های قایم نیرو کدامند؟

۸.۸ بقای انرژی یک ذره

وقتی که نیروی وارد بر یک ذره پایستار باشد، می توانیم معادله (۱۷.۸) را با معادله کلی (۱۳.۸) ترکیب کنیم. به دست می آید

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

یا

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_p)_A. \quad (27.8)$$

کمیت $(E_p + E_k)$ را انرژی کل ذره می نامند و آن را با E نشان می دهند. به گفته دیگر، انرژی کل یک ذره برابر است با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن، یا

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x, y, z). \quad (28.8)$$

معادله (27.8) نشان می دهد که

اگر نیروها پایستار باشند انرژی کل ذره همیشه ثابت باقی می ماند،

چون حالت های نمایش داده شده با A و B اختیاری هستند. بنابراین برای هر وضعی از ذره می توان نوشت

$$E_p + E_k = \text{const} \quad (29.8)$$

به عبارت دیگر، انرژی ذره پایسته می ماند. بدین دلیل است که می گوئیم زمانی که انرژی پتانسیل وجود دارد نیروها پایستارند. به عنوان مثال، در مورد جسمی که سقوط می کند، دیدیم [معادله (18.8)] که $E_p = mgy$ است و از بقای انرژی به دست می آید

$$E = (mv^2/2) + mgy = \text{const}. \quad (30.8)$$

اگر در آغاز ذره در ارتفاع y_0 و دارای سرعت صفر باشد، انرژی کل برابر mgy_0 است و داریم $(mv^2/2) + mgy = mgy_0$ یا $v^2 = 2g(y_0 - y) = 2gh$ که در آن $h = y_0 - y$ ارتفاعی است که جسم سقوط کرده است. این نتیجه، فرمول معروف سرعت کسب شده در سقوط از ارتفاع h است. ولی باید توجه داشت که معادله (30.8) تنها به حرکت در راستای قائم منحصر نمی شود و در مورد حرکت یک پرتابه که تحت زاویه ای با راستای قائم جابجا می شود نیز معتبر است.

یادآوری می کنیم که به ازای یک انرژی کل مشخص، بزرگی سرعت (در هر راستای حرکت) در یک نقطه مشخص، از معادله (29.8) به دست می آید. همچنانکه معادله (30.8) نشان می دهد، این امر بویژه در حرکت براثر نیروی گرانی کاملاً روشن است.

مثال 9.8. حداقل ارتفاعی را پیدا کنید که باید یک ساچمه رها شود تا بتواند تمام محیط یک حلقه را مطابق آنچه که شکل 17.8 نشان می دهد بپیماید. فرض کنید حرکت ساچمه بدون غلتش است و نیروی مالش وجود ندارد.

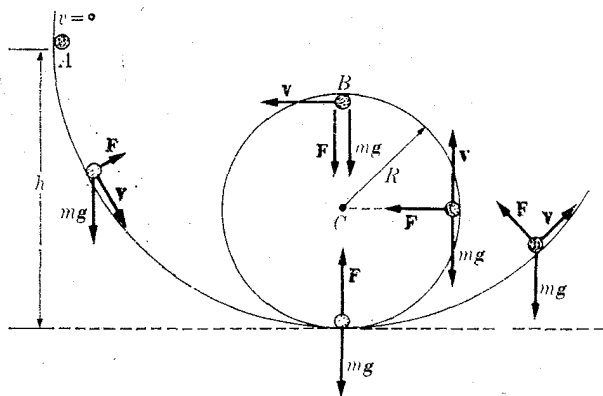
حل: فرض کنیم، مطابق شکل 17.8، ساچمه از نقطه A به ارتفاع h نسبت به پایین دایره رها می شود. سرعت ساچمه در سرازیری رو به افزایش و در سربالایی رو به کاهش می گذارد. در هر نقطه از مسیر، نیروهای وارد بر ساچمه عبارتند از وزن آن mg و نیروی ایجاد شده از طرف لغزشگاه. (نیروی F به سمت مرکز حلقه است زیرا لغزشگاه ساچمه را «هل» می دهد ولی «نمی کشد.») در بالاترین نقطه mg و F هر دو به سمت مرکز O هستند و بنا به معادله (28.7) باید داشته باشیم

$$F + mg = \frac{mv^2}{R}$$

که در آن R شعاع حلقه (لغزشگاه) است. چون F نمی تواند منفی باشد، حداقل سرعت ساچمه در نقطه B برای پیمودن دایره، با $F = 0$ یا $mg = mv^2/R$ متناظر می شود، بنابراین داریم

$$v^2 = gR.$$

اگر سرعت کوچکتر از $\sqrt{gR}$ باشد، اثر نیروی وزن به سمت پایین بزرگتر از نیروی مرکزگری لازم می شود و ساچمه پیش از رسیدن به نقطه B از محیط حلقه کنده می شود و قبل از افتادن روی دایره یک سهمی رسم می کند.



شکل ۱۷.۸

برای به دست آوردن ارتفاع h ، اشاره می کنیم که انرژی کل در نقطه A برابر است با $E_A = (E_p + E_k)_A = mgh$ ، زیرا سرعت برابر صفر ($v = 0$) است. در نقطه B که $v^2 = gR$ و $y = 2R$ داریم

$$E_B = (E_k + E_p)_B = \frac{1}{2} m(gR) + mg(2R) = \frac{5}{2} mgR.$$

از برابر قرار دادن E_B و E_A می آید $h = 5R/2$ ؛ این مقدار حداقل ارتفاعی است که باید ساچمه را از آنجا رها کرد تا بتواند محیط حلقه را بپیماید. این نتیجه تا زمانی ارزش دارد که از نیروهای مالش صرف نظر شود. اگر ساچمه غلتش هم داشته باشد باید از روشهایی که در فصل ۱۰ معرفی می شوند استفاده کرد.

۹.۸ حرکت مستقیم الخط بر اثر نیروهای پایستار

معمولا در یک حرکت مستقیم الخط، انرژی پتانسیل تنها به یکی از مختصات مثلا x بستگی دارد، و معادله (۳۸.۸) مربوط به بقای انرژی به صورت زیر درمی آید:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + E_p(x) \quad (31.8)$$

که در آن E ، انرژی کل، ثابت است. این رابطه مفید بودن عملی مفهوم انرژی را نشان می‌دهد. در حرکت مستقیم الخط $v = dx/dt$ است و معادله (۳۱.۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x). \quad (32.8)$$

با حل این رابطه بر حسب dx/dt به دست می‌آید

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ \frac{2}{m} [E - E_p(x)] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (33.8)$$

در شرایط فعلی می‌توانیم معادله بالا را به صورتی بنویسیم که در آن متغیرهای x و t از هم جدا باشند، یعنی متغیر x تنها در یک طرف و t تنها در طرف دیگر معادله ظاهر شود. برای این کار می‌نویسیم

$$\frac{dx}{\left\{ \frac{2}{m} [E - E_p(x)] \right\}^{\frac{1}{2}}} = dt.$$

با انتگرال‌گیری (و با قراردادن $t_0 = 0$ ، جهت سهولت) به دست می‌آید

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\left\{ \frac{2}{m} [E - E_p(x)] \right\}^{\frac{1}{2}}} = \int_0^t dt = t. \quad (34.8)$$

این معادله امکان می‌دهد رابطه‌ای بین x و t به دست آوریم و بدین طریق مسئله حرکت مستقیم الخط ذره را حل کنیم. بنا براین، هر زمان که بتوان تابع انرژی پتانسیل را پیدا کرد [در صورتی که نیرو به صورت تابعی از x معلوم باشد کار نسبتاً آسانی است، زیرا برای به دست آوردن $E_p(x)$ کافی است معادله (۲۳.۸) را به کار ببریم]، اصل بقای انرژی که با معادله (۳۴.۸) بیان شده مستقیماً حل مسئله حرکت مستقیم الخط را به دست می‌دهد.

مثال ۱۵.۸. با استفاده از معادله (۳۴.۸) مسئله حرکت مستقیم الخط بر اثر یک نیروی ثابت را حل کنید.

حل: در این حالت F ثابت است. اگر محور X را در راستای نیرو بگیریم، از معادله اول روابط (۲۳.۸) داریم $F = -dE_p/dx$ یا $dE_p = -F dx$. با انتگرال‌گیری به دست می‌آید $E_p = Fx + C$ ، و با قراردادن $E_p = 0$ برای $x = 0$ ، به دست می‌آید $C = 0$. بنا براین

$$E_p = -Fx$$

رابطه انرژی پتانسیل مربوط به یک نیروی ثابت است. اگر داشته باشیم $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x F$ ، یعنی نیروی $\mathbf{F}$ در راستای محور X ها باشد، این رابطه با معادله (۱۹.۸) مطابقت می‌کند. برای

سهولت x را برابر صفر قرار می‌دهیم و با استفاده از معادله (۳۴.۸) داریم

$$\frac{1}{(2/m)^{1/2}} \int_0^x \frac{dx}{(E + Fx)^{1/2}} = t$$

یا

$$\frac{2}{F} (E + Fx)^{1/2} - \frac{2}{F} E^{1/2} = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} t.$$

اگر این رابطه را نسبت به x حل کنیم به دست می‌آید

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m}\right) t^2 + \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} t.$$

چون $F/m = a$ و انرژی کل برابر با $E = mv^2/2 + Fx$ است، معلوم می‌شود که در $t = 0$ موقعی که $x = 0$ باشد، انرژی تماماً جنبشی و مقدار آن برابر $mv_0^2/2$ است. بنابراین $v_0^2 = 2E/m$ است و بالاخره برای x به دست می‌آید $x = at^2/2 + v_0 t$. $x = 0$ است که قبلاً به دست آوردیم، هرگاه در آن $x_0 = 0$ باشد. بدیهی است این مسئله به قدری آسان است که می‌توان با روشهای به کار رفته در فصل ۵ آن را حل کرد. در اینجا تنها جهت آشنایی با تکنیک حل معادله حرکت با استفاده از اصل بقای انرژی این مسئله را آوردیم.

۱۰.۸ حرکت بر اثر نیروهای مرکزی پایستار

درمورد یک نیروی مرکزی، موقعی که E_p تنها به r بستگی دارد، معادله (۲۸.۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r). \quad (35.8)$$

از این رابطه می‌توان سرعت را برای هر فاصله‌ای به دست آورد. در بیشتر موارد، قدرمطلق $E_p(r)$ با افزایش r کاهش می‌یابد. در نتیجه، در فاصله‌های خیلی دور از مرکز $E_p(r)$ قابل اغماض می‌شود و سرعت ثابت و مستقل از راستای حرکت خواهد شد. همین اصل را در مثال ۱۶.۷، وقتی که در شکل ۲۸.۷ گفتیم سرعت نهایی ذره که از B دور می‌شود، برابر با سرعت اولیه در نقطه A است، به کار بردیم.

توجه داشته باشید که وقتی حرکت بر اثر نیروهای مرکزی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، دو قضیه بقا وجود دارد. یکی مربوط به بقای اندازه حرکت زاویه‌ای است که در بخش ۱۳.۷ مورد بحث قرار گرفت و دیگری بقای انرژی که با معادله (۳۵.۸) بیان شد. هنگام به کار بردن مختصات قطبی r و θ ، با توجه به اینکه مؤلفه‌های سرعت در این مختصات عبارتند از $v_r = dr/dt$ و $v_\theta = r d\theta/dt$ ، بناً به معادله (۳۳.۵) می‌توان نوشت

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

ولی، بنا به اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای، با استفاده از معادله (۳۵.۷)،
 $L = mr^2 d\theta/dt$ داریم

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{L^2}{(mr)^2}$$

که در آن L اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است، بنا براین

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{(mr)^2}.$$

با وارد کردن این نتیجه در معادله (۳۵.۸) به دست می‌آید

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r). \quad (36.8)$$

این رابطه شباهت خیلی نزدیکی به معادله (۳۲.۸) دارد که برای حرکت مستقیم‌الخط با سرعت dr/dt به دست آوردیم، اگر فرض کنیم، تا آنجا که به حرکت شعاعی مربوط می‌شود ذره تحت یک انرژی پتانسیل «مؤثر»

$$E_{p, \text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r) \quad (37.8)$$

جایگزین می‌شود. جمله اول $E_{p, c}(r) = L^2/2mr^2$ ، انرژی پتانسیل گریز از مرکز می‌نامند، زیرا «نیروی» وابسته به آن، با به کار بردن معادله (۲۵.۸) برابر است با

$$F_c = - \frac{\partial E_{p, c}}{\partial r} = \frac{L^2}{2mr^3}$$

که به دلیل مثبت بودن در خلاف سوی مبدأ یعنی یک نیروی گریز از مرکز است. بدیهی است هیچ نیروی گریز از مرکزی بر ذره وارد نمی‌شود، مگر نیروی دافعه‌ای که از پتانسیل واقعی $E_p(r)$ ناشی شود، بنا براین «نیروی» گریز از مرکز F_c تنها یک مفهوم ریاضی مفید است. از لحاظ فیزیکی، این مفهوم، تمایل ذره را به جایابی در خط مستقیم و اجتناب از حرکت روی منحنی، بنا به قانون لختی، بیان می‌کند. با وارد کردن معادله (۳۷.۷) در معادله (۳۶.۸) به دست می‌آید

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p, \text{eff}}(r).$$

با حل این معادله نسبت به dr/dt به دست می‌آید

$$\frac{dr}{dt} = \left\{ \frac{2}{m} [E - E_{p, \text{eff}}(r)] \right\}^{1/2} \quad (38.8)$$

شکل ظاهری این رابطه مانند معادله (۳۳.۸) است که برای حرکت مستقیم الخط به دست آوردیم. با جدا کردن متغیرهای r و t از یکدیگر و انتگرال گیری (و با قراردادن $t_0 = 0$) داریم

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\left\{ \frac{2}{m} [E - E_{p, \text{eff}}(r)] \right\}^{\frac{1}{2}}} = \int_0^t dt = t. \quad (۳۹.۸)$$

این رابطه فاصله r را بر حسب زمان t [یعنی $r(t)$] به دست می‌دهد، بنا بر این حل مسئله دینامیک مربوط به حرکت شعاعی را میسر می‌سازد.

اگر معادله اندازه حرکت زاویه‌ای $L = mr^2 d\theta/dt$ را بر حسب $d\theta/dt$ حل کنیم به دست می‌آید

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (۴۰.۸)$$

پس اگر $r(t)$ به دست آمده از معادله (۳۹.۸) را در معادله (۴۰.۸) قرار دهیم، L/mr^2 به صورت تابعی از زمان به دست می‌آید و با انتگرال گیری از آن داریم

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt \quad \text{یا} \quad \theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt. \quad (۴۱.۸)$$

رابطه بالا θ را به صورت تابعی از زمان، یعنی $\theta(t)$ را به دست می‌دهد. بدین طریق با به دست آوردن حرکت زاویه‌ای همچون حرکت شعاعی به صورت تابعی از زمان، می‌توان مسئله را کاملاً حل کرد.

با وجود این، گاهی، معادله مسیر بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد. از تقسیم معادله بر (۳۸.۸) معادله (۴۰.۲) می‌توان نوشت

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\left\{ \frac{2}{m} [E - E_{p, \text{eff}}(r)] \right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{L}{mr^2}}. \quad (۴۲.۸)$$

پس از جدا کردن متغیرهای r و θ و انتگرال گیری به دست می‌آید

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(\frac{m}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{2}{m} \right) [E - E_{p, \text{eff}}(r)] \right\}^{\frac{1}{2}}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0. \quad (۴۳.۸)$$

این معادله که r و θ را به هم مربوط می‌کند معادله مسیر را در مختصات قطبی به دست می‌دهد. برعکس اگر معادله مسیر معلوم باشد می‌توان $dr/d\theta$ را حساب کرد، در این صورت رابطه (۴۲.۸) امکان می‌دهد انرژی پتانسیل و در نتیجه نیرو را حساب کنیم.

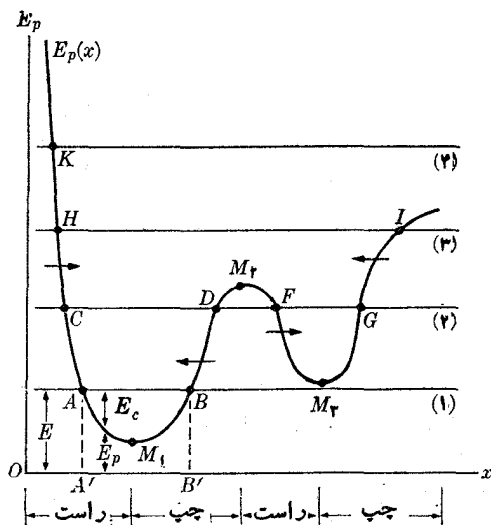
این بخش نشان داد که چگونه از اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی می‌توان مسئله حرکت یک ذره بر اثر یک نیروی مرکزی را حل کرد. بنا بر این خواننده باید تا بحال

متوجه شده باشد که این اصول پیامد کنجکاویهای ریاضی نیستند، بلکه ابزارهایی واقعی و مؤثر برای حل مسائل دینامیک می باشند. باید توجه داشت که اصل بقای انرژی بتهایی برای حل مسئله حرکتی که بر اثر یک نیروی مرکزی صورت می گیرد کافی نیست و باید از اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای نیز استفاده کرد. در حرکت مستقیم الخط اصل بقای انرژی بتهایی برای حل مسئله کافی است. در واقع انرژی یک کمیت اسکالر است و نمی تواند برای تعیین سوی حرکت کمک کند، در صورتی که در حرکت مستقیم الخط راستا و سوی حرکت از همان آغاز ثابت است.

در خاتمه، باید این نکته را کاملاً روشن کنیم که اصل بقای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای، به گونه‌ای که در این فصل به کار گرفته شدند، از ویژگیهای یک ذره منفرد در موقعیتهای خاص حرکت خود هستند، و هیچگونه رابطه مستقیمی با بقای احتمالی انرژی کل جهان ندارند. راجع به این موضوع در فصل بعد به طور مفصل گفتگو خواهیم داشت.

۱۱.۸ بحث درباره منحنیهای انرژی پتانسیل

نمودارهایی که $E_p(x)$ را بر حسب x در حرکتهای مستقیم الخط یا یک بعدی، و $E_p(r)$ را بر حسب r در مسایل مربوط به نیروهای مرکزی نشان می دهند، برای درک حرکت یک ذره، حتی بدون حل معادله حرکت، بسیار مفیدند. شکل ۱۸.۸ یک منحنی ممکن برای انرژی پتانسیل در یک حرکت یک بعدی را نمایش می دهد. وقتی که اولین معادله از معادله‌های (۲۳.۸) را به کار می بریم، به ازای هر مقدار x ، نیروی وارد بر ذره برابر است با $*F = -dE_p/dx$.



شکل ۱۸.۸ - رابطه بین حرکت در یک خط مستقیم و انرژی پتانسیل

☆ در اینجا احتیاج نیست از علامت مشتق جزئی استفاده شود، زیرا E_p تنها به یک متغیر x بستگی دارد.

dE_p/dx شیب منحنی $E_p(x)$ را نشان می‌دهد. شیب منحنی مثبت است هرگاه منحنی صعودی یا به سمت بالا باشد، و جایی که منحنی نزولی یا به سمت پایین باشد شیب منفی است. بنابراین نیروی F ، (با علامت مخالف شیب) منفی یا به سمت چپ است هرگاه انرژی پتانسیل نزولی باشد. در شکل ۱۸-۸ این وضع با پیکانهای افقی و به کمک نواحی مختلفی که در زیر شکل مشخص شده‌اند، نشان داده شده است.

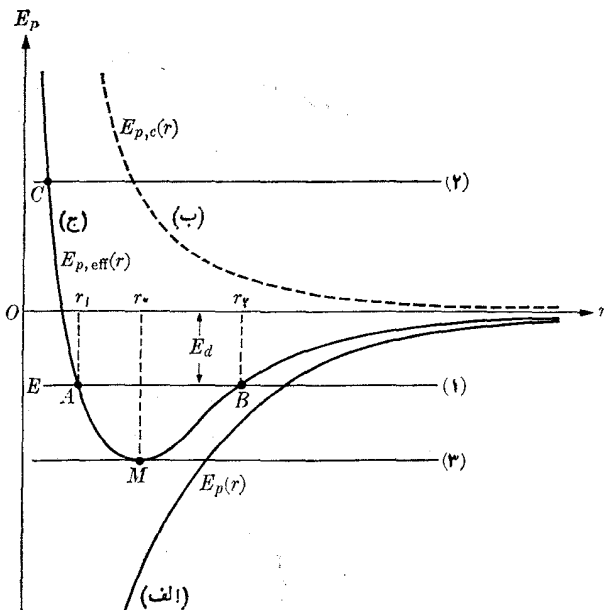
در نقاطی مانند M_1 ، M_2 و M_3 که انرژی بیشینه یا کمینه است، $-dE_p/dx = 0$ یا $F = 0$ می‌باشد؛ به گفته دیگر، این نقاط، وضعهای ترازمندی‌اند. در نقاطی که $E_p(x)$ کمینه است ترازمندی پایدار است، زیرا اگر ذره اندکی از وضع تعادل خود جابجا شود، نیرویی روی آن اثر می‌کند که می‌خواهد آن را به وضع ترازمندی برگرداند. جاهایی که $E_p(x)$ بیشینه است، ترازمندی ناپایدار است، زیرا کوچکترین جابجایی ذره از این وضع به سمت که باشد، باعث می‌شود نیرویی بر ذره وارد شود که ذره را بیش از پیش از وضع ترازمندی دور می‌کند.

اکنون ذره‌ای را با انرژی کل E در نظر می‌گیریم، مانند آنچه خط شماره (۱) در شکل ۱۸-۸ نشان می‌دهد. برای هر مکان x ، انرژی پتانسیل E_p از تصویر آن نقطه منحنی روی محور عرضها به دست می‌آید و انرژی جنبشی $E_k = E - E_p$ از فاصله منحنی $E_p(x)$ تا خط E معلوم می‌شود. در شکل ۱۸-۸ خط E منحنی $E_p(x)$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. در سمت چپ نقطه A و سمت راست نقطه B انرژی E کوچکتر از انرژی پتانسیل $E_p(x)$ می‌باشد، بنابراین در این ناحیه، انرژی جنبشی $E_k = E - E_p$ منفی است. ولی این امر غیرممکن است زیرا $E_k = (mv^2/2)$ ضرورتاً مثبت است. بنابراین حرکت ذره در فاصله AB محدود است و ذره بین $x = A'$ و $x = B'$ نوسان می‌کند. سرعت ذره در این نقاط صفر می‌شود و حرکت آن معکوس می‌گردد. این نقاط، نقطه‌های برگشت نامیده می‌شوند.

اگر ذره دارای انرژی بالاتری، مثلاً مربوط به خط (۲) باشد، دو ناحیه ممکن برای حرکت آن وجود دارد: یکی نوسان بین C و D و دیگری نوسان بین F و G . با وجود این، اگر ذره در یکی از این ناحیه‌ها باشد، هرگز نمی‌تواند به ناحیه دیگر برود، زیرا برای این کار باید از ناحیه DF که در آنجا انرژی جنبشی منفی، در نتیجه قدغن، است بگذرد. گوییم دو ناحیه که در آنجاها حرکت می‌تواند انجام گیرد با یک سد پتانسیل^۲ از یکدیگر جدا شده‌اند. در تراز انرژی (۳)، حرکت بین H و I نوسانی است. بالاخره در تراز انرژی (۴) حرکت دیگر نوسانی نیست و ذره بین K و بینهایت جابجا می‌شود. به عنوان مثال، اگر ذره در آغاز به سمت چپ حرکت کند، بارسیدن به نقطه K به عقب «پرتاب» می‌شود و به سمت راست حرکت می‌کند و دیگر هرگز بر نمی‌گردد. اگر حرکت ذرات اتمی مورد نظر باشد، که در مورد آنها باید از مکانیک کوانتومی استفاده کرد، توضیحات بالا به بعضی اصلاحات نیاز دارند.

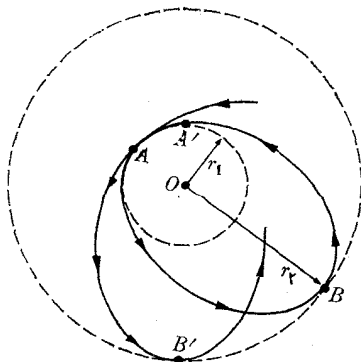
اکنون حالت مهم نیروهای مرکزی را در نظر می‌گیریم؛ فرض کنیم انرژی پتانسیل

$E_p(r)$ مربوط به نیرویی باشد که در هر فاصله‌ای جاذبه است، به‌گفته دیگر، همچنانکه منحنی (الف) در شکل ۱۹.۸ نشان می‌دهد، $F = -\partial E_p / \partial r$ منفی و $E_p(r)$ یک تابع صعودی است. پتانسیل گریز از مرکز $E_{p,c} = L^2 / 2mr^2$ با خط نقطه چین مشخص شده است. این



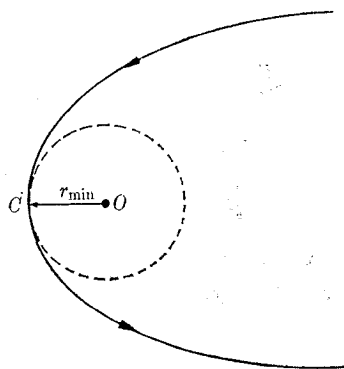
شکل ۱۹.۸. رابطه‌های انرژی در حرکت ناشی از نیروهای مرکزی

پتانسیل برای فاصله‌های دور بسیار ناچیز است ولی در فاصله‌های کوتاه خیلی سریع افزایش می‌یابد. در بیشتر حالات مورد توجه در فیزیک، پتانسیل گریز از مرکز در فاصله‌های کم عمده است، در نتیجه یک انرژی پتانسیل مؤثر $E_{p,eff} = E_{p,c} + E_p(r)$ به‌صورتی که در منحنی (ج) نشان داده شده است به‌دست می‌آید.



شکل ۲۰.۸. شکل کلی مسیر حرکت بر اثر نیروهای مرکزی

اگر E انرژی کل ذره با خط افقی (۱) نشان داده شود، شعاع مدار بین مقادیر کمینه و بیشینه r_p و r_a نوسان می‌کند و مدار شکل نمایش داده در شکل ۲۰.۸ را به خود می‌گیرد. ولی اگر انرژی مربوط به مقداری مانند خط (۲) در شکل ۱۹.۸ باشد، مدار مقید نیست و ذره از بینهایت تا نقطه C در نزدیکترین فاصله r_{min} می‌آید و سپس چنانکه شکل ۲۱.۸ نشان می‌دهد دور می‌شود و هرگز بر نمی‌گردد. اگر انرژی، چنانکه خط (۳) نشان می‌دهد، مربوط به M کمینه $E_{p,eff}$ باشد، تنها یک محل تقاطع وجود دارد و فاصله از مرکز ثابت باقی می‌ماند، مسیر ذره دایره‌ای به شعاع r_0 است. توجه داشته باشید به سبب اثر انرژی پتانسیل گریز از مرکز $E_{p,c}$ ، کمترین فاصله نزدیک شدن به مرکز همراه با افزایش اندازه حرکت زاویه‌ای افزایش می‌یابد.

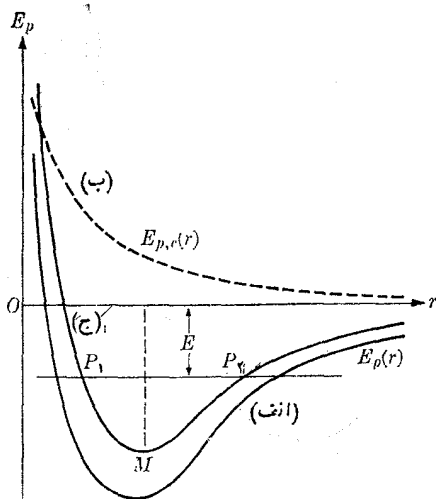


شکل ۲۱.۸. حداقل فاصله نزدیک شدن به مرکز

اگر ذره‌ای که دارای انرژی برابر با تراز (۱) شکل ۱۹.۸ است، به طریقی بتواند انرژی جذب کند و در نتیجه به تراز انرژی (۲) «بجهد»، از مرکز نیرو دور خواهد شد؛ به گفته دیگر، ذره از مرکز نیرو «می‌برد». حداقل انرژی لازم برای جدا شدن ذره از تراز انرژی (۱) در شکل ۱۹.۸ با E_d نشان داده شده است. از طرف دیگر، اگر ذره‌ای که ابتدا در تراز انرژی (۲) است هنگام گذر از نزدیک مرکز نیرو انرژی خود را به طریقی از دست بدهد، ممکن است به تراز انرژی (۱) بیفتد، در این صورت روی مدار مقید باقی می‌ماند. می‌گوییم ذره به وسیله مرکز نیرو «گیر افتاده»^۲ است به عنوان مثال، این وضع در تشکیل و تجزیه مولکولها پیش می‌آید.

در مورد یک مولکول دواتمی مانند H_2 یا CO ، انرژی پتانسیل E_p در برهم کنش بین دو اتم به صورت (ج)، شکل ۱۹.۸ می‌باشد. یک چنین انرژی پتانسیلی که با منحنی (الف) در شکل ۲۲.۸ نشان داده شده است، مربوط به نیروی جاذبه در فاصله زیاد و نیروی دافعه در فاصله کم می‌باشد، و بدین طریق مانع از آن می‌شود که اتمها جوش بخورند و به صورت یک واحد در آیند، حتی اگر هیچگونه اثر گریز از مرکزی وجود نداشته باشد. اثر

پتانسیل گریز از مرکز $E_{p,c}$ ، که با منحنی نقطه چین (ب) مشخص شده است، منحنی را تا شکل (ج) بالا می برد. بنابراین می توان آنها را در مولکول به کمک یک انرژی E در حالت نوسان نسبی بین P_1 و P_2 نمایش داد. اگر مولکول به مقدار کافی انرژی جذب کند، در این صورت ممکن است به دو اتم تشکیل دهنده خود تجزیه شود که از یکدیگر دور می شوند.



شکل ۲۲.۸. پتانسیل بین مولکولی

مثال ۱۱.۸. انرژی پتانسیل برهم کنش بین دو مولکول گاز را می توان با رابطه تقریبی زیر نشان داد:

$$E_p(r) = -E_{p,0} \left[2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} \right]$$

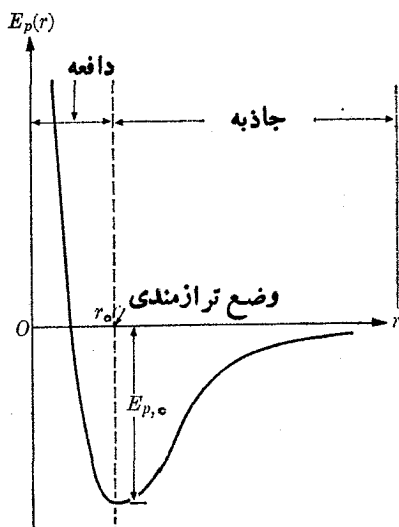
که در آن $E_{p,0}$ و r_0 ثابتهای مثبت و r فاصله بین مولکولهاست. این مدل انرژی پتانسیل مولکولی را فیزیکدان انگلیسی جی. لنارد-جونز معرفی کرده است. وضع ترازمندی و مقدار انرژی پتانسیل را در این وضع به دست آورید. شکل ۲۳.۸ نمودار $E_p(r)$ را نشان می دهد.

حل: در وضع ترازمندی، $F = -(\partial E_p / \partial r) = 0$ است، بنابراین داریم

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -E_{p,0} \left[-12 \frac{r_0^6}{r^7} + 12 \frac{r_0^{12}}{r^{13}} \right] = 0$$

یا $r = r_0$. با قرار دادن $r = r_0$ در $E_p(r)$ ، مقدار انرژی پتانسیل در نقطه ترازمندی، $E_p = -E_{p,0}$ ، به دست می آید. برای فاصله های کمتر از r_0 ، نیروی بین مولکولی دافعه است [$E_p(r)$ یک تابع نزولی است] و برای فاصله های بیشتر از r_0 ، نیرو جاذبه است [$E_p(r)$ یک تابع صعودی است].

جمله فائق یا مؤثر تر $E_p(r)$ در فاصله‌های کم و زیاد کدام است؟ به دانشجوی توصیه می‌کنیم نمودار نیرو را به صورت تابعی از r رسم کند و مشخص کند که در چه فاصله‌ای نیروی جاذبه بیشینه است. همچنین توصیه می‌شود به کتابهایی که مقادیر $E_{p,0}$ و r_0 را داده‌اند مراجعه کند.



شکل ۲۳.۸. پتانسیل بین مولکولی ندارد - جونز^۱

۱۲.۸ نیروهای ناپایستار

با نخستین نگاه معلوم می‌شود بعضی از نیروهای طبیعت پایستار نیستند. یک نمونه از این نیروها مالش است. مالش لغزشی همیشه با جابجایی مخالفت می‌کند. کار این نیرو به‌مسیر پیموده شده بستگی دارد، حتی برای مسیرهای بسته کار برابر صفر نیست، به‌طوری‌که معادله (۲۵.۸) دیگر برقرار نیست. به‌طریق مشابه، مالش شاره با سرعت مخالفت می‌کند و به‌سرعت بستگی دارد نه به مکان جسم متحرک. بنابراین به یک ذره ممکن است همزمان نیروهای پایستار و نیروهای ناپایستار وارد شوند.

به عنوان مثال به ذره‌ای که در یک شاره سقوط می‌کند، نیروی پایستار گرانش و نیروی ناپایستار مالش شاره وارد می‌شود. اگر E_p انرژی پتانسیل نیروهای پایستار و W' کار انجام شده توسط نیروهای ناپایستار باشد (معمولاً این کار منفی است زیرا نیروهای مالش با حرکت مخالفت می‌کنند)، کار کل انجام یافته روی ذره برای جابجایی از نقطه A تا نقطه B برابر است با

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} + W'.$$

در این صورت با استفاده از معادله (۱۳.۸) می‌توان نوشت

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W'$$

یا

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W'. \quad (۴۴.۸)$$

در این حالت کمیت $E_k + E_p$ ثابت باقی نمی‌ماند و برحسب اینکه W' منفی یا مثبت باشد کاهش یا افزایش پیدا می‌کند. از طرف دیگر، در این حالت $E_k + E_p$ را نمی‌توان انرژی کل ذره نامید، و این مفهوم در اینجا کاربرد ندارد، زیرا شامل تمام نیروهای موجود نیست. مفهوم انرژی کل یک ذره تنها موقعی معنا دارد که تمام نیروهای پایستار باشند. با وجود این، زمانی که بخواهیم حالتی را که در آن فقط نیروهای پایستار وارد می‌شوند (یعنی $E_k + E_p$ انرژی کل است) با حالتی که در آن نیروهای اضافی ناپایستاری نیز وجود دارند مقایسه کنیم، معادله (۴۴.۸) می‌تواند بسیار مفید باشد. در این صورت می‌گوییم معادله (۴۴.۸) انرژی کسب شده یا از دست رفته ناشی از نیروهای ناپایستار را به‌دست می‌دهد.

وجود نیروهای ناپایستار مانند نیروهای مالش، الزاماً نباید این فکر را به وجود آورد که برهم کنشهای ناپایستار بین ذرات بنیادی وجود دارند. باید یادآوری کنیم که نیروهای مالش به برهم کنش بین دو ذره مربوط نیستند، بلکه اساساً مفاهیم آماری می‌باشند (بحث بخش ۹.۷ را به‌خاطر بیاورید). به عنوان مثال، مالش لغزشی نتیجه تعداد زیادی از برهم کنشهای منفرد بین مولکولهای دو جسم در حال تماس می‌باشد. هر یک از این برهم کنشها را می‌توان به وسیله یک نیروی پایستار بیان کرد. با این حال اثر ماکروسکوپی آنها به این دلیل پایستار نیست که هر چند یک جسم پس از پایان یک مسیر بسته از نقطه نظر ماکروسکوپی به جای اولیه خود برمی‌گردد، ولی یکایک مولکولها به جای اولیه خود برگشته‌اند. بنابراین حالت نهایی به طور میکروسکوپی با حالت ابتدایی یکسان نیست، حتی به معنی آماری نیز بین این دو حالت هم ارزی وجود ندارد.

بنابراین کار ناپایستار W' نمایشگر یک انتقال انرژی است که، چون به حرکت مولکولی مربوط می‌باشد، معمولاً برگشت‌ناپذیر است. دلیل اینکه نمی‌توان آن را مجدداً به‌دست آورد، ناشی از این مشکل است که حتی از یک دیدگاه آماری نیز نمی‌توان تمام حرکات مولکولی را به حالت اول برگرداند. با وجود این در بعض حالات می‌توان حرکات مولکولی را از لحاظ آماری به شرایط اولیه برگرداند، یعنی اگرچه حالت نهایی به طور میکروسکوپی با حالت اولیه یکسان نیست، این دو، به طور آماری هم‌ارز باشند. به عنوان مثال، گازی که بکندی انبساط پیدا می‌کند و کاری انجام می‌دهد این وضع را دارد. اگر پس از انبساط گاز را با همستگی متراکم کنیم تا به شرایط فیزیکی ابتدایی خود برگردد، حالت نهایی به‌طور آماری با حالت ابتدایی هم‌ارز است. کار انجام یافته در جریان تراکم برابر است با کار در مدت انبساط با علامت مخالف، در نتیجه کار کل برابر صفر است.

مثال ۱۴.۸. جسمی از حالت سکون و از ارتفاع h_0 در داخل شاره و شکسانی رها می‌شود.

آهنگ اتلاف انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی جسم را حساب کنید

حل: وقتی که جسمی از ارتفاع y با سرعت v می‌افتد، مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی آن برابر است بنا $\frac{1}{2}mv^2 + mgy$. آهنگ اتلاف انرژی (یا انرژی مصرف شده در واحد زمان) ناشی از اثر نیروهای ناپایستار و شکسان برابر است با

$$-\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgy\right).$$

در وهلهٔ اول به‌دانشجو توصیه می‌کنیم با به‌کاربردن نتایج مثال ۷.۷، y و v^2 را به صورت توابعی از زمان بنویسد. سپس با به دست آوردن مقادیر مشتق‌های فوق، می‌تواند مسئله را حل کند.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم چگونه می‌توان این مسئله را با روش دیگری حل کرد. بنا به معادلهٔ (۲۴.۸) اگر نقطه‌های A و B خیلی نزدیک به هم باشند، می‌توانیم بنویسیم $d(E_k + E_p) = dW' = F' dx$ که در آن F' نیروی ناپایستار است. در این مثال F' ناشی از مالش شاره است و به صورت $F = -K\eta v$ می‌باشد که با معادلهٔ (۱۸.۷) نشان داده شد. بنا براین

$$-\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = F' \frac{dx}{dt} = (-K\eta v)v = -K\eta v^2.$$

برای v می‌توان نتیجهٔ مثال ۸.۷ را به‌کار برد:

$$v = \frac{F}{K\eta} [1 - e^{-(K\eta/m)t}]^2$$

که در آن $F = mg$ وزن ذره است (که برای شناوری مربوط به شاره تصحیح شده است). بنا براین

$$-\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = -\frac{m^2 g^2}{K\eta} [1 - e^{-(K\eta/m)t}]^2.$$

علامت منفی مقابل آهنگ اتلاف انرژی نشان می‌دهد که جسم انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی خود را از دست می‌دهد. در واقع این انرژی «گم» نمی‌شود، بلکه به مولکولهای شاره انتقال پیدا می‌کند به‌گونه‌ای که در عمل به دست آوردن مجدد آن امکان ندارد. بعد از گذشتن مدت زمان معینی، جملهٔ نمایی عملاً برابر صفر می‌شود، بنا براین می‌توان نوشت

$$-\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = \frac{m^2 g^2}{K\eta}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که انرژی با آهنگ ثابتی هدر می‌رود. فیزیکدانان این وضع را شرایط دائم یا پایرجا می‌خوانند.

جالب است این نتیجه را از زاویه دیگری بررسی کنیم. در مثال ۸.۷ دیدیم که پس از گذشت مدتی سرعت ثابت باقی می ماند و برابر $F/K\eta$ می شود که در آن $F = mg$ است. پس انرژی جنبشی E_k ثابت باقی می ماند و تنها انرژی پتانسیل $E_p = mgy$ تغییر می کند. بنا براین می توان نوشت

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p)_{ss} = \frac{dE_p}{dt} = \frac{d}{dt}(mgy) = mg \frac{dy}{dt}$$

شاخص ss به معنی آن است که این یک مسئله حالت دایم است. ولی dy/dt برابر سرعت حادی است که با معادله (۲۱.۷) داده شد و می توان نوشت

$$dy/dt = F/K\eta = -mg/K\eta.$$

علامت منفی بدین مناسبت وارد می شود که y به سمت بالا اندازه گیری می شود و سرعت حد به سمت پایین است. با قراردادن این مقدار در معادله قبل به دست می آید

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p)_{ss} = mg \left(\frac{-mg}{K\eta} \right) = -\frac{m^2 g^2}{K\eta}$$

و این همان نتیجه ای است که قبلاً به دست آورده بودیم. بدین طریق مشاهده می کنیم که بعد از مدت معینی، تمام انرژی پتانسیل گرانشی از دست رفته جسم، صرف آشفته گی مولکولی شاره می شود. عبارت فوق بیان دیگری از این نکته است که نیروی گرانی به سمت پایین با نیروی مخالف ناشی از شکسانی شاره خشی می شود.

۱۳.۸ قضیه ویریال برای یک ذره واحد

این قضیه برای به دست آوردن بعضی نتایج عملی بسیار مفید است (هرچند به اندازه اصل بقای اندازه حرکت زاویه ای در مورد یک نیروی مرکزی یا بقای انرژی در یک نیروی پایستار مهم نیست).

ذره ای به جرم m را که بر اثر نیروی F حرکت می کند در نظر می گیریم. کمیت اسکالر $A = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ را تعریف می کنیم که در آن $\mathbf{r}$ بردار مکان ذره و $\mathbf{v}$ سرعت آن است. با مشتق گیری از A نسبت به زمان به دست می آید

$$\frac{dA}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{v}^2$$

زیرا $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ و $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ است. در جمله اول سمت راست $m\mathbf{a}$ برابر F و جمله دوم نیز دو برابر انرژی جنبشی E_k است. در نتیجه

$$\frac{dA}{dt} = F \cdot \mathbf{r} + 2E_k.$$

اگر میانگین زمانی این معادله را پیدا کنیم داریم

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{\text{ave}} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r})_{\text{ave}} + 2(E_k)_{\text{ave}}. \quad (45.8)$$

میانگین زمانی هر کمیتی مانند $f(t)$ که به زمان بستگی دارد، در طول فاصله زمانی τ ، با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$f(t)_{\text{ave}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt.$$

با این تعریف، در حالت فوق داریم

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{\text{ave}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dA = \frac{A - A_0}{\tau}. \quad (46.8)$$

اگر زمان τ خیلی طولانی باشد و نیز A بر حسب زمان تا بینهایت افزایش پیدا نکند، کمیت $(A - A_0)/\tau$ ممکن است به قدری کوچک شود (اگر τ به قدر کافی بزرگ باشد) که بتوان آن را برابر صفر گرفت. ذره‌ای که در ناحیه محدودی حرکت می‌کند چنین وضعی دارد. به عنوان مثال، یک الکترون در اتم در ناحیه محدودی از فضا حرکت می‌کند و مقادیر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ که در تعریف A وارد می‌شوند همیشه بین مقادیر مشخصی محدود می‌مانند. همین سخن را در مورد حرکت زمین به دور خورشید نیز می‌توان گفت. بنا براین با قرار دادن $(dA/dt)_{\text{ave}} = 0$ در معادله (45.8) به دست می‌آید

$$(E_k)_{\text{ave}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r})_{\text{ave}} \quad (47.8)$$

رابطه (47.8) را قضیهٔ ویرِیال^۱ برای یک ذره و کمیت $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r})_{\text{ave}}/2$ را ویرِیال پیک ذره می‌نامند.

وقتی که نیروها مرکزی و پایستار باشند، قضیهٔ ویرِیال شکل خاصی به خود می‌گیرد. اگر $E_p(r)$ انرژی پتانسیل ذره باشد، داریم

$$\mathbf{F} = -\mathbf{u}_r \frac{dE_p}{dr} \quad \text{و} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = -r \frac{dE_p}{dr}$$

زیرا $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r} = r$ است. بنا براین معادله (47.8) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(E_k)_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \left(r \frac{dE_p}{dr} \right)_{\text{ave}}. \quad (48.8)$$

فرض کنید انرژی پتانسیل به شکل $E_p = -k/r^n$ باشد. در این صورت داریم

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{nk}{r^{n+1}} = -\frac{nE_p}{r}$$

و معادله (۴۸.۸) به این شکل نوشته می شود:

$$(E_k)_{ave} = -\frac{1}{4} n(E_p)_{ave}. \quad (۴۹.۸)$$

با این نتیجه، رابطه ای بین میانگین زمانی انرژی جنبشی و پتانسیل ذره به دست می آید.

۱۴.۸ نقدی بر مفهوم انرژی

در این فصل دیدیم وقتی که نیرو به صورت تابعی از مکان معلوم باشد چگونه می توان از مفهوم انرژی در حل بعض مسائل دینامیک ذره به طور مؤثر استفاده کرد. و این یکی از دلایل اصلی وارد کردن مفهوم انرژی در فیزیک است.

تجربه مستقیم ما حاکی از آن است که اجسام اطراف ما در حرکت اند. ما این حرکات را به برهم کنشهای بین اجسام نسبت می دهیم و آنها را به یاری مفاهیم انرژی و نیرو تشریح می کنیم. این مفاهیم تنها یک هدف را تعقیب می کنند: فراهم آوردن روشهای مفید برای تجزیه و تحلیل و پیشگویی حرکتهایی که مشاهده می کنیم. مهمترین فایده مفهوم انرژی پتانسیل، همانند نیرو، آن است که به ما امکان می دهد به هر برهم کنش خاصی که در طبیعت مشاهده می شود انرژی پتانسیل معینی را نسبت دهیم. این نتیجه شگفت آور نیست، زیرا نیروی F مطابق رابطه (۲۴.۸) با انرژی پتانسیل مربوط است: در واقع همین رابطه بین انرژی پتانسیل و برهم کنش است که به ایده انرژی پتانسیل معنای فیزیکی می بخشد.

وقتی که انرژی پتانسیل به صورت تابعی از مکان معلوم باشد، می توان حرکت را به طور کیفی، آنچنانکه در بخش ۱۱.۸ گفته شد، و به طور کمی، آنچنانکه در بخشهای ۹.۸ و ۱۰.۸ شرح داده شد، بیان کرد. در فصلهای بعد این امر را مورد بحث قرار خواهیم داد که برهم کنش بین دو جسم را می توان همچون تبادل انرژی یا تبادل اندازه حرکت بین این دو در نظر گرفت و توضیح داد. هر کدام از این بیانها نمایش تصویری مفید و مناسبی از یک برهم کنش به دست می دهد. دانشجو باید به یاد بسپارد که در بقیه کتاب فرآیندهای مشاهده شده در طبیعت را کم و بیش در همه جا به یاری مفاهیم اندازه حرکت و انرژی تشریح و توصیف خواهیم کرد.

فهرست منابع

1. «Energy», S. Schurr, *Sci. Am.*, September 1963, page 110.
2. «Newton's Law of Motion and the 17th Century Laws of Impact», A. Arons and A. Bork, *Am. J. Phys.* 32, 313 (1964).
3. *Physical Mechanics* (third edition), by R. Lindsay. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1963, Chapter 4.
4. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston Reading, Mass.: Addison - Wesley, 1961, Chapters 20 and 21.

5. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw - Hill, 1964, Chapters 7 and 17; Sections 12.6 through 12.8.
6. *A Source Book of Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 59 (Young).
7. *Foundations of Modern Physical Science*, by G. Holton and D. H.D. Roller. Reading, Mass.: Addison - Wesley, 1958, Chapter 18.
8. «Resource Letter EEC-1 on the Evolution of Energy Concepts from Galileo to Helmholtz», T. Brown; *Am. J. Phys.* 33, 759 (1965).
9. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمه اعظم نیرومند داد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، بخشهای ۱.۲، ۵.۲، ۷.۳ و ۱۲.۳.

مسئله‌ها

۱۰۸. نیروی F به مدت ۲۰ s بر جسمی به جرم ۵۰۰ kg وارد می‌شود. جسم که ابتدا بی‌حرکت است بر اثر این نیرو به سرعت نهایی ۵ ms^{-1} می‌رسد. اگر نیرو در آغاز برابر صفر باشد و مدت ۱۵ s به طور خطی افزایش یابد و سپس به طور خطی کم شده و پس از ۵ s به صفر برسد، (الف) تکان وارد از طرف نیرو بر روی جسم را پیدا کنید، (ب) نیروی بیشینه‌ای را که بر جسم وارد می‌شود تعیین کنید و (ج) نمودار F را بر حسب t رسم کنید و مساحت زیر منحنی را حساب کنید. آیا این مساحت با نتیجه (الف) سازگار است؟ فرض کنید F تنها نیروی وارد بر جسم است.

۲۰۸. کار نیروی ثابت ۱۲ N را هنگامی که نقطه اثر آن ۷ m جابجا می‌شود در حالتی که زاویه بین راستای نیرو و جابجایی (الف) صفر درجه، (ب) ۶۰° ، (ج) ۹۰° ، (د) ۱۴۵° و (ه) ۱۷۰° باشد، حساب کنید.

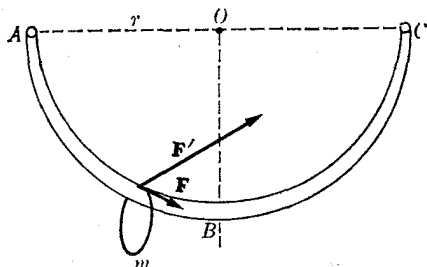
۳۰۸. کار انجام شده توسط شخصی را که یک کیسه ۶۵ kg آرد را با نیروی ۲۵۰ نیوتون ۱۰ m روی زمین می‌کشد و بعد در کالیونی که ۷۵ cm از زمین ارتفاع دارد قرار می‌دهد، حساب کنید. اگر تمام این اعمال در ۲ دقیقه انجام گرفته باشد توان میانگین به کار رفته چقدر است؟

۴۰۸. یک kgm کاری است که یک نیروی ۱ کیلوگرمی انجام می‌دهد، هنگامی که جسمی را در راستای خود به اندازه یک متر جابجا می‌کند. تحقیق کنید که $۱ \text{ kgm} = ۹۸۱ \text{ J}$ و یک اسب بخار (hp) برابر است با ۷۵ kms^{-1} است. هم ارزی آن را با W پیدا کنید.

۵۰۸. جسمی به جرم ۴ kg از صفحه‌ای که با افق زاویه ۲۰° می‌سازد بالا می‌رود. نیروهای زیر بر جسم اثر می‌کنند: یک نیروی افقی برابر ۸۰ N ، یک نیروی موازی صفحه برابر ۱۰۰ N که به حرکت کمک می‌کند و نیروی مالش ثابت ۱۰ N که با حرکت مخالفت می‌کند. جسم ۲۰ m روی سطح می‌لغزد. کار کل دستگاه نیروهای وارد بر جسم و نیز کار هر یک از نیروها را به طور جداگانه حساب کنید.

۶۰۸. حلقه m روی کمان فلزی ABC (شکل ۲۴.۸)، که کماسی از دایره‌ای

به شعاع 4 m است، بدون مالش می لغزد. دو نیروی F و F' بترتیب به بزرگیهای 40 N و 150 N روی جسم اثر می کنند. نیروی F همیشه مماس برکمان است. نیروی F' در راستای ثابتی که با سطح افق زاویه 30° می سازد اثر می کند. هنگامی که جسم از A به B و از A به C جابجا می شود، کار کل دستگاه نیروها را حساب کنید.



شکل ۲۴.۸

۷۰.۸. جسمی به جرم 10 kg ره از ارتفاع 3 m روی توده ای از شن می افتد. اگر جسم پس از 3 cm فرو رفتن در شن متوقف شود، نیروی ثابتی که توده شن روی جسم وارد کرده چقدر است؟

۸۰.۸. جسمی به جرم 1000 kg از ارتفاع 10 m روی یک تیر آهنی قائم که یک سر آن در زمین فرو رفته است می افتد. تیر به اندازه 1 cm در زمین فرو می رود. نیروی مقاومت میانگینی را که از طرف زمین به تیر آهن وارد می شود حساب کنید. (فرض کنید تمام انرژی جنبشی جسم تبدیل به کار شده تا تیر در زمین فرو رود.)

۹۰.۸. شخصی با سرعت 6 kmhr^{-1} از سطح شیب داری که زاویه 10° با سطح افق می سازد بالا می رود. توان به کار گرفته شده را حساب کنید.

۱۰۰.۸. آسانسوری با ۱۰ نفر مسافر، 80 m را در ۳ دقیقه بالا می رود. جرم هر مسافر 80 kg و جرم آسانسور 1000 kg است. توان موتور بر حسب اسب بخار (hp) چقدر است؟

۱۱۰.۸. اتومبیلی به جرم 1600 kg با سرعت ثابت 45 kmhr^{-1} از یک سربالایی به شیب 3° بالا می رود. توان اعمال شده از طرف موتور چقدر است؟ کار انجام یافته در 10 s چقدر است؟ از نیروهای مالش صرف نظر کنید.

۱۲۰.۸. اتومبیلی به وزن 10000 N در یک جاده افقی حرکت می کند. هنگامی که موتور حداکثر توان خود 50 hp را به کار می برد اتومبیل به سرعت بیشینه 32 ms^{-1} می رسد. سرعت بیشینه اتومبیل را هنگامی که از یک تپه به شیب 5% بالا می رود حساب کنید. مقاومت هوا را ثابت فرض کنید.

۱۳۰.۸. مسئله پیش را در حالتی که اتومبیل از تپه پایین می آید حل کنید.

۱۴۰.۸. یک نیروی ثابت 6 dyn به مدت 12 s روی جسمی به جرم 10 g اثر می کند.

جسم دارای سرعت اولیه 60 cm s^{-1} در راستای نیرو است. (الف) کار انجام یافته توسط نیرو، (ب) انرژی جنبشی نهایی، (ج) توان مصرفی، (د) افزایش انرژی جنبشی، را حساب کنید.

۱۵۰۸. مسئله پیش را درحالتی که نیرو بر سرعت اولیه عمود است حل کنید.

۱۶۰۸. (الف) موتور اتومبیلی به جرم 1500 kg باید چه نیروی ثابتی اعمال کند تا در 8 s سرعت اتومبیل را از 4 km hr^{-1} به 40 km hr^{-1} برساند؟ (ب) تغییر اندازه حرکت و انرژی جنبشی را تعیین کنید. (ج) تکان دریافت شده و کار انجام یافته به وسیله نیرو را معین کنید. (د) توان میانگین موتور را حساب کنید.

۱۷۰۸. یک گوی فولادی کوچک به جرم 1 kg که به انتهای سیمی به طول 1 m متصل است روی دایره قائمی به مرکز انتهای سیم با سرعت زاویه‌ای ثابت 120 rad s^{-1} می‌چرخد. انرژی جنبشی آن را حساب کنید. اگر به جای سرعت زاویه‌ای، انرژی کل گوی ثابت بماند، تغییر انرژی جنبشی و سرعت زاویه‌ای بین بالا و پایین دایره چقدر است؟ فرض کنید سرعت زاویه‌ای داده شده مربوط به بالای دایره است.

۱۸۰۸. جسمی به جرم m با سرعت v نسبت به ناظر O و با سرعت v' نسبت به O' حرکت می‌کند. سرعت نسبی O و O' برابر v است. رابطه بین انرژی جنبشی E_k و E'_k جسم را که به وسیله O و O' اندازه‌گیری می‌شود پیدا کنید.

۱۹۰۸. انرژی جنبشی الکترونی ($m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$) را که با سرعت 10^6 ms^{-1} حرکت می‌کند برحسب eV پیدا کنید. همین کار را در مورد پروتون (به جرم $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$) انجام دهید.

۲۰۰۸. سرعت الکترونی را که با انرژی 10^4 eV در لوله تلویزیون به صفحه برخورد می‌کند پیدا کنید.

۲۱۰۸. پروتونی با انرژی 10^5 eV از یک شتابدهنده ذرات خارج می‌شود. سرعت پروتون را پیدا کنید.

۲۲۰۸. اگر E_k انرژی جنبشی برحسب eV و v سرعت برحسب ms^{-1} باشد، ثابت کنید که رابطه بین این دو در مورد یک الکترون عبارت است از $E_k = 2.843 \times 10^{-12} v^2$ و در مورد یک پروتون عبارت است از $E_k = 5.0228 \times 10^{-9} v^2$.

۲۳۰۸. نیروی وارد بر جسمی به جرم 10 kg برابر است با $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x(10 + 2t)$ ، که در آن t برحسب ثانیه و F برحسب نیوتون است. (الف) تغییر اندازه حرکت و سرعت جسم را در انتهای 4 s ، همچنین تکان داده شده به جسم را پیدا کنید. (ب) این نیرو چه مدتی باید روی جسم اثر کند تا به آن تکانی برابر با 200 N s بدهد؟ به سؤالهای بالا درحالاتی که جسم در آغاز بی‌حرکت است و یا دارای سرعت اولیه 6 ms^{-1} باشد پاسخ دهید.

۲۴۰۸. جرم 10 kg بر اثر نیروی $\mathbf{F} = [\mathbf{u}_x(5t) + \mathbf{u}_y(3t^2 - 1)] \text{ N}$ حرکت می‌کند.

در لحظه $t = 0$ جسم در حال سکون و در مبدأ قرار دارد. (الف) اندازه حرکت و انرژی جنبشی جسم را در لحظه $t = 10\text{ s}$ پیدا کنید. (ب) تکان و کار انجام یافته به وسیله جسم را از لحظه $t = 0$ تا $t = 10\text{ s}$ پیدا کنید. آنها را با نتایج (الف) مقایسه کنید.

۲۵۰۸. جرم 20 kg بر اثر نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x(100t)\text{ N}$ حرکت می‌کند. t بر حسب ثانیه است. اگر به ازای $t = 2$ ، داشته باشیم $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x(3)\text{ ms}^{-1}$ ، (الف) تکان داده شده به جسم را در فاصله زمانی $10\text{ s} > t > 2\text{ s}$ ، و (ب) اندازه حرکت جسم را در لحظه $t = 10\text{ s}$ پیدا کنید. (ج) نشان دهید که در فاصله زمانی داده شده، تکان برابر است با تغییر اندازه حرکت جسم. (د) کار انجام شده روی جسم، و (ه) انرژی جنبشی آن را در لحظه $t = 10\text{ s}$ پیدا کنید. (و) نشان دهید که تغییر انرژی جنبشی با کار انجام شده برابر است.

۲۶۰۸. مسئله پیش را هنگامی که در $t = 2\text{ s}$ ، $\mathbf{v} = \mathbf{u}_y(3)\text{ ms}^{-1}$ باشد مجدداً حل کنید.

۲۷۰۸. به ذره‌ای نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{u}_x(y^2 - x^2) + \mathbf{u}_y(3xy)$ اثر می‌کند. کار انجام شده به وسیله نیرو را هنگامی که ذره از نقطه $(0, 0)$ تا نقطه $(2, 4)$ روی مسیرهای زیر جابجا می‌شود پیدا کنید:

(الف) در طول محور X ها از نقطه $(0, 0)$ به نقطه $(2, 0)$ ، بعد موازی محور Y ها تا نقطه $(2, 4)$ ، (ب) در طول محور Y ها از نقطه $(0, 0)$ به نقطه $(0, 4)$ و بعد موازی محور X ها تا نقطه $(2, 4)$ ، (ج) در راستای خطی که از دو نقطه می‌گذرد، (د) روی سهمی $y = x^2$. آیا این نیرو پایستار است؟

۲۸۰۸. مسئله پیش را در حالتی که نیرو برابر $\mathbf{F} = [\mathbf{u}_x(2xy) + \mathbf{u}_y(x^2)]$ باشد از نو حل کنید.

۲۹۰۸. فرض کنید $\mathbf{F} = [\mathbf{u}_x(7) - \mathbf{u}_y(6)]\text{ N}$ است. (الف) کار انجام یافته را هنگامی که ذره از مبدأ تا نقطه $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x(-3) + \mathbf{u}_y(4) + \mathbf{u}_z(16)\text{ m}$ جابجا می‌شود پیدا کنید. آیا لازم است مسیری را که ذره می‌پیماید مشخص کرد؟ (ب) اگر جابجایی از یک نقطه به نقطه دیگر 8 m طول بکشد، توان میانگین را حساب کنید و آن را بر حسب وات و اسب بخار بیان کنید. (ج) اگر جرم ذره 1 kg باشد، تغییر انرژی جنبشی را حساب کنید.

۳۰۰۸. نیروی مسئله پیش پایستار است، زیرا ثابت است. اختلاف انرژی پتانسیل را بین دو نقطه حساب کنید. انرژی پتانسیل را در نقطه $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x(7) + \mathbf{u}_y(16) + \mathbf{u}_z(-42)\text{ m}$ تعیین کنید.

۳۱۰۸. ذره‌ای بر اثر یک نیروی جاذبه عکس مجذوری، $F = -k/r^2$ ، حرکت می‌کند. و مسیر آن دایره‌ای به شعاع r است. نشان دهید که انرژی کل برابر $E = -k/2r$ ، سرعت برابر $v = (k/mr)^{1/2}$ و اندازه حرکت زاویه‌ای برابر $L = (mkr)^{1/2}$ است.

۳۲۰۸. یک صفحه شیب‌دار به طول 13 m دارای قاعده‌ای به طول 12 m است. جسمی به جرم 80 kg با سرعت اولیه 100 cm s^{-1} از بالای صفحه به سمت پایین می‌لغزد.

سرعت و انرژی جنبشی آن هنگام رسیدن به پایین چقدر است؟

۳۳.۸. انرژی جنبشی و پتانسیل جسمی را که از حالت سکون از ارتفاع h رها می‌شود بر حسب (الف) زمان، و (ب) ارتفاع، رسم کنید. تحقیق کنید که در هر دو حالت از مجموع دو منحنی یک مقدار ثابت به دست می‌آید.

۳۴.۸. جسمی به جرم 20 kg در راستای قایم با سرعت اولیه 50 ms^{-1} به سمت بالا پرتاب می‌شود. (الف) مقادیر اولیه E_k ، E_p و E را، (ب) E_k و E_p را در انتهای 3 s ، (ج) E_k و E_p را در ارتفاع 100 m ، (د) ارتفاع جسم را هنگامی که E_p به 80% مقدار اولیه خود می‌رسد، حساب کنید.

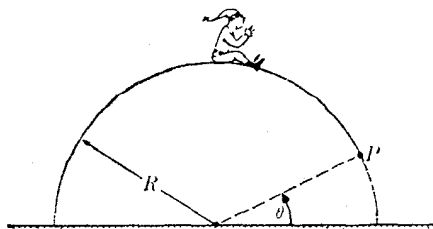
۳۵.۸. گلوله‌ای به جرم 4 kg از بالای تپه‌ای به ارتفاع 120 m با سرعت 6 ms^{-1} به طور افقی پرتاب می‌شود. حساب کنید (الف) انرژی جنبشی اولیه گلوله را، (ب) انرژی پتانسیل اولیه آن را، (ج) انرژی جنبشی آن را هنگامی که به زمین برخورد می‌کند، و (د) سرعتی را که گلوله با آن سرعت به زمین می‌رسد.

۳۶.۸. هواپیمایی که به طور افقی با سرعت 270 km hr^{-1} پرواز می‌کند بمبی به جرم 10 kg را رها می‌کند. هواپیما در ارتفاع 100 m قرار دارد. حساب کنید (الف) انرژی جنبشی اولیه بمب را، (ب) انرژی پتانسیل اولیه آن را، (ج) انرژی کل آن را، (د) سرعت بمب را هنگامی که به زمین می‌رسد، و (ه) انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بمب را 10 s پس از انداختن آن.

۳۷.۸. تنها با استفاده از اصل بقای انرژی، سرعت بمب را در مسئله پیش هنگامی که در 50 متری زمین قرار دارد و ارتفاع آن را هنگامی که انرژی جنبشی آن 30% بیشتر از انرژی جنبشی اولیه آن است، حساب کنید.

۳۸.۸. مسئله ۳۴.۸ را هنگامی که جسم در راستایی که با افق زاویه 70° می‌سازد پرتاب می‌شود از نو حل کنید.

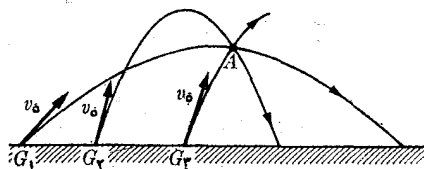
۳۹.۸. بچه‌ای به جرم m در بالای کوه یخی به شکل نیمکره نشسته است (شکل ۲۵.۸). اگر بچه از روی یخ سر بخورد (حرکت بدون مالش فرض می‌شود) در چه نقطه‌ای مانند P بچه کوه یخی را ترک می‌کند؟



شکل ۲۵.۸

۴۰.۸. سه تفنگ گلوله‌هایی با سرعت اولیه یکسان شلیک می‌کنند (شکل ۲۶.۸)، به-

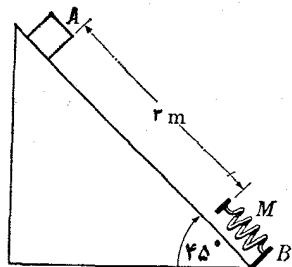
گونه‌ای که هر سه گلوله از یک نقطه A می‌گذرند (ولی لزوماً نه در یک زمان). شکل ۲۶.۸ را مجدداً رسم کنید و سرعتها را روی آن مشخص کنید. محاسبات را بر پایهٔ ملاحظات انرژی قرار دهید و رابطهٔ بین بزرگی سرعت گلوله‌ها را در نقطهٔ A تعیین کنید. آیا از پاسخهایی که به دست می‌آیند، می‌توان نتیجه گرفت که تنها با استفاده از اصل بقای انرژی می‌توان راستای حرکتها را تعیین کرد؟ چرا؟



شکل ۲۶.۸

۴۱.۸. جسمی به جرم 5 kg از ارتفاع 1 m روی فنر کوچکی که در راستای قائم قرار دارد و یک سر آن به زمین وصل شده است می‌افتد. ثابت فنر $k = 2000\text{ Nm}^{-1}$ است. حداکثر تغییر شکل فنر را پیدا کنید.

۴۲.۸. جسم A در شکل ۲۷.۸ دارای 5 kg جرم است. جسم از حالت سکون به راه می‌افتد و روی صفحهٔ بدون مالشی که با افق زاویهٔ 45° می‌سازد، 3 m می‌لغزد، تا به فنر M که سر دیگر آن در نقطهٔ B به صفحه متصل شده است، برخورد می‌کند. ثابت فنر 4000 Nm^{-1} است. حداکثر تغییر شکل فنر را پیدا کنید.



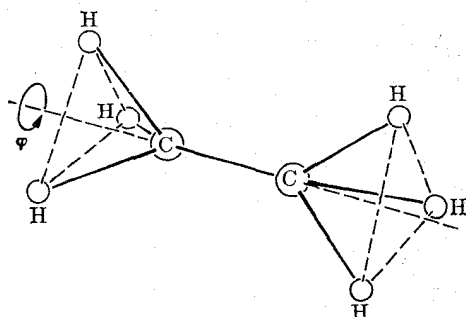
شکل ۲۷.۸

۴۳.۸. جسمی به جرم 5 kg از فنری با ثابت کشسانی 10^3 Nm^{-1} ، آویزان است. اگر بگذارند فنر بکندی کشیده شود، جسم چه مقدار پایین می‌رود؟ جسم طوری رها می‌شود که بتواند آزادانه سقوط کند. (الف) شتاب اولیه، و (ب) شتاب و سرعت جسم را وقتی که 10 m ، 2.45 m و 3 m سقوط کرده است پیدا کنید. در این حالت جسم تا کجا می‌رود؟ در مواردی که ممکن است، از اصل بقای انرژی استفاده کنید.

۴۴.۸. در مولکول NH_3 ، اتم ازت در رأس یک چهاروجهی و سه H در قاعده قرار دارند (به شکل ۳.۲ مراجعه کنید). روشن است که اتم N دارای دو وضع ترازمندی پایدار می‌باشد. یک منحنی نمایشی از انرژی پتانسیل اتم N را به صورت تابعی از فاصلهٔ آن از قاعدهٔ

چهاروجهی رسم کنید و درمورد حرکت‌های ممکن آن برحسب انرژی کل بحث کنید.

۴۵۰۸. درمولکول اتان (C_2H_6)، دو گروه CH_3 چهاروجهی‌هایی هستند که C در رأس آنها قرار دارد (شکل ۲۸۰۸). دوگروه می‌توانند دور خطی که دو اتم کربن را به هم مربوط می‌کند نسبت به یکدیگر بچرخند. تقارن ایجاد می‌کند که دو دسته وضع ترازمندی برای حرکت وجود داشته باشد، که وضع‌های ترازمندی پایدار و وضع‌های ترازمندی ناپایدار را تشکیل می‌دهند. این وضع‌ها را تعیین کنید و نمودار انرژی پتانسیل را به صورت تابعی از زاویه φ بین π و 0 رسم کنید. درمورد حرکت‌های چرخشی ممکن به ازای مقادیر مختلف انرژی کل بحث کنید.



شکل ۲۸۰۸

۴۶۰۸. نموداری، مشابه با شکل ۱۹۰۸، از $E_{p,eff}$ برای $E_p(r) = -1/r$ و (الف) $E_{p,c} = 1/2r^2$ ، (ب) $E_{p,c} = 2/r^2$ رسم کنید. انرژی‌ها برحسب J و r برحسب m داده شده‌اند. در هر حالتی جای کمینه $E_{p,eff}$ را تعیین کنید. انرژی لازم برای رفتن از کمینه منحنی اول به کمینه منحنی دوم را اندازه‌گیری کنید.

۴۷۰۸. سورتمه‌ای به جرم 20 kg روی دامنه تپه‌ای از ارتفاع ۲۰ متری لیز می‌خورد. سورتمه از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و با سرعت 16 ms^{-1} به پایین سرازیری می‌رسد. اتلاف انرژی ناشی از مالش را حساب کنید.

۴۸۰۸. توپی به جرم 5 kg با سرعت اولیه 20 ms^{-1} در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود و تا ارتفاع ۱۵ m بالا می‌رود. اتلاف انرژی ناشی از مقاومت هوا را حساب کنید.

۴۹۰۸. قطاری از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و در یک سرازیری به شیب ۱٪، مسافتی برابر ۳۰۰ m را می‌پیماید. سپس با خیزی که کسب می‌کند روی یک سربالایی به شیب ۲٪، مسافتی برابر با ۶۰ m را بالا می‌رود و می‌ایستد. نیروی مقاومت در مقابل حرکت قطار را حساب کنید (اگر α و β شیب‌های سرازیری و سربالایی باشند، $\tan \alpha = 0.01$ و $\tan \alpha = 0.02$ است).

۵۰۰۸. جسمی به جرم m با لغزش از روی یک صفحه شیب‌دار به زاویه α پایین می‌آید.

ضریب مالش برابر f است. آهنگ اتلاف را برای مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی پیدا کنید.

۵۱.۸. با قرار دادن مقادیر مناسب برای v و y به صورت توابعی از t (که در مثال ۸.۷ به دست آمدند) در رابطه $d/dt(E_k + E_p) = d/dt[mv^2/2 + mgy]$ ، مثال ۱۲.۸ را حل کنید. نشان دهید نتیجه‌ای که به دست می‌آید با آنچه که در مثال ۱۲.۸ بحث کردیم یکی است.

۵۲.۸. جسمی به جرم 8 kg روی یک صفحه افقی قرار دارد، به گونه‌ای که با یک انتهای یک فنر افقی با ثابت کشسانی 10^3 mN^{-1} در تماس است. سر دیگر فنر، به دیواره قائمی متصل است. هنگامی که جسم به سمت دیواره فشار داده شود، فنر 15 cm فشرده می‌شود. وقتی جسم رها می‌شود بر اثر کشسانی فنر به طور افقی پرتاب می‌شود. نیروی مالش بین جسم و صفحه ثابت و برابر 5 N است. حساب کنید (الف) سرعت جسم را هنگامی که فنر طول اولیه خود را باز می‌یابد، و (ب) مسافتی را که جسم قبل از ایستادن می‌پیماید، به فرض اینکه از لحظه‌ای که فنر طول طبیعی خود را باز می‌یابد دیگر اثری روی جسم ندارد. در تغییرات انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل دستگاه جسم - فنر در طول آزمایش بحث کنید.

۵۳.۸. برای به دست آوردن انرژی کل جسمی که تحت اثر نیروی جاذبه عکس مجذوری $F = -k/r^2$ قرار دارد، قضیه ویریال را به کار ببرید. این پاسخ را با نتایج مسئله ۳۱.۸ مقایسه کنید.

۵۴.۸. ذره‌ای بر اثر یک میدان نیرو که با یکی از توابع انرژی پتانسیل (الف) $E_p(x) = ax^n$ ، (ب) $E_p = by^n$ ، (ج) $E_p = cxy$ ، (د) $E_p = cxyz$ و (ه) $E_p = k(x^2 + y^2 + z^2)$ بیان می‌شود، حرکت می‌کند. در هر مورد میدان نیرو را به صورت برداری نمایش دهید.

۵۵.۸. ذره‌ای تحت اثر یک نیروی مشتق از انرژی پتانسیل $E_p(x) = 3x^2 - x^3$ قرار دارد. (الف) نمودار $E_p(x)$ را رسم کنید. (ب) راستای نیرو را در هر ناحیه مناسب از متغیر x تعیین کنید. (ج) در حرکتهای ممکن ذره به ازای مقادیر مختلف انرژی کل بحث کنید. وضعهای ترازمندی (پایدار و ناپایدار) ذره را پیدا کنید.

۵۶.۸. برهم‌کنش بین دو هسته را، با درجه معینی از درستی، می‌توان با پتانسیل یوکاوا، $E_p(r) = -V_0(r_0/r)e^{-r/r_0}$ ، که در آن V_0 حدود 50 MeV و $r_0 = 1.5 \times 10^{-15}\text{ m}$ است، نشان داد. نیروی بین دو هسته را به صورت تابعی از فاصله آنها پیدا کنید. بزرگی نیرو را به ازای $r = r_0$ تعیین کنید. مقدار r را هنگامی که نیرو برابر ۱٪ نیرو در $r = r_0$ است برآورد کنید.

۵۷.۸. به جای برهم‌کنش یوکاوا، برهم‌کنشی به شکل $E_p(r) = -V_0(r_0/r)$ را در نظر بگیرید. در مورد اثر سازه e^{-r/r_0} روی برد نیرو چه نتیجه می‌گیرید؟

۵۸.۸. نشان دهید که اگر نیرویی پایستار باشد، داریم $\partial F_x / \partial y = \partial F_y / \partial x$ می توان ثابت کرد عکس این موضوع نیز درست است. و این آزمون مهمی است برای تعیین اینکه یک نیرو پایستار است یا نه. بر این پایه، تحقیق کنید که کدام یک از نیروهای زیر پایستار می باشند:

(الف) $\mathbf{u}_x x^n$ (ب) $\mathbf{u}_x y^n$

(ج) $\mathbf{u}_x(x^2 - y^2) + \mathbf{u}_y(3xy)$ (د) $\mathbf{u}_x(2xy) + \mathbf{u}_y(x^2)$

(ه) $\mathbf{u}_x yz + \mathbf{u}_y zx + \mathbf{u}_z xy$ (و) $\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z$

۵۹.۸. ثابت کنید اگر نیروی وارد بر جسمی برابر $\mathbf{F} = k\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ باشد، که در آن $\mathbf{u}$ یک برداریک اختیاری است، انرژی جنبشی ثابت باقی می ماند. کار انجام یافته به وسیله نیرو چقدر است؟ ماهیت حرکتی را که نتیجه می شود تشریح کنید.

دینامیک یک دستگاه ذرات

مقدمه	۱.۹
حرکت مرکز جرم یک دستگاه ذرات	۲.۹
جرم کاهیده	۳.۹
اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات	۴.۹
انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات	۵.۹
بقای انرژی یک دستگاه ذرات	۶.۹
برخورد	۷.۹
دستگاههای چند ذره‌ای: دما	۸.۹
دستگاههای چند ذره‌ای: کار	۹.۹
دستگاههای چند ذره‌ای: گرما	۱۰.۹
فرمول بندی مجدد اصل بقای انرژی برای دستگاههای چند ذره‌ای	۱۱.۹
قضیه ویریال برای چند ذره	۱۲.۹
معادله حالت یک گاز	۱۳.۹
حرکت شاره	۱۴.۹

در دو فصل اخیر، نظریه دینامیک یک ذره را مطالعه کردیم. در این نظریه، ما بقیه جهان را نادیده گرفتیم و آن را با یک نیرو یا یک انرژی پتانسیل، که تنها به مختصات ذره بستگی دارد، نمایش دادیم. اکنون مسئله مهمتر و واقعی تر چند ذره را در نظر می گیریم. درواقع ما گفتگو در باره دینامیک یک دستگاه ذرات را از هنگام بیان اصل بقای اندازه حرکت در فصل ۷، شروع کرده ایم. در قسمت اول این فصل، سه نتیجه اساسی مورد بحث قرار خواهند گرفت: حرکت مرکز جرم، اصل بقای اندازه حرکت زاویه ای و اصل بقای انرژی. در نیمه دوم این فصل، دستگاههایی مشکل از ذرات بسیار زیاد مطالعه خواهند شد که نیاز به ملاحظاتی با ماهیت آماری دارند. در سراسر این فصل جرم ذرات ثابت فرض می شود.

I رابطه های اساسی

۲.۹ حرکت مرکز جرم یک دستگاه ذرات

دستگاهی مشکل از ذراتی به جرمهای $m_1, m_2, \dots$ و سرعتهای $v_1, v_2, \dots$ ، نسبت به یک چارچوب مرجع لخت را در نظر می گیریم. سرعت مرکز جرم با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M}. \quad (1.9)$$

اگر جرم ذرات به سرعت بستگی نداشته باشد، $\mathbf{v}_{CM}$ سرعت نقطه ای است که در بخش ۸.۴ به عنوان مرکز جرم تعریف کردیم و با بردار مکان زیر مشخص می شود:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}. \quad (2.9)$$

این امر را می توان با مشتق گیری از معادله (۲.۹) نسبت به زمان نشان داد:

$$\frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M} = \mathbf{v}_{CM}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ است معادله (۱.۹) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad \text{یا} \quad \mathbf{P} = M \mathbf{v}_{CM} \quad (3.9)$$

که در آن $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ اندازه حرکت کل دستگاه است. این رابطه نشان می دهد که اندازه حرکت کل دستگاه، برابر است با اندازه حرکت نقطه ای با جرم تمام دستگاه که در مرکز جرم آن متمرکز شده است و با سرعت $\mathbf{v}_{CM}$ جابجا می شود. بدین دلیل گاهی $\mathbf{v}_{CM}$ سرعت دستگاه نیز نامیده می شود. همچنین هنگام گفتگو از سرعت جسم متحرکی که از ذرات زیادی تشکیل شده است، مانند هواپیما، اتومبیل، زمین و ماه، یا حتی مولکول یا هسته، در واقع

به سرعت مرکز جرم آن، v_{CM} اشاره می‌شود.

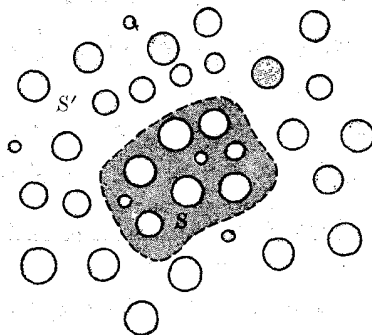
اگر دستگاه ذرات منزوی باشد، بنا به اصل بقای اندازه حرکت، می‌دانیم که P ثابت است، بنا براین

مرکز جرم یک دستگاه ذرات منزوی در هر دستگاه لخت با سرعت ثابتی حرکت می‌کند (به فرض اینکه جرم ذرات مستقل از سرعت باشد).

بویژه، می‌توان یک چارچوب مرجع لخت به مرکز جرم یک دستگاه ذرات منزوی متصل کرد، و مرکز جرم نسبت به این چارچوب در حال سکون خواهد بود ($v_{CM} = 0$). این چارچوب را چارچوب مرجع مرکز جرم یا چارچوب مرجع C می‌نامیم. بنا به معادله (۳.۹) اندازه حرکت کل یک دستگاه ذرات نسبت به چارچوب مرجع C همیشه برابر صفر است:

$$P_{CM} = \sum_i p_i = 0 \quad (\text{در چارچوب مرجع CM}) \quad (4.9)$$

به همین دلیل چارچوب C را گاهی چارچوب اندازه حرکت صفر نیز می‌نامند. چارچوب C بسیار مهم است، زیرا خیلی از آزمایشهایی را که در آزمایشگاه یا چارچوب مرجع L صورت می‌گیرد می‌توان در چارچوب مرجع C با سانی تجزیه و تحلیل کرد.



شکل ۱.۹. برهم کنش دستگاه S با اطراف خود، S' .

اکنون وضعی را در نظر می‌گیریم که دستگاه S منزوی نیست؛ به گفته دیگر، حالتی که ذرات تشکیل دهنده S با سایر ذرات موجود در عالم که به دستگاه S تعلق ندارند برهم کنش می‌کنند. فرض کنیم که دستگاه S از ذرات واقع در داخل خط نقطه چین شکل ۱.۹ تشکیل شده است و ذرات دستگاه S با تمام ذراتی که در خارج خط نقطه چین قرار دارند و دستگاه S' را تشکیل می‌دهند برهم کنش می‌کنند. همچنین می‌توان فرض کرد S و S' روی هم رفته یک دستگاه منزوی را تشکیل می‌دهند. به عنوان مثالهای مشخص، می‌توانیم S را کهکشان

1. the center-of-mass frame of reference (C -frame of reference)
2. zero-momentum frame

خودمان و S' را بقیه جهان در نظر بگیریم. یا ممکن است S منظومه شمسی و S' بقیه جهان باشد. حتی می توان یک مولکول را دستگاه منزوی در نظر گرفت و اتمهای تشکیل دهنده مولکول را در دو دستگاه S و S' گروه بندی کرد.

ذرات متعلق به S را با شاخص پایین i و ذرات متعلق به S' را با شاخص پایین j مشخص می کنیم. اصل بقای اندازه حرکت برای دستگاه منزوی کامل $S + S'$ ، عبارت است از

$$\mathbf{P} = \underbrace{\sum_i \mathbf{p}_i}_{\text{دستگاه } S} + \underbrace{\sum_j \mathbf{p}_j}_{\text{دستگاه } S'} = \text{const}$$

یا

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_{S'} = \text{const}. \quad (5.9)$$

پس هرگونه تغییر در اندازه حرکت S باید با تغییری برابر و با علامت مخالف در S' همراه باشد. به گفته دیگر،

$$\Delta \mathbf{P}_S = -\Delta \mathbf{P}_{S'}$$

یا

$$\sum_i \Delta \mathbf{p}_i = -\sum_j \Delta \mathbf{p}_j. \quad (6.9)$$

بنابراین برهم کنش بین S و S' را می توان به عنوان تبادل اندازه حرکت توصیف کرد. به دانشجوی توصیه می کنیم معادله های (5.9) و (6.9) را با معادله های (5.7) و (8.7) در مورد دو ذره با هم مقایسه و شباهتها را یادداشت کند.

با مشتق گیری از معادله (5.9) نسبت به زمان، داریم

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}_{S'}}{dt}. \quad (7.9)$$

آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت دستگاه S را نیروی خارجی^۱ وارد بر S می نامیم؛ یا

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dt}(\sum_i \mathbf{p}_i) = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (8.9)$$

نام گذاری نیروی خارجی بدین دلیل است که تغییر اندازه حرکت S نسبت به زمان، از برهم کنش آن با S' ناشی می شود. بنا به اصل بقای اندازه حرکت، نیروهای داخلی^۲ موجود در S که به برهم کنشهای اجزاء خود آن مربوط می شوند، در اندازه حرکت کل تغییری به وجود نمی آورند. پس، اگر $\mathbf{F}'_{\text{ext}}$ نیروی خارجی وارد بر دستگاه S' باشد، معادله (7.9) ایجاب می کند که $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}'_{\text{ext}}$ باشد. این رابطه قانون کنش و واکنش را برای S و S' تشکیل می دهد.

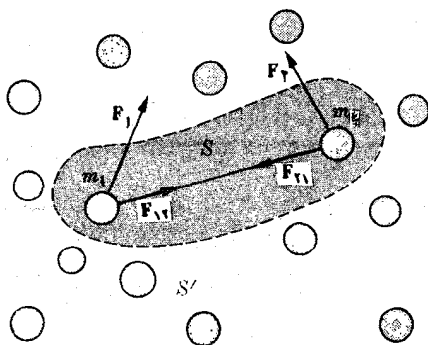
چون بنا به معادله (3.9)، سرعت مرکز جرم S برابر است با $\mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{P}_S / M$ ، از معادله (8.9) داریم

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} M \mathbf{a}_{\text{CM}}. \quad (۹.۹)$$

با مقایسه این نتیجه با معادله (۱۵.۷)، مشاهده می‌شود که

مرکز جرم یک دستگاه ذرات، همانند ذره‌ای حرکت می‌کند که جرم آن برابر جرم کل دستگاه است و به آن نیروی خارجی وارد بردستگاه ذرات وارد می‌شود.

نتایج بیان شده با معادله‌های (۶.۹)، (۷.۹)، (۸.۹) و (۹.۹) آشکارا نشان می‌دهند که برهم‌کنش بین دو دستگاه ذرات را می‌توان به‌طور صوری همانند آنچه که در مورد دو ذره منفرد در فصل ۷ به‌کار بردیم نشان داد. این دلیل نتایجنا، درستی اصول دینامیک را که در فصل ۷ به‌صورت غیردقیقی درموردی مانند برهم‌کنش بین زمین و ماه، بین دو مولکول یا در حرکت یک موشک یا یک خودرو (در مطالعه اجسام نه ذرات) به‌کار بردیم تأیید می‌کند.



شکل ۲.۹. نیروهای خارجی و داخلی وارد بردستگاه S

بد نیست رابطه بین $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ و نیروهای وارد بر تک تک ذرات را به‌دست آوریم. برای سهولت دستگاه S را مرکب از دو ذره در نظر می‌گیریم (شکل ۲.۹). نیروی داخلی وارد بر ذره m_1 ناشی از برهم‌کنش آن با ذره m_2 را با $\mathbf{F}_{12}$ و نیروی وارد بر ذره m_2 ناشی از برهم‌کنش آن با ذره m_1 را با $\mathbf{F}_{21}$ نشان می‌دهیم. بنا به قانون کنش و واکنش باید

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (۱۰.۹)$$

باشد. فرض کنیم $\mathbf{F}_1$ بر آئیند نیروهای خارجی وارد بر m_1 باشد. برای به دست آوردن معادله حرکت هر ذره تحت تأثیر تمام نیروهای وارد بر آن، معادله (۱۲.۷) را به‌کار می‌بریم:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$$

با جمع کردن این دو معادله و با توجه به اینکه مطابق معادله (۱۰.۹)، $F_{12} - F_{21} = 0$ است، به دست می‌آید

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = F_1 + F_2 \quad (11.9)$$

بنابراین آهنگ تغییر اندازه حرکت کل دستگاه مرکب از m_1 و m_2 برابر است با مجموع نیروهای خارجی وارد بر m_1 و m_2 . به‌طورکلی، برای دستگاهی متشکل از تعداد دلخواهی ذره، داریم

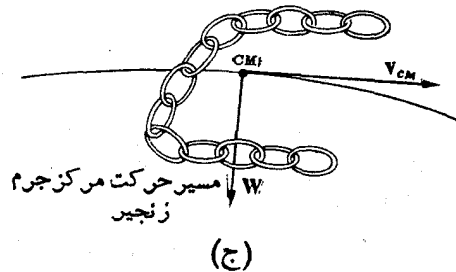
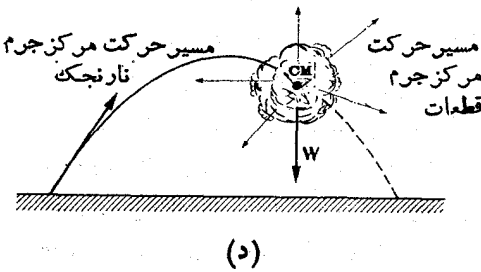
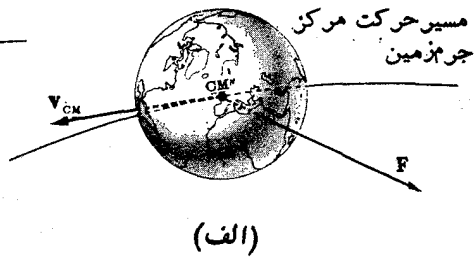
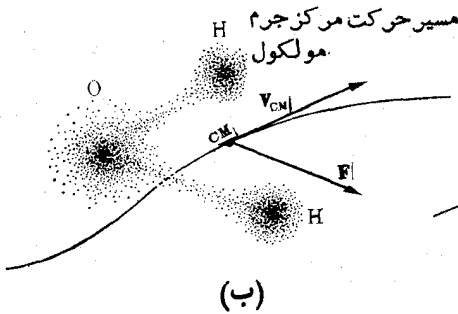
$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum_i p_i) = \sum_i F_i \quad (12.9)$$

که در آن F_i نیروی خارجی وارد بر ذره m_i است. مقایسه معادله (۱۲.۹) با معادله (۸.۹) نشان می‌دهد که

نیروی خارجی وارد بر یک دستگاه ذرات برابر است با مجموع نیروهای خارجی وارد بر هر یک از ذرات تشکیل دهنده دستگاه.

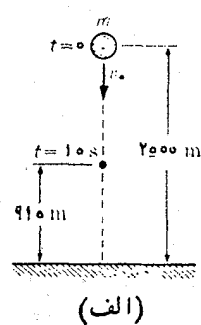
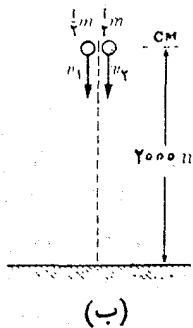
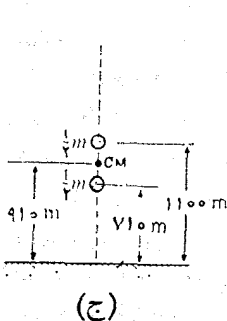
اکنون چند نمونه در نظر می‌گیریم. شکل ۳.۹ (الف) زمین را در جریان حرکتش به دور خورشید نشان می‌دهد. مرکز جرم زمین مانند ذره‌ای حرکت می‌کند که جرم آن معادل جرم زمین است و تحت تأثیر نیرویی برابر با مجموع نیروهایی که از طرف خورشید (و سایر اجسام سماوی) روی تمام ذرات تشکیل دهنده زمین وارد می‌شوند قرار دارد. شکل ۳.۹ (ب) یک مولکول آب را نشان می‌دهد. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم که این مولکول، زیر تأثیر نیروهای الکتریکی خارجی است. مرکز جرم آن مانند ذره‌ای حرکت می‌کند که دارای تمام جرم مولکول باشد و زیر تأثیر نیرویی معادل با برآیند نیروهای وارد بر تمام ذرات باردار تشکیل دهنده مولکول قرار داشته باشد. شکل ۳.۹ (ج) حرکت یک زنجیر را نشان می‌دهد که در هوا پرتاب شده است. حرکت مرکز جرم زنجیر همانند ذره‌ای خواهد بود که جرم آن برابر جرم زنجیر باشد و نیرویی معادل با وزن زنجیر بر آن وارد شود، بنابراین مرکز جرم یک سهمی رسم می‌کند. بالاخره شکل ۳.۹ (د) نارنجکی را که در هوا منفجر می‌شود نشان می‌دهد. مرکز جرم قطعات نارنجک به حرکت روی مسیر سهمی شکل اولیه ادامه خواهد داد، زیرا مرکز جرم همانند ذره‌ای رفتار می‌کند که جرم آن برابر جرم نارنجک است و نیرویی برابر با وزن تمام قطعات نارنجک به آن وارد می‌شود. بر اثر انفجار نارنجک وزن قطعات تغییر نمی‌کند، زیرا در نزدیکی سطح زمین نیروی گرانی مستقل از مکان نقاط است. با وجود این، باید توجه داشت اگر میدان نیرو ثابت نباشد و به مکان نقاط بستگی داشته باشد، به قطعات نارنجک نیروهایی متفاوت با نیرویی که در ابتدا وارد می‌شد اثر می‌کنند. در این صورت مسیر مرکز جرم با مسیر قبل از انفجار یکی نخواهد بود، زیرا مجموع نیروهای خارجی تغییر می‌کند. به عنوان مثال، اگر یکی از سیاره‌های منظومه شمسی (بر اثر یک انفجار کیهانی^۱) منفجر شود، مرکز جرم قطعات آن

مسیر بیضی اولیه را نخواهند پیمود، زیرا نیروهای وارد به قطعات فرق خواهند کرد.



شکل ۳.۹. مرکز جرم یک دستگاه ذرات مسیر ناشی از کل نیروهای وارد بر دستگاه را طی می کند.

مثال ۱.۰۹. نارنجکی که در راستای قائم سقوط می کند، در ارتفاع 2000 m که دارای سرعت 60 ms^{-1} است، به دو قطعه برابر تقسیم می شود. بلافاصله بعد از انفجار یکی از قطعات با سرعت 80 ms^{-1} به سقوط خود ادامه می دهد. مکان مرکز جرم دستگاه را 10 ثانیه بعد از انفجار پیدا کنید.



شکل ۳.۹

حل: می‌توان یکی از دو روش زیر را به کار برد (به شکل ۴.۹ مراجعه کنید): چون می‌دانیم بعد از انفجار نیروهای خارجی تغییر نکرده‌اند، می‌توان فرض کرد که مرکز جرم بدون توجه به اینکه انفجار روی داده به حرکت خود ادامه می‌دهد. بنا براین، بعد از انفجار ارتفاع مرکز جرم با رابطه $z = z_0 + v_0 t + gt^2/2$ داده می‌شود، که در آن $m = 2000$ ، $z_0 = 0$ ، $v_0 = -60 \text{ ms}^{-1}$ و $g = -98 \text{ ms}^{-2}$ است. بنا براین به ازای $t = 10 \text{ s}$ به دست می‌آید $z = 910 \text{ m}$.

روش دیگر آن است که وضع مرکز جرم را مستقیماً از روی وضع قطعات، بعد از ۱۰ ثانیه حساب کنیم. چون اندازه حرکت در جریان انفجار ثابت می‌ماند، داریم

$$mv_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

نظر به اینکه $m_1 = m_2 = m/2$ است، در نتیجه $v_1 + v_2 = 2v_0 = -120 \text{ ms}^{-1}$ از طرف دیگر، $v_1 = -80 \text{ ms}^{-1}$ و $v_2 = -40 \text{ ms}^{-1}$ است، بنا براین $v_1 = -80 \text{ ms}^{-1}$ و $v_2 = -40 \text{ ms}^{-1}$ است. بعد از ده ثانیه مکان قطعه اول عبارت است از $z_1 = z_0 + v_1 t + gt^2/2 = 710 \text{ m}$

$$z_2 = z_0 + v_2 t + \frac{1}{2}gt^2 = 1110 \text{ m}.$$

با استفاده از معادله (۲.۹) مکان مرکز جرم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$z_{\text{CM}} = \frac{\left(\frac{1}{2}m_1\right)z_1 + \left(\frac{1}{2}m_2\right)z_2}{m} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 910 \text{ m}$$

که با نتیجه به دست آمده از روش قبل تطبیق می‌کند.

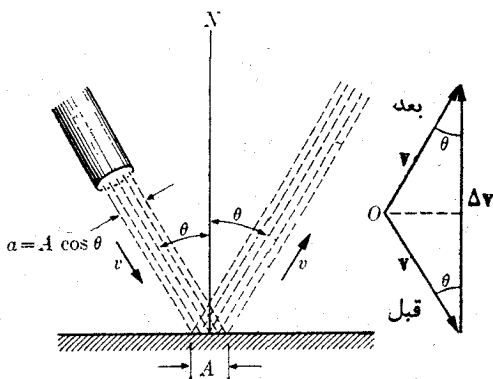
مثال ۴.۹. تلمبه‌ای با سطح مقطع a جریان گازی را با سرعتی خیلی بزرگتر از اغتشاش حرارتی مولکولهای گاز به سمت دیواره‌ای می‌پاشد. این دیواره مولکولها را بدون تغییر در بزرگی سرعت، منحرف می‌کند. نیروی اعمال شده بر دیواره را حساب کنید.

حل: وقتی که مولکولها به سمت دیواره پاشیده می‌شوند (شکل ۵.۹)، سوی سرعتشان به سمت پایین است و پس از برخورد به دیواره به سوی بالا برمی‌گردند، و در هر دو حالت، با راستای قائم N ، زاویه θ می‌سازند. هر مولکول، به سبب برخورد با دیواره، تغییر سرعتی برابر Δv پیدا می‌کند که در راستای موازی N است، زیرا نیروی وارد از طرف دیواره در این راستاست. بزرگی این تغییر برابر است با $|\Delta v| = 2vc \cos \theta$. تغییر اندازه حرکت مولکول برابر $|\Delta p| = m|\Delta v| = 2mvc \cos \theta$ و در راستای N است. فرض کنیم تعداد مولکولهای موجود در واحد حجم n باشد. مولکولهایی که در واحد زمان به دیواره می‌رسند مولکولهایی هستند که در حجمی به طول v و سطح مقطع a قرار دارند؛ بنا براین تعداد آنها برابر است با $n(av)$. هر مولکول تغییر اندازه حرکتی برابر $2mvc \cos \theta$ می‌پذیرد. بنا براین تغییر اندازه حرکت جریان گاز در واحد زمان برابر است با

$$F = (nav)(\gamma mv \cos \theta) = \gamma anmv^2 \cos \theta.$$

فرض کنیم A سطحی از دیواره باشد که گاز به آن برخورد می‌کند. از شکل پیداست که $a = A \cos \theta$ و در نتیجه رابطهٔ قبلی به صورت زیر در می‌آید:

$$F = \gamma Anmv^2 \cos^2 \theta.$$



شکل ۵.۹. تغییر اندازه حرکت جریان گازی که به یک دیواره برخورد می‌کند

بنابه معادلهٔ (۷.۹)، این نیرویی است که از طرف دیواره به جریان گاز وارد می‌شود، و مطابق معادلهٔ (۱۰.۹)، جریان گاز یک نیروی برابر و با علامت مخالف روی سطح A به وجود می‌آورد. [نیروی بادروی بادبانهای یک کشتی بادبانی از این رابطه به دست می‌آید. همچنین نیرویی که در جریان طوفان از طرف باد بر یک دیوار وارد می‌شود، از همین رابطه حساب می‌شود. کار برد دیگر آن را در مثال ۱۶.۹ خواهیم دید.]

چون نیروی کل فقط روی یک ذره تنها اعمال نمی‌شود، بلکه روی یک سطح وارد می‌شود، می‌توانیم یک مفهوم مفید دیگر، به نام فشار، را وارد کنیم که دانشجو با آن آشنایی دارد، و آن عبارت است از نیرویی که بر واحد سطح دیواره وارد می‌شود. بنا بر این

$$p = \frac{F}{A}. \quad (۱۳.۹)$$

در مورد خاص این مثال، گازفشاری برابر با $\gamma nmv^2 \cos^2 \theta$ روی دیواره وارد می‌کند.

۳.۹ جرم کاهیده

اکنون دوزره‌ای را در نظر می‌گیریم که منحصرأً زیر تأثیر برهم کنشهای متقابل هم قرار دارند، به گفتهٔ دیگر، هیچ نیروی خارجی روی آنها اثر نمی‌کند (شکل ۶.۹). به عنوان مثال این دوزره می‌توانند یک الکترون و یک پروتون در یک اتم هیدروژن منزوی باشند. نیروهای متقابل

داخلی $F_{۱۲}$ و $F_{۲۱}$ در رابطه (۱۰.۹) صدق می‌کنند. این نیروها در راستای خط $F_{۱۲}$ رسم شده‌اند. اکنون حرکت نسبی این دو ذره را مطالعه می‌کنیم. معادله حرکت این ذرات نسبت به یک ناظر لخت عبارت است از

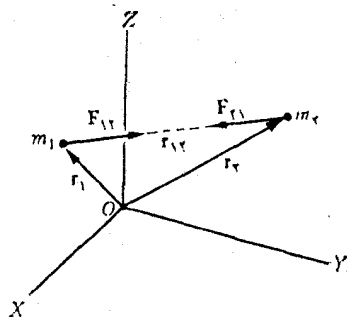
$$m_1 \left(\frac{dv_1}{dt} \right) = F_{۱۲} \quad \text{و} \quad m_2 \left(\frac{dv_2}{dt} \right) = F_{۲۱}$$

یا

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{F_{۱۲}}{m_1} \quad \text{و} \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{F_{۲۱}}{m_2}$$

با تفریق این دو رابطه از یکدیگر به دست می‌آید

$$\frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt} = \frac{F_{۱۲}}{m_1} - \frac{F_{۲۱}}{m_2}$$



شکل ۹.۶

با به کار بردن معادله (۱۰.۹) که در آن $F_{۱۲} = -F_{۲۱}$ است نتیجه فوق را یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dt} (v_1 - v_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F_{۱۲} \quad (۱۴.۹)$$

چون $v_1 - v_2 = v_{۱۲}$ سرعت m_1 نسبت به m_2 است، بنا بر این کمیت

$$\frac{d}{dt} (v_1 - v_2) = \frac{dv_{۱۲}}{dt} = a_{۱۲}$$

شتاب m_1 نسبت به m_2 است. کمیتی به نام جرم کاهیده^۱ دستگاه دو ذره را با علامت μ و مطابق تعریف زیر معرفی می‌کنیم:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad \text{یا} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (۱۶.۹)$$

در این صورت معادله (۱۴.۹) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$a_{12} = \frac{F_{12}}{\mu} \quad \text{یا} \quad F_{12} = \mu a_{12} \quad (۱۶.۹)$$

این نتیجه مهم بدین معنی است که

حرکت نسبی دو ذره‌ای که منحصرأً زیر تأثیر برهم‌کنشهای متقابل یکدیگر قرار دارند، معادل است با حرکت ذره‌ای (نسبت به یک ناظر لخت) که جرم آن برابر جرم کاهیده است و تحت اثر نیرویی برابر با برهم‌کنش آنها قرار دارد.

به عنوان مثال، می‌توان حرکت ماه به دور زمین را با استفاده از جرم کاهیده دستگاه ماه - زمین و نیرویی برابر با نیروی جاذبه زمین روی ماه، به یک مسئله تک جرمی تبدیل کرد. همچنین وقتی از حرکت یک الکترون به دور هسته گفتگو می‌شود، می‌توان دستگاه را به ذره‌ای با جرمی برابر جرم کاهیده دستگاه الکترون - هسته کاهش داد که زیر تأثیر نیروی بین‌الکترون و هسته حرکت می‌کند. بنا براین، در توصیف حرکت دوزره که زیر تأثیر برهم‌کنش متقابل یکدیگر قرار دارند می‌توان حرکت دستگاه را به حرکت مرکز جرم، که سرعت آن ثابت است، و به حرکت نسبی دوزره، که از معادله (۱۶.۹) به دست می‌آید و به چارچوب مرجع متصل به مرکز جرم مربوط می‌شود، تجزیه کرد. توجه داشته باشید که اگر جرم یکی از ذره‌ها، مثلاً m_1 خیلی کوچکتر از ذره دیگر باشد، جرم کاهیده را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mu = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} \cong m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (۱۷.۹)$$

این رابطه از تقسیم صورت و مخرج جمله سمت راست رابطه (۱۵.۹) بر m_2 و با استفاده از تقریب $1 - x \approx 1 - x$ ، [بنابه معادله (پ.۲۸)] به دست می‌آید. از اینجا نتیجه می‌شود که جرم کاهیده تقریباً برابر با جرم ذره سبکتر است. به عنوان مثال، در مطالعه حرکت یک ماهواره به دور زمین، با تقریب خیلی خوب می‌توان به جای جرم کاهیده دستگاه ماهواره - زمین، جرم ماهواره را به کار برد. از طرف دیگر، اگر جرم دو ذره یکسان باشد ($m_1 = m_2$)، در این صورت به دست می‌آید $\mu = m_1/2$. برهم‌کنش دو پروتون دارای چنین وضعی است. این امر در مورد دستگاهی مثل دوترون که از یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده، نیز با تقریب خوبی صادق است.

مثال ۳.۹. جرم کاهیده دستگاه‌های زیر را حساب کنید: (الف) الکترون - پروتون در یک اتم هیدروژن، (ب) پروتون - نوترون در یک هسته دوترون. در هر مورد، نتیجه را با جرم ذره سبکتر مقایسه کنید.

حل: (الف) برای دستگاه الکترون - پروتون که اتم هیدروژن را تشکیل می‌دهد، داریم $m_p = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$ و $m_e = 9.1091 \times 10^{-31} \text{ kg}$ چون m_e خیلی کوچکتر از m_p است، با به کار بردن معادله (۱۷.۹) می‌توان نوشت

$$\mu_{ep} = m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p} \right) = 9.1031 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

(ب) برای دستگاه پروتون - نوترون در دوترون، داریم

$$m_n = 1.56748 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

بیویم، کہ بہ دست می آید

$$\mu_{np} = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} = 0.51368 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

که در حدود نصف جرم هر ذره است.

مثال ۴.۹. ناظری سرعتهای دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 را اندازه‌گیری می‌کند و برای

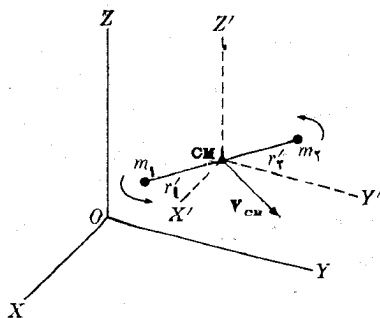
حل: ازمعادلة (۱۰۹)، با توجه به شکل ۷.۹، داریم

$$V_{CM} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}.$$

سرعت هر ذره نسبت به مرکز جرم، با استفاده از تبدیل گالیله که با معادله (۹.۶) بیان شد،

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{v}'_r = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{v}_r - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_r \mathbf{v}_r}{m_1 + m_r} = \frac{m_1 (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_1)}{m_1 + m_r} = - \frac{m_1 \mathbf{v}_{1r}}{m_1 + m_r}$$



شکل ۷.۹. حرکت نسبت به مرکز جرم

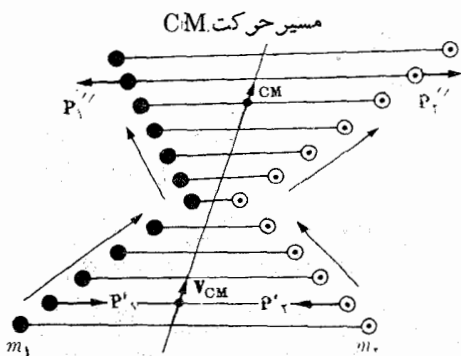
که در آن $v_{12} = v_1 - v_2$ سرعت نسبی دو ذره است. در نتیجه در چارچوب C به نظر می‌رسد ذرات در دوسوی مخالف حرکت می‌کنند. اندازه حرکت ذره ۱ نسبت به مرکز جرم عبارت است از

$$p'_1 = m_1 v'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{12} = \mu v_{12}$$

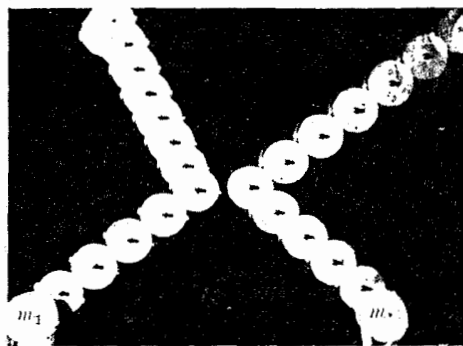
بنابراین اندازه حرکت ذره ۱ در چارچوب مرکز جرم برابر است با حاصل ضرب جرم کاهیده دستگاه در سرعت نسبی. همچنین برای ذره ۲ داریم

$$p'_2 = m_2 v'_2 = \mu v_{21} = -\mu v_{12}$$

بدین طریق ثابت می‌شود که در چارچوب مرجع مرکز جرم، دو ذره با اندازه حرکت‌های مساوی ولی دسوی مخالف هم حرکت می‌کنند و مطابق معادله (۳.۹) اندازه حرکت کل برابر $p'_1 + p'_2 = 0$ است. این نتیجه روی تصویر شکل ۸.۹ (الف) و تحلیل آن در شکل ۸.۹ (ب) نشان داده شده است.



(ب)



(الف)

شکل ۸.۹. برخورد بین دو جسم ($m_1 = 2 \text{ kg}$ و $m_2 = 1.5 \text{ kg}$). برهم کنش تنها هنگامی به وجود می‌آید که دو ذره خیلی به هم نزدیک باشند. (الف) عکس چند درخشی از حرکت دو جسم. (ب) تحلیل عکس نشان می‌دهد که مرکز جرم در خط مستقیم با سرعت ثابتی نسبت به آزمایشگاه حرکت می‌کند.

رابطه‌هایی که در این منال به دست آوردیم در فیزیک هسته‌ای در آزمایش‌های پراکندگی بسیار اهمیت دارند. در این آزمایش‌ها سرعت ذرات نسبت به یک چارچوب مرجع متصل به آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود. ولی رابطه‌های نظری برای پراکندگی در چارچوب CM بسیار ساده‌تر می‌شوند. بنابراین باید روابط موجود بین دو رشته اندازه‌گیری معلوم باشند. بدین منظور، از فرمول‌هایی که در بالا به دست آوردیم استفاده می‌شود.

۴.۹ اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات

اکنون به مطالعه اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات می‌پردازیم. در معادله (۳۲.۷) اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره را نسبت به یک نقطه معلوم با کمیت برداری زیر تعریف کردیم:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (18.9)$$

و در معادله (۳۸.۷) رابطه‌ای بین $\mathbf{L}$ و گشتاور نیروی اعمال شده، $\boldsymbol{\tau}$ ، به دست آوردیم:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (19.9)$$

اکنون یک وضع مشابه را که در آن به جای یک ذره چندین ذره وجود دارد، مورد توجه قرار می‌دهیم. برای سهولت، ابتدا تنها دو ذره را در نظر می‌گیریم. رابطه (۱۹.۹) در مورد دو ذره ۱ و ۲ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} = \boldsymbol{\tau}_1 \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \boldsymbol{\tau}_2$$

با جمع دو رابطه فوق به دست می‌آید

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \quad (20.9)$$

فرض کنیم روی هر ذره، علاوه بر برهم‌کنش متقابل با ذره دیگر، یک نیروی خارجی نیز اثر می‌کند (شکل ۹.۹). در این صورت نیروی وارد بر ذره ۱ برابر است با $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}$ و روی ذره ۲ برابر است با $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$ ، و

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}$$

نظر به اینکه $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ است، گشتاور نیروی کل ذرات برابر است با

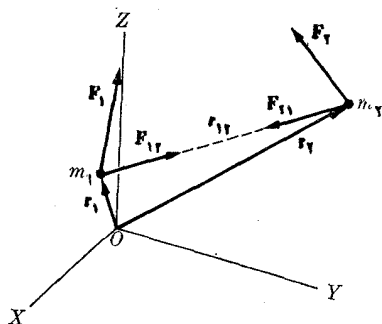
$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{21}$$

بردار $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{21}$ در راستای خطی است که دو ذره را به یکدیگر وصل می‌کند. اگر این فرض خاص را بپذیریم که نیروهای داخلی $\mathbf{F}_{21}$ و $\mathbf{F}_{12}$ در راستای $\mathbf{r}_{21}$ ، خط واصل بین دو ذره اثر می‌کنند، بردارهای $\mathbf{r}_{21}$ و $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{21}$ موازی می‌شوند، در نتیجه $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$ خواهد شد. بدین طریق آخرین جمله معادله بالا از بین می‌رود. به گفته دیگر، رابطه (۲۰.۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \boldsymbol{\tau}_{1,\text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_{2,\text{ext}}$$

با تعمیم این نتیجه برای چند ذره، به دست می آید

$$\frac{dL}{dt} = \tau_{\text{ext}} \quad (21.9)$$



شکل ۹.۹

در این معادله $L = \sum_i L_i$ اندازه حرکت زاویه‌ای کل ذرات و τ_{ext} گشتاور نیروی کل است که فقط از طرف نیروهای خارجی وارد می‌شود، تا زمانی که نیروهای داخلی در راستای خط واصل دو ذره قرار دارند. می‌توان معادله (۲۱.۹) را به صورت زیر بیان داشت:

مشتق زمانی اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات نسبت به یک نقطه دلخواه برابر است با گشتاور کل نیروهای خارجی وارد بر این دستگاه، نسبت به همان نقطه.

حکم بالا را می‌توان قانون اساسی دینامیک در حرکتهای چرخشی دانست. در فصل ۱۰، این نتیجه را، در مورد حرکت یک جسم سخت به کار خواهیم برد. اگر نیروهای خارجی وجود نداشته باشند، یا مجموع گشتاور آنها برابر صفر باشد، $\tau_{\text{ext}} = 0$ داریم

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum_i L_i) = 0$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق به دست می‌آید

$$L = \sum_i L_i = L_1 + L_2 + L_3 + \dots = \text{const.} \quad (22.9)$$

رابطه (۲۲.۹) چیزی جز قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای نیست، که می‌گویید:

بزرگی و راستای اندازه حرکت زاویه‌ای کل یک دستگاه منزوی، یا دستگاهی که گشتاور نیروهای خارجی وارد بر آن صفر باشد، ثابت است.

به عنوان مثال، الکترون‌ها در داخل اتم دارای چنین وضعی هستند، هرگاه تنها نیروهای داخلی مربوط به دافعه الکتروستاتیک الکترون‌ها و جاذبه الکتروستاتیک هسته را در نظر

بگیریم، که این نیروهای داخلی در طول خطهای واصل هر جفت از این ذره‌ها اثر می‌کنند. همچنین اگر منظومه شمسی را منزوی فرض کنیم، و نیروهای ناشی از بقیه کهکشان را ندیده بگیریم، اندازه حرکت زاویه‌ای کل تمام سیاره‌ها نسبت به مرکز جرم منظومه شمسی ثابت باقی می‌ماند. این نتیجه با درجه بالایی از درستی برقرار است. همچنین اینکه زمین با اندازه حرکت زاویه‌ای اساساً ثابتی به‌گردش دور مرکز جرم خود ادامه می‌دهد، بدین دلیل است که نیروهای خارجی ناشی از خورشید و سایر سیاره‌ها از مرکز زمین می‌گذرند و بنا بر این نسبت به مرکز جرم برابر صفر (یا تقریباً برابر صفر) است.

با وجود فرض خاصی که برای به دست آوردن قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای پذیرفتیم (از این قرار که نیروهای داخلی در راستای خط واصل بین هر جفت ذره اثر می‌کنند)، به نظر می‌رسد این قانون دارای اعتبار عام است، و در مورد کلیه پدیده‌هایی که تاکنون مشاهده شده‌اند، حتی هنگامی که به نظر می‌رسد فرض خاص ما برقرار نیست، به کار می‌رود.

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای دلالت دارد بر اینکه اگر در یک دستگاه منزوی اندازه حرکت زاویه‌ای بخشی از دستگاه به سبب برهم‌کنشهای داخلی تغییر کند، اندازه حرکت زاویه‌ای بقیه دستگاه باید به همان اندازه (ولی با علامت مخالف) تغییر کند تا اندازه حرکت زاویه‌ای کل ثابت باقی بماند.

به عنوان مثال، در یک عنصر رادیواکتیو، که هسته فروپاشیده می‌شود، ذره‌های گسیلیده، که غالباً یک الکترون و یک نوترینو می‌باشند، مقداری اندازه حرکت زاویه‌ای دارند. چون در فرایند فروپاشی تنها نیروهای داخلی مؤثرند، اندازه حرکت زاویه‌ای هسته باید آنقدر تغییر کند تا اندازه حرکت زاویه‌ای خارج شده به وسیله ذرات گسیلیده را جبران کند. همچنین، اگر اتم، مولکول یا هسته‌ای یک پرتو الکترومغناطیسی گسیل کند، اندازه حرکت زاویه‌ای آن باید آنقدر تغییر کند تا درست اندازه حرکت زاویه‌ای خارج شده توسط تابش را جبران کند. بعضی مواقع، فرایندهایی که امکان وجود آنها در طبیعت هست، به سبب خصوصیتی که مشخصه آن فرآیند است و مانع از برقرار ماندن اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای می‌شود، نمی‌توانند رخ دهند.

مثال ۵.۹. اندازه حرکت زاویه‌ای دو ذره را نسبت به مرکز جرم آنها یا چارچوب مرجع C حساب کنید.

حل: فرض کنیم $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2$ بردار مکان ذره ۱ نسبت به ذره ۲ باشد. بنا به شکل ۶.۹، محل مرکز جرم دو ذره نسبت به چارچوب مرجع L عبارت است از

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

در نتیجه بردار مکان هر ذره نسبت به مرکز جرم یا چارچوب مرجع C از این

قرار است:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}$$

با به کار بردن نتایج حاصل از مثال ۴.۹ اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{CM} &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 = \left(\frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \right) \times (\mu \mathbf{v}_{12}) \\ &+ \left(-\frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \right) \times (-\mu \mathbf{v}_{12}) = \mu \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12} \\ &= \mathbf{r}_{12} \times (\mu \mathbf{v}_{12}). \end{aligned}$$

بدین طریق، اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه نسبت به مرکز جرم برابر است اندازه حرکت زاویه‌ای ذره‌ای به اندازه حرکت $\mu \mathbf{v}_{12}$ و بردار مکان $\mathbf{r}_{12}$. توجه داشته باشید که در رابطه $\mathbf{L}_{CM}$ تنها کمیت‌هایی ظاهر می‌شوند که مکان و حرکت نسبی دو ذره را مشخص می‌کنند.

این نتیجه، به عنوان مثال، در محاسبه اندازه حرکت زاویه‌ای یک اتم هیدروژن اهمیت بسیار دارد. در اینجا، باید فاصله و سرعت الکترون را نسبت به پروتون به کار ببریم و نیز جرم کاهیده دستگاه الکترون - پروتون را جانشین جرم الکترون کنیم؛ یعنی $\mathbf{L}_{CM} = \mu_{ep} \mathbf{r}_{ep} \times \mathbf{v}_{ep}$ ، که در آن شاخص‌های e و p بترتیب نمایشگر الکترون و پروتون هستند.

هنگامی که دستگاه چند ذره‌ای است، معمولاً اندازه حرکت زاویه‌ای کل را نسبت به مرکز جرم بیان می‌کنند و در این صورت آن را اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی دستگاه می‌نامند. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی یک دستگاه ویژگی خود دستگاه و مستقل از آزمایشگر یا ناظر است. در مورد یک جسم سخت یا یک ذره بنیادی اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی را اسپین^۱ نیز می‌نامند.

مثال ۹.۶. رابطه‌ای بین اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه ذرات نسبت به چارچوب مرجع CM یا C (اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی) و اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا چارچوب L برقرار کنید.

حل: برای سهولت، دستگاهی متشکل از دو ذره را در نظر می‌گیریم. اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به چارچوب آزمایشگاه عبارت است از

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$$

اگر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نمایش سرعت ذره‌ها نسبت به چارچوب L و $\mathbf{v}'_1$ و $\mathbf{v}'_2$ نمایش سرعتها نسبت به چارچوب C باشد، داریم

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM}.$$

در نتیجه

$$\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM}) = \mathbf{p}'_1 + m_1 \mathbf{v}_{CM}.$$

و به همین طریق داریم

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 + m_2 \mathbf{v}_{CM}.$$

با یادآوری اینکه $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM}$ و $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_{CM}$ است، بالاخره به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM}) \times (\mathbf{p}'_1 + m_1 \mathbf{v}_{CM}) + (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_{CM}) \times (\mathbf{p}'_2 + m_2 \mathbf{v}_{CM}) \\ &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{p}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{p}'_2 + \mathbf{r}_{CM} \times (\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) + (m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2) \times \mathbf{v}_{CM} \end{aligned}$$

بنا به مثال ۴.۹ یا معادله (۴.۹) داریم $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$ و بنا به تعریف $\mathbf{L}_{CM}$ (مثال ۵.۹) و $\mathbf{r}_{CM}$ [معادله (۲.۹)]، نتیجه می‌گیریم که اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به چارچوب آزمایشگاه برابر است با

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}_{CM} + M \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}. \quad (۲۳.۹)$$

اولین جمله سمت راست اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی را نسبت به چارچوب CM یا C و آخرین جمله آن اندازه حرکت زاویه‌ای خارجی را نسبت به چارچوب L، به دست می‌دهد، وقتی که تمام جرم دستگاه متمرکز در مرکز جرم فرض شود. به عنوان مثال، هنگامی که بازیکنی توپی را با چرخش پرتاب می‌کند، اندازه حرکت زاویه‌ای ناشی از چرخش با $\mathbf{L}_{CM}$ مشخص می‌شود در صورتی که اندازه حرکت زاویه‌ای ناشی از حرکت انتقالی توپ با $\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}$ بیان می‌شود. همین حالت برای الکترون چرخانی که در اتم هیدروژن دور هسته گردش می‌کند، نیز وجود دارد. این امر یک بار دیگر نشان می‌دهد تا آنجا که به اندازه حرکت زاویه‌ای مربوط است می‌توان حرکت داخلی را از حرکت مرکز جرم جدا کرد. گرچه ما فقط برای دستگاهی متشکل از دو ذره استدلال کردیم، ولی نتیجه حاصل در مورد دستگاهی متشکل از هر تعداد ذره نیز معتبر است.

مثال ۷.۹. برای یک دستگاه ذرات، رابطه‌ای بین گشتاور نیروهای خارجی نسبت به مرکز جرم و اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی آن برقرار کنید.

حل: اگر بازهم برای سهولت فرض کنیم دستگاه فقط از دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 تشکیل شده است و نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ به آنها اثر می‌کنند، گشتاور کل نیروهای خارجی نسبت به مبدأ مختصات در چارچوب L، برابر است با

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{F}_2 \\ &= \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_{CM} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2). \end{aligned}$$

دوجمله اول رابطه فوق گشتاور نیروی خارجی نسبت به مرکز جرم است. که آن را با $\boldsymbol{\tau}_{CM}$ نشان می‌دهیم، در صورتی که جمله آخر گشتاور نیروهای خارجی برآیند $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$

است که گویی به مرکز جرم وارد می شود. بنابراین داریم

$$\tau_{\text{ext}} = \tau_{\text{CM}} + \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (24.9)$$

ولی بنا به نتیجه مثال ۶.۹، داریم $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{CM}} + M\mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{v}_{\text{CM}}$. با مشتق گرفتن از این رابطه نسبت به زمان، به دست می آید

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{CM}}}{dt} + M\mathbf{r}_{\text{CM}} \times \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} + M \frac{d\mathbf{r}_{\text{CM}}}{dt} \times \mathbf{v}_{\text{CM}}$$

می دانیم که $d\mathbf{r}_{\text{CM}}/dt = \mathbf{v}_{\text{CM}}$ است، به گونه ای که جمله آخر برابر صفر می شود. با به کار بردن معادله (۹.۹) (یعنی $\mathbf{F}_{\text{ext}} = M d\mathbf{v}_{\text{CM}}/dt$)، به دست می آوریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{CM}}}{dt} + \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{F}_{\text{ext}}$$

با قراردادن رابطه های $d\mathbf{L}/dt$ و τ_{ext} که در بالا به دست آمد، در معادله (۲۱.۹)، درمی یابیم

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{CM}}}{dt} = \tau_{\text{CM}} \quad (25.9)$$

این رابطه ظاهراً مشابه معادله (۲۱.۹) است، ولی یک اختلاف اساسی بین این دو رابطه وجود دارد. معادله (۲۱.۹) تنها زمانی اعتبار دارد که اندازه حرکت زاویه ای و گشتاور نیروها نسبت به یک نقطه ثابت در یک دستگاه لخت، که معمولاً مبدأ مختصات انتخاب می شود، محاسبه شده باشد. ولی از طرف دیگر، معادله (۲۵.۹) نسبت به مرکز جرم معتبر است، حتی اگر در یک چارچوب مرجع لخت در حال سکون نباشد. هرچند این معادله را برای دو ذره به دست آوردیم ولی در مورد یک دستگاه متشکل از هرچند ذره نیز اعتبار دارد و بویژه در مطالعه حرکت جسم سخت بسیار مفید است.

۵.۹ انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات

یک دستگاه متشکل از دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 را که زیر تأثیر نیروهای خارجی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ و نیروهای داخلی $\mathbf{F}_{12}$ و $\mathbf{F}_{21}$ قرار دارد در نظر می گیریم. در یک لحظه خاص، این ذرات در مکانهایی که در شکل ۱۰.۹ نشان داده شده اند قرار دارند و با سرعتهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ روی مسیره های C_1 و C_2 حرکت می کنند. معادله حرکت هر ذره به صورت زیر نوشته می شود:

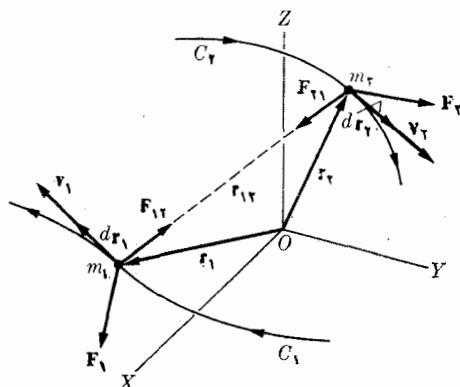
$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} \quad (26.9)$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$$

در فاصله زمانی خیلی کوتاه dt هر ذره در راستای مماس بر مسیر خود به اندازه $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ جابجایی شود. هرگاه حاصل ضرب اسکالر رابطه اول معادله های (۲۶.۹) را با $d\mathbf{r}_1$ و رابطه دوم را با $d\mathbf{r}_2$ پیدا کنیم، خواهیم داشت

$$m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2$$



شکل ۱۰.۹

از جمع دو رابطه فوق و با یادآوری اینکه $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ است، به دست می آید

$$m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2). \quad (۲۷.۹)$$

چون $d\mathbf{r}_1/dt = \mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}_1 = v_1 dv_1$ است، داریم

$$\mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \left(\frac{dv_1}{dt} \right) \cdot d\mathbf{r}_1 = dv_1 \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right) = v_1 dv_1$$

همچنین، $\mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = v_2 dv_2$ و نیز $d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = d\mathbf{r}_{12}$ بنابراین معادله (۲۷.۹) به صورت زیر درمی آید:

$$m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق بین زمان اولیه t_0 تا یک لحظه اختیاری t ، به دست می آید

$$m_1 \int_{v_{10}}^{v_1} v_1 dv_1 + m_2 \int_{v_{20}}^{v_2} v_2 dv_2 = \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2) + \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} \quad (۲۸.۹)$$

که در آن A و B نمادهایی برای نشان دادن وضع هر دو ذره در لحظه های t_0 و t می باشند. چون $\int_{v_0}^v v dv = v^2/2 - v_0^2/2$ است، برای جمله های سمت چپ معادله (۲۸.۹) به دست می آید

$$\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_{1,0}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_2v_{2,0}^2\right) = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1v_{1,0}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,0}^2\right) = E_k - E_{k,0}$$

که در آن

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (29.9)$$

انرژی جنبشی کل دستگاه دو ذره در لحظه t ، و $E_{k,0}$ انرژی جنبشی کل در لحظه t_0 نسبت به چارچوب مرجع ناظر است. جمله اول راست معادله (29.9) برابر W_{ext} ، کار انجام یافته کل به وسیله نیروهای خارجی در همان فاصله زمانی است. به گفته دیگر

$$W_{\text{ext}} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2).$$

بالاخره جمله آخر معادله (29.9) برابر W_{int} کار انجام یافته به وسیله نیروهای داخلی در همان فاصله زمانی را به دست می دهد، یعنی

$$W_{\text{int}} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}$$

با قراردادن این نمادها در معادله (29.9)، به دست می آید

$$E_k - E_{k,0} = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}. \quad (30.9)$$

معادله (30.9) را می توان چنین بیان کرد:

تغییر انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات برابر است با کار انجام یافته روی دستگاه به وسیله نیروهای داخلی و خارجی.

نتیجه فوق تعمیم طبیعی نتیجه ای است که قبلا برای یک ذره، با فرمول (13.8)، به دست آوردیم و در مورد یک دستگاه مشکل از هر تعداد ذره معتبر است.

۶.۹ بقای انرژی یک دستگاه ذرات

اکنون فرض می کنیم که نیروهای داخلی پایستار هستند، در نتیجه تابعی مانند $E_{p,12}$ وابسته به مختصات m_1 و m_2 وجود دارد، به گونه ای که

$$W_{\text{int}} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = E_{p,12,0} - E_{p,12} \quad (31.9)$$

که در آن $E_{p,12}$ مقدار تابع در لحظه t و $E_{p,12,0}$ مقدار آن در لحظه t_0 است. $E_{p,12}$ را انرژی پتانسیل داخلی دستگاه می نامیم. اگر نیروهای داخلی در راستای خط $\mathbf{r}_{12}$ که دو

ذره را به یکدیگر وصل می‌کند اثر کنند، در این صورت انرژی پتانسیل داخلی فقط به فاصله r بستگی دارد، به همان دلیلی که انرژی پتانسیل ناشی از یک نیروی مرکزی فقط به فاصله r بستگی دارد (بخش ۱۰.۸). در این حالت انرژی پتانسیل داخلی مستقل از چارچوب مرجع است، زیرا در آن تنها فاصله بین دو ذره دخالت دارد، حالتی که اغلب برهم کنشهایی را که در طبیعت یافت می‌شوند بخوبی نمایش می‌دهد. با وارد کردن معادله (۳۱.۹) در معادله (۳۰.۹) به دست می‌آید

$$E_k - E_{k,0} = W_{\text{ext}} + E_{p,12,0} - E_{p,12}$$

یا

$$(E_k + E_{p,12}) - (E_k + E_{p,12})_0 = W_{\text{ext}} \quad (32.9)$$

کمیت

$$U = E_k + E_{p,12} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + E_{p,12} \quad (33.9)$$

را از این به بعد انرژی خاص^۱ دستگاه می‌نامیم. این انرژی برابر است با مجموع انرژیهای جنبشی ذره‌ها نسبت به یک ناظر لخت و انرژی پتانسیل داخلی آنها که، چنانکه قبلاً نشان دادیم، (بنا به فرضها که کردیم) مستقل از چارچوب مرجع است.

اگر به جای دو ذره چندین ذره وجود داشته باشند، انرژی خاص برابر می‌شود با

$$U = E_k + E_{p,\text{int}} = \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{ذرات}}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{ذرات}}} E_{p,ij} \quad (34.9)$$

که در آن

$$E_k = \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{ذرات}}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots$$

و

$$E_{p,\text{int}} = \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{ذرات}}} E_{p,ij} = E_{p,12} + E_{p,13} + \dots + E_{p,23} + \dots$$

توجه داشته باشید که جمع اول که مربوط به انرژی جنبشی است، به ازای هر ذره یک جمله دارد. جمع دوم که مربوط به انرژی پتانسیل داخلی است، برای هر جفت ذره یک جمله دارد، زیرا تنها به برهم کنشهای دو ذره‌ای مربوط می‌شود. اگر هیچ نیروی داخلی وجود نداشته باشد، انرژی خاص تماماً جنبشی است.

با وارد کردن تعریف انرژی خاص، (۳۳.۹)، در معادله (۳۲.۹)، داریم

$$U - U_0 = W_{\text{ext}} \quad (35.9)$$

این رابطه چنین بیان می‌شود:

تغییر انرژی خاص یک دستگاه ذرات برابر است با کار انجام یافته روی دستگاه به وسیله نیروهای خارجی.

این بیان مهم، قانون بقای انرژی نام دارد. تاکنون این قانون تنها به عنوان نتیجه‌ای از اصل بقای اندازه حرکت، و این فرض نیروهای داخلی پایستار هستند، ظاهر شده است. با وجود این، به نظر می‌رسد این قانون در مورد تمام فرایندهایی که در جهان مشاهده می‌شوند صادق باشد، بنابراین، فراتر از فرضهای خاصی که برای برقراری آن به کار بردیم، باید برای آن اعتبار عام قایل شویم. معادله (۸.۹) برهم‌کنش یک دستگاه را با جهان خارج به وسیله تغییر انرژی دستگاه بیان می‌کند.

اکنون یک دستگاه منزوی را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه $W_{\text{ext}} = 0$ است، زیرا هیچگونه نیروی خارجی وجود ندارد. در این صورت داریم $U - U_0 = 0$ یا $U = U_0$. به گفته دیگر،

انرژی خاص یک دستگاه ذات منزوی ثابت باقی می‌ماند،

با این فرض که نیروهای داخلی پایستار باشند. بنابراین، اگر انرژی جنبشی یک دستگاه منزوی افزایش پیدا کند، انرژی پتانسیل داخلی آن باید به همان اندازه کاهش یابد تا مجموع آنها ثابت باقی بماند. به عنوان مثال، در یک مولکول منزوی هیدروژن، مجموع انرژی جنبشی نسبت به یک چارچوب مرجع لخت و انرژی پتانسیل دوپروتون و دو الکترون همیشه ثابت می‌ماند.

اصل بقای اندازه حرکت، همچنین قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای، قوانینی اساسی هستند که به نظر می‌رسد بر کلیه فرایندهایی که می‌توانند در طبیعت روی دهند، حاکم‌اند.

گاهی پیش می‌آید که نیروهای خارجی وارد بر دستگاه نیز پایستار باشند، به گونه‌ای که W_{ext} را می‌توان به صورت $W_{\text{ext}} = E_{p,\text{ext},0} - E_{p,\text{ext}}$ نوشت که در آن $E_{p,\text{ext},0}$ و $E_{p,\text{ext}}$ مقادیر انرژی پتانسیل وابسته به نیروهای خارجی در حالت‌های ابتدایی و انتهایی هستند. در این صورت، معادله (۳۵.۹) به شکل زیر درمی‌آید:

$$U - U_0 = E_{p,\text{ext},0} - E_{p,\text{ext}}$$

یا

$$U + E_{p,\text{ext}} = U_0 + E_{p,\text{ext},0}$$

کمیت

$$E = U + E_{p,\text{ext}} = E_k + E_{p,\text{int}} + E_{p,\text{ext}} \quad (۳۶.۹)$$

انرژی کل دستگاه نامیده می‌شود. در جریان حرکت دستگاه بر اثر نیروهای خارجی و داخلی پایستار، این انرژی ثابت باقی می‌ماند. این نتیجه مشابه معادله (۲۹.۸) است که برای یک ذره واحد به دست آوردیم.

به عنوان مثال، انرژی خاص یک اتم هیدروژن، متشکل از یک الکترون و یک پروتون، برابر با انرژی جنبشی الکترون و پروتون و انرژی پتانسیل داخلی ناشی از برهم‌کنش الکتریکی آنهاست. اگر اتم منزوی باشد، مجموع این دو انرژی ثابت است. ولی، اگر

اتم در یک میدان خارجی قرار گیرد، به انرژی کل آن باید انرژی پتانسیل ناشی از میدان خارجی را نیز اضافه کرد و مجموع این انرژیهاست که ثابت باقی می ماند.

یک مثال دیگر: دو جرم m_1 و m_2 را در نظر می گیریم که به فزنی با ثابت k وصل شده اند. اگر دستگاه به هوا پرتاب شود، انرژی جنبشی برابر می شود با $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ ، انرژی پتانسیل داخلی از انبساط یا تراکم فنر ناشی می شود و برابر $\frac{1}{2}kx^2$ است، که در آن x عبارت است از تغییر شکل فنر، و انرژی پتانسیل خارجی (ناشی از جاذبه گرانشی زمین) برابر است با $m_1gy_1 + m_2gy_2$ که در آن y_1 و y_2 ارتفاع ذره ها از سطح زمین است. پس، انرژی خاص دستگاه برابر می شود با $U = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2$. اگر هیچ نیروی دیگری روی دستگاه اثر نکند، انرژی کل برابر می شود با

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 + m_1gy_1 + m_2gy_2$$

و این انرژی باید در جریان حرکت ثابت باقی بماند. چون انرژی جنبشی به سرعت بستگی دارد، مقدار انرژی جنبشی به چارچوب مرجعی که جهت مطالعه حرکت دستگاه مورد استفاده قرار می گیرد بستگی پیدا می کند. انرژی جنبشی مربوط به چارچوب CM را با $E_{k,CM}$ نشان می دهیم و آن را انرژی جنبشی داخلی می نامیم. انرژی پتانسیل داخلی که فقط به فاصله بین ذرات بستگی دارد، (چنانکه قبلاً توضیح دادیم) در تمام چارچوب های مرجع دارای مقدار یکسانی است. بنابراین مجموع انرژی جنبشی داخلی و انرژی پتانسیل داخلی یک دستگاه را به عنوان انرژی داخلی آن دستگاه تعریف می کنیم، یا

$$U_{int} = E_{k,CM} + E_{p,int} \quad (۳۷.۹)$$

در نتیجه، زمانی که با یک دستگاه ذرات سروکار داشته باشیم، معمولاً از انرژی داخلی آن گفتگو می کنیم، حتی اگر شاخصهای CM یا int را ننویسیم.

در بعضی حالات و ویژه، انرژی پتانسیل داخلی یک دستگاه، در مقابل انرژی جنبشی داخلی ناچیز است. این امر مثلاً در مورد یک گاز در دماهای بالا صدق می کند. در این حالت می توان انرژی داخلی را تماماً انرژی جنبشی در نظر گرفت، و اصل بقای انرژی به اصل بقای انرژی جنبشی تبدیل می شود.

مثال ۸.۹. رابطه بین انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات را که نسبت به چارچوب مرجع آزمایشگاه یا L حساب شده است با انرژی جنبشی داخلی نسبت به چارچوب مرجع CM یا C ، به دست آورید.

حل: برای سهولت، دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 را که دارای سرعت های v_1 و v_2 در چارچوب L و سرعت های v'_1 و v'_2 در چارچوب C هستند در نظر می گیریم. این دو دسته سرعت با رابطه های زیر به یکدیگر مربوط اند:

$$v_1 = v'_1 + v_{CM} \quad \text{و} \quad v_2 = v'_2 + v_{CM}$$

که در آن v_{CM} سرعت چارچوب C نسبت به چارچوب L است. در این صورت انرژی جنبشی نسبت به دستگاه مختصات L برابر می‌شود با

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1' + v_{CM})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2' + v_{CM})^2.$$

این تساوی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + (m_1 v_1' + m_2 v_2') \cdot v_{CM}.$$

کمیت $m_1 v_1' + m_2 v_2'$ برابر اندازه حرکت کل دستگاه نسبت به مرکز جرم است، و بنا به معادله (۴.۹) باید مساوی صفر باشد (به مثال ۴.۹ مراجعه کنید). انرژی جنبشی داخلی نسبت به چارچوب C برابر است با $E_{k,CM} = m_1 v_1'^2/2 + m_2 v_2'^2/2$. بنا بر این E_k ، انرژی جنبشی دستگاه نسبت به چارچوب آزمایشگاه L را می‌توان چنین نوشت:

$$E_k = E_{k,CM} + (m_1 + m_2) v_{CM}^2/2 = E_{k,CM} + M v_{CM}^2/2 \quad (38.9)$$

جمله اول، $E_{k,CM}$ ، انرژی جنبشی داخلی است. جمله دوم سمت راست انرژی جنبشی ذره‌ای است به جرم $M = m_1 + m_2$ که همراه مرکز جرم حرکت می‌کند. این انرژی را انرژی جنبشی انتقالی^۱ دستگاه می‌نامند. هر چند معادله (۳۸.۹) را برای دو ذره به دست آوردیم ولی در مورد دستگاهی متشکل از هر تعداد ذره نیز صادق است.

اینجا یک بار دیگر ملاحظه می‌شود که می‌توان حرکت دستگاه را به دو حرکت جدا کرد، که هر حرکت دارای یک انرژی جنبشی کاملاً مشخصی است. یکی، حرکت انتقالی با سرعتی برابر با سرعت مرکز جرم، و دیگری حرکت داخلی نسبت به مرکز جرم.

اکنون یکبار دیگر به حالتی که بازیکنی توپی را با چرخش پرتاب می‌کند برگردیم. انرژی جنبشی کل توپ نسبت به زمین برابر است با مجموع انرژی جنبشی داخلی آن نسبت به مرکز جرم، که مربوط است به انرژی جنبشی چرخشی، و انرژی جنبشی انتقالی آن نسبت به زمین، که مقدار آن برابر است با $m \times v_{CM}^2/2$. همین وضع در مورد یک مولکول نیز وجود دارد. معمولاً، حرکت داخلی دستگاه است که مورد توجه می‌باشد و بدین مناسبت برای توصیف بیشتر فرایندها، چارچوب C ترجیح دارد.

چنانکه قبلاً متذکر شدیم، انرژی پتانسیل داخلی $E_{p,12}$ تنها به فاصله بین m_1 و m_2 بستگی دارد و در چارچوب‌های L و C یکسان است. با افزودن $E_{p,12}$ به طرفین معادله (۳۸.۹) و با استفاده از معادله (۳۳.۹)، می‌توان نوشت

$$U = U_{int} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

که در آن $U_{int} = E_{k,CM} + E_{p,12}$ است. این معادله انرژی داخلی U_{int} و انرژی خاص U را به گونه‌ای که در چارچوب C و L اندازه‌گیری می‌شوند، به هم مربوط می‌کند. توجه داشته باشید که برای یک دستگاه منزوی v_{CM} ثابت است، بنا بر این اگر U ثابت باشد، U_{int} نیز ثابت باقی می‌ماند. به گفته دیگر، هنگامی که انرژی در یک چارچوب لخت L

ثابت باشد، درچارچوب مرکز جرم C نیز ثابت باقی ماند و برعکس.

مثال ۹.۹. انرژی جنبشی داخلی دو ذره را بر حسب جرم کاهیده و سرعت نسبی آنها بنویسید.

حل: انرژی جنبشی داخلی برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$ با استفاده از نتایج مثال ۹.۴، یعنی

$$v_1' = \frac{m_2 v_{12}}{m_1 + m_2} \quad \text{و} \quad v_2' = -\frac{m_1 v_{12}}{m_1 + m_2}$$

جدول ۱.۹

رابطه	شماره معادله
رابطه‌های سینماتیک	
$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}$ ($\mathbf{P}_{CM} = 0$)	(۳.۹)
$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + M\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}$	(۲۳.۹)
$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \boldsymbol{\tau}_{CM} + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{ext}$	(۲۴.۹)
$E_k = E_{k,CM} + Mv_{CM}^2/2$	(۳۸.۹)
رابطه‌های دینامیک	
$d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{ext}$	(۸.۹)
یا $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_{ext}$	(۹.۹)
$d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}_{ext}$	(۲۱.۹)
یا $d\mathbf{L}_{CM}/dt = \boldsymbol{\tau}_{CM}$	(۲۵.۹)
$E_k - E_{k,o} = W_{ext} + W_{int}$	(۳۵.۹)
$U - U_o = W_{ext}$	(۳۵.۹)
تعریفهای انرژی	

$$U = E_k + E_{p,int} \quad \text{انرژی خاص} \quad (۳۳.۹)$$

$$U_{int} = E_{k,CM} + E_{p,int} \quad \text{انرژی داخلی} \quad (۳۷.۹)$$

$$E = E_k + E_{p,int} + E_{p,ext} \quad \text{انرژی کل} \quad (۳۶.۹)$$

به دست می آید

$$E_{k,CM} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 v_{12}}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 v_{12}}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2$$

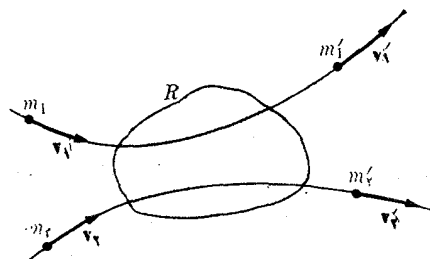
بنا بر این، چنانکه قبلاً نیز در مورد اندازه حرکت زاویه‌ای در مثال ۵.۹ به دست آوردیم، انرژی جنبشی داخلی یک دستگاه متشکل از دو ذره، معادل است با انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم برابر با جرم کاهیده که با سرعت نسبی v_{12} حرکت می‌کند. به عنوان مثال، انرژی داخلی یک اتم هیدروژن برابر است با $U_{int} = \mu_{ep} v_{ep}^2 / 2 + E_p(r_{ep})$ که در آن شاخصهای e و p به الکترون و پروتون اشاره دارند. نتایجی که در این مثال و مثال پیش به دست آوردیم، به سبب موارد استعمال متعدد آنها در فیزیک هسته‌ای و اتمی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

مهمترین رابطه‌هایی که تا اینجا در این فصل به دست آورده‌ایم، در جدول ۱۰.۹ فهرست شده‌اند. این رابطه‌ها به طور گسترده در کارهای عملی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۷.۹ برخورد

هنگامی که دو ذره به یکدیگر نزدیک می‌شوند، برهم کنش متقابل آنها حرکتشان را تغییر می‌دهد و بدین طریق یک تبادل انرژی و اندازه حرکت به وجود می‌آید. گوییم برخورد رخ داده است (اگر به جای دو ذره دو دستگاه ذرات نیز وجود داشته باشد بازهم همین اصطلاح را به کار می‌بریم). این تعریف الزاماً بدین معنی نیست که دو ذره (یا دودستگاه) به طور فیزیکی، به معنای میکروسکوپی، همانند آنچه برخورد ماکروسکوپی بین دو گوی بیلیارد یا دواتومبیل اتفاق می‌افتد، در تماس بوده‌اند. بلکه، به طور کلی بدین معنی است که هنگام نزدیک شدن دو ذره به یکدیگر، مثلاً در قسمت میانی شکل ۱۱.۹، برهم کنشی رخ داده است و در یک مدت نسبتاً کوتاه، تغییر قابل اندازه‌گیری در حرکت آنها به وجود می‌آید. به عنوان مثال، اگر یک الکترون یا یک پروتون به اتمی نزدیک شود، نیروهای الکتریکی وارد عمل می‌شوند و اختلال قابل ملاحظه‌ای در حرکت ذره‌ها پدید می‌آید. وقتی که مسیر یک ستاره دنباله‌دار در منظومه شمسی انحنا برمی‌دارد، باز هم می‌توان از برخورد گفتگو کرد. بعضی مواقع، در حالتی که ذرات (یا دستگاهها) برخورد کننده در ابتدا و انتها یکی باشند به جای برخورد اصطلاح پراکندگی^۲ را به کار می‌برند.

با وجود این، در بعضی از برخوردها، ذرات نهایی الزاماً با ذرات ابتدایی یکی نیستند. به عنوان مثال، در برخورد بین اتم A و مولکول BC ، نتیجه نهایی امکان دارد مولکول AB و اتم C باشد. در واقع، بسیاری واکنشهای شیمیایی بدین گونه صورت می‌گیرند. در آزمایش برخوردی که در آزمایشگاه صورت می‌گیرد، معمولاً حرکت ذرات قبل از برخورد به طور دقیق معلوم است، زیرا این حرکت به شیوه تدارک آزمایش بستگی دارند.



شکل ۱۱.۹. بقای اندازه حرکت و انرژی در یک برخورد

به عنوان مثال، یک ذره ممکن است الکترون و یا پروتونی باشد که در یک دستگاه شتاب دهنده الکتروستاتیکی شتاب گرفته است و ذره دیگر اتمی باشد که در آزمایشگاه عملاً در حال سکون است. در این صورت، ناظر نتیجه نهایی، یعنی حرکت را دوران ناحیه برخورد مشاهده می‌کند. اگر نیروهای وارد عمل بین ذرات معلوم باشند، می‌توان حالت نهایی را حساب کرد به شرطی که حالت اولیه نیز معلوم باشد. بنابراین، تجزیه و تحلیل چنین آزمایشهایی اطلاعات ارزنده‌ای در مورد برهم‌کنش بین ذرات برخورد کننده فراهم می‌آورد. این امر یکی از دلایلی است که چرا آزمایشهای برخورد برای فیزیکدانها چنین جالب توجه می‌باشند.

چون در هنگام برخورد تنها نیروهای داخلی وارد عمل می‌شوند، اندازه حرکت و انرژی هر دو ثابت باقی می‌مانند. فرض کنیم p_1 و p_2 اندازه حرکت ذره‌ها قبل از برخورد و p'_1 و p'_2 اندازه حرکت آنها بعد از برخورد باشد. بقای اندازه حرکت ایجاب می‌کند که

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad (39.9)$$

انرژی پتانسیل داخلی که قبل از برخورد برابر است با $E_{p,12}$ ، بعد از برخورد به سبب آرایش جدید داخلی، ممکن است تغییر کند، یعنی $E'_{p,12}$ شود، همچنین جرماً نیز الزاماً یکی نیستند. به عنوان مثال، دو ترون هسته‌ای است مرکب از یک نوترون و یک پروتون، و هنگام گذر از کنار یک هسته دیگر، احتمال دارد دو ترون به وسیله هسته دوم گیر بیفتد، به طوری که پروتون جدا بماند. در این صورت ذره‌های نهایی عبارتی می‌شوند از یک پروتون و یک هسته با یک نوترون اضافی.

بنابراین، مطابق معادله (۳۵.۹) اصل بقای انرژی چنین نوشته می‌شود:

$$E_k + E_{p,12} = E'_k + E'_{p,12}$$

که در آن، با توجه به معادله (۱۲.۸)، داریم

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$$

$$E'_k = \frac{1}{2} m'_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m'_2 v'^2_2 = \frac{p'^2_1}{2m'_1} + \frac{p'^2_2}{2m'_2} \quad (40.9)$$

کمیت Q را که با رابطه زیر تعریف می شود،

$$Q = E'_k - E_k = E_{p,12} - E'_{p,12} \quad (41.9)$$

وارد می کنیم، بنابراین Q برابر است با اختلاف انرژی جنبشی ابتدایی با نهایی، یا تفاضل انرژی پتانسیل داخلی نهایی و ابتدایی. اگر Q برابر صفر باشد، تغییر انرژی جنبشی وجود ندارد و برخورد را کشسان^۱ می نامند. در غیر این صورت، برخورد ناکشسان^۲ است. اگر $Q < 0$ باشد، انرژی جنبشی کاهش پیدا می کند، و به همان مقدار انرژی پتانسیل افزایش می یابد، و می گوئیم برخورد ناکشسان از نوع اول (یا انرژی گیر^۳) است. اگر $Q > 0$ باشد، انرژی جنبشی افزایش می یابد و به همان مقدار انرژی پتانسیل داخلی کاهش پیدا می کند، و می گوئیم برخورد ناکشسان از نوع دوم (یا انرژی ذی^۴) بوده است.

با وارد کردن معادله (۴۰.۹) در معادله (۴۱.۹) می توان نوشت

$$\frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + Q. \quad (42.9)$$

برای حل کامل مسایل برخورد، معادله های (۳۹.۹) و (۴۲.۹) کافی هستند.

اگر برخورد را نسبت به مرکز جرم حساب کنیم، بنا به معادله (۴.۹) اندازه حرکت کل برابر صفر است، یعنی $p_1 = -p_2$ و $p_1' = -p_2'$. پس می توان معادله (۴۲.۹) را ساده کرد:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1'^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1^2 + Q$$

یا با استفاده از معادله (۱۵.۹) که جرم کاهیده را تعریف می کند، به دست می آید

$$\frac{p_1'^2}{2\mu} = \frac{p_1^2}{2\mu} + Q \quad (43.9) \quad (\text{در چارچوب مرجع CM})$$

توجه داشته باشید که در این معادله نیز همان Q را به کار بردیم، زیرا بنا به تعریف در معادله (۴۱.۹)، Q به چارچوب مرجع بستگی ندارد. در یک برخورد همیشه بین دوزره تبادل اندازه حرکت صورت می گیرد ولی الزاماً همیشه با تبادل انرژی جنبشی همراه نیست. به عنوان مثال، اگر برخورد کشسان باشد ($Q = 0$) و ذره های نهایی همان ذره های ابتدایی باشند ($\mu = \mu'$)، از معادله (۴۳.۹) به دست می آید $p_1' = p_1$ و همچنین $p_2' = p_2$. بدین طریق در چارچوب CM، بزرگی اندازه حرکتها بعد از برخورد با اندازه حرکتهای قبل از برخورد برابرند و ذرات انرژی جنبشی خود را حفظ می کنند، به گونه ای که نسبت به چارچوب CM بین ذرات تبادل انرژی وجود ندارد. با این همه تبادل اندازه حرکت روی می دهد زیرا راستای حرکتها تغییر می کند.

مثال ۱۰.۹. در یک واکنش گیراندازی^۱ مقدار Q را به دست آورید.

1. elastic	2. inelastic	3. endoergic
4. exoergic	5. capture reaction	

حل: یکی از حالات بسیار جالب برخورد ناکشسان این است که دو ذره پس از برخورد توأمان به حرکت ادامه دهند. چنین فرایندی، در فیزیک هسته‌ای، واکنش گیراندازی نامیده می‌شود. به عنوان مثال، چنین حالتی هنگامی رخ می‌دهد که یک نوترون در برخورد با پروتون یک اتم هیدروژن گیر یفتد و یک هستهٔ دوترون به وجود بیاید. برخورد دیگری از این نوع، برخورد بین دو جسم پلاستیک است. در این حالت، دو ذره بعد از برخورد با سرعت مرکز جرم حرکت می‌کنند؛ یا، بنا به مثال ۴.۹،

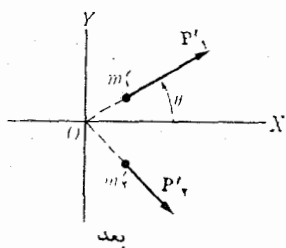
$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

بنابراین Q واکنش برابر است با

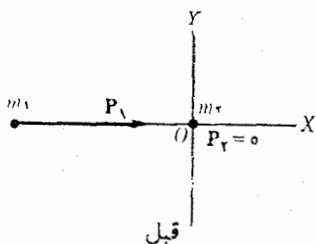
$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = -\frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \end{aligned}$$

در نتیجه Q منحصرأ به سرعت نسبی ذره‌ها قبل از برخورد بستگی دارد. آیا دانشجوی می‌تواند براساس نتیجهٔ مثال ۹.۹ به مقدار به دست آمده برای Q معنایی نسبت دهد؟

مثال ۱۱.۹. Q را برحسب انرژی جنبشی ذرات قبل و بعد از برخورد به دست آورید. فرض می‌کنیم که در آغاز m_1 دارای اندازه حرکت p_1 و m_2 ساکن است ($p_2 = 0$) (به شکل ۱۲.۹ مراجعه کنید). بعد از برخورد جرم ذره‌ها برابر با m'_1 و m'_2 می‌شود.



(ب)



(الف)

شکل ۱۲.۹. رابطهٔ بین اندازه حرکتها نسبت به چارچوب L ، قبل و بعد از برخورد

حل: از اصل بقای اندازه حرکت به دست می‌آید $p'_1 + p'_2 = p_1$ یا $p'_2 = p_1 - p'_1$. در نتیجه

$$p'^2_2 = (p_1 - p'_1)^2 = p^2_1 + p'^2_1 - 2p_1 p'_1 \cos \theta.$$

با استفاده از تعریف Q [معادلهٔ (۴۱.۹)]، داریم

$$Q = \frac{p_1'^2}{2m_1'} + \frac{p_2'^2}{2m_2'} - \frac{p_1^2}{2m_1}$$

$$= \frac{p_1'^2}{2m_1'} - \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{m_2'} (p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1 p_2' \cos \theta)$$

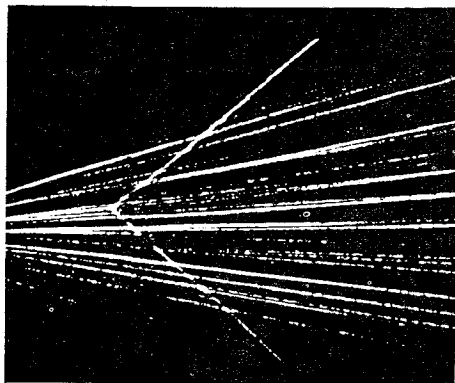
یا

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'} \right) p_1'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_2'} - \frac{1}{m_1} \right) p_1^2 - \frac{p_1 p_2'}{m_2'} \cos \theta.$$

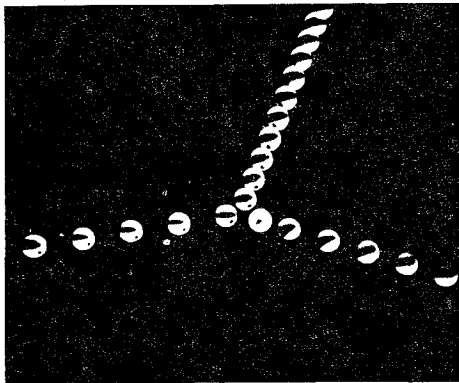
یادآوری می‌کنیم که $E_k = p^2/2m$ است، پس می‌توان نتیجه بالا را به صورت زیر نوشت:

$$Q = E_{k,1}' \left(1 + \frac{m_1'}{m_2'} \right) - E_{k,1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2'} \right) - \frac{2\sqrt{m_1 m_1' E_{k,1} E_{k,1}'}}{m_2'} \cos \theta.$$

این رابطه که به نام معادله Q شناخته شده است، در فیزیک هسته‌ای کاربرد بسیاری دارد. اگر برخورد کشسان ($Q=0$) و تمام ذرات مشابه باشند ($m_1 = m_2 = m_1' = m_2'$)، از اصل بقای انرژی داریم $p_1'^2 + p_2'^2 = p_1^2$ ، از اصل بقای اندازه حرکت داریم $p_1 = p_1' + p_2'$ ، از ترکیب این نتایج به دست می‌آید $p_1' \cdot p_2' = 0$ یا $p_1' \perp p_2'$ عمود است. بنابراین در چارچوب L ، دو ذره بعد از برخورد با زاویه 90° نسبت به هم حرکت می‌کنند. شکل ۱۳.۹ (الف) این موضوع را در برخورد دوگوی بیلیارد که یکی از آنها در آغاز ساکن بوده نشان می‌دهد. شکل ۱۳.۹ (ب) برخورد دو هسته هلیوم را در یک اتاقک ابر^۲ نشان می‌دهد. هسته هلیوم



(ب)



(الف)

شکل ۱۳.۹. (الف) برخورد بین دو گوی بیلیارد مشابه. (ب) برخورد بین دو ذره α (هسته هلیوم). در هر دو مورد، یکی از ذره‌ها در آغاز نسبت به دستگاه چوب L ساکن است و بعد از برخورد اندازه حرکت آنها با هم زاویه 90° می‌سازند. [قسمت (الف) با اجازه Educational Services, Inc.]

ورودی یک ذره α از یک ماده رادیو اکتیو و هسته هلیوم هدف جزو گاز در داخل اتاقک می باشد. در هر دو مورد فوق، دو ذره بعد از برخورد با زاویه 90° از یکدیگر دور می شوند. مثال ۱۲.۹. نارنجکی که در چارچوب L ساکن است پس از انفجار به دو قطعه تقسیم می شود. انرژی قطعه ها را بر حسب Q پیدا کنید.

حل: چون نارنجک در ابتدا ساکن است، اندازه حرکت کل برابر صفر می باشد. بعد از انفجار، دو قطعه در یک راستا ولی در دو سوی مخالف با اندازه حرکت های p_1 و p_2 از هم جدا می شوند، به گونه ای که $p_1 + p_2 = 0$ ، یا از لحاظ مقدار عددی $p_1 = -p_2$ شود. در این صورت بنا به معادله (۴۱.۹)، با $p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 = E'_k = 0 = E_k$ داریم

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1^2 = Q \quad \text{یا} \quad p_1 = p_2 = (2\mu Q)^{1/2}.$$



شکل ۱۴.۹. عکس از رد دو قطعه حاصل از شکافت یک هسته اورانیوم در اتاقک ابر. [Boggild, Brostrom, and Lauritsen *Phys. Rev.* 59, 275 (1941)]

در آغاز هسته اورانیوم در یک ورقه افقی نازک فلزی در مرکز عکس قرار داشته است. دو قطعه در دو سوی مخالف حرکت می کنند. پس از تجزیه و تحلیل مسیرها، می توان انرژی هر قطعه را برآورد کرد، که به نوبه خود (با استفاده از رابطه به دست آمده در مثال ۱۲.۹) امکان می دهد نسبت جرم آنها را به دست آوریم. اثر نوترونهای آزاد شده نادیده گرفته شده است.

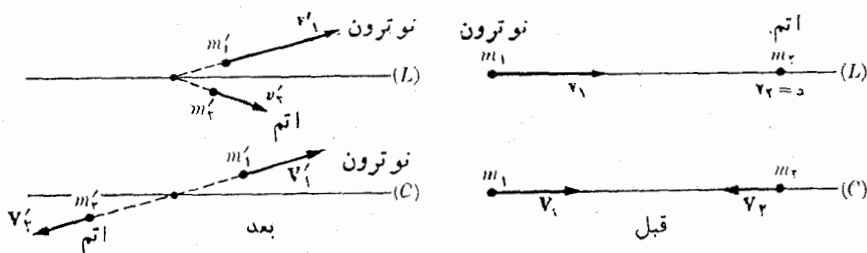
انرژی جنبشی قطعه‌ها عبارتند از

$$E_{k,1} = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{m_2 Q}{m_1 + m_2}, \quad E_{k,2} = \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{m_1 Q}{m_1 + m_2}$$

که متناسب با عکس جرمهایشان می‌باشد. این تجزیه و تحلیل را می‌توان در مورد پس زدن (لگد زدن) یک سلاح آتشین (به مثال ۱۰۷ مراجعه کنید)، شکافت یک هسته به دو قطعه (نمایش داده شده در شکل ۱۴۰۹)، یا تجزیه یک مولکول دو اتمی نیز به کار برد.

اگر به جای دو قطعه سه قطعه وجود داشته باشد، چندین راه حل ممکن در اختیار خواهد بود، زیرا سه اندازه حرکت وارد عمل می‌شوند، ولی تنها دو شرط فیزیکی وجود دارد: اصل بقای انرژی و اندازه حرکت. به عنوان مثال، اگر در یک واکنش ذره ای فقط دو ذره مشاهده شوند و بقای انرژی و اندازه حرکت نقض شود فیزیکدان وجود ذره سوم را که (یا به دلیل نداشتن بار الکتریکی، یا به دلایل دیگر) مشاهده نشده است، حدس می‌زند. البته برخی ملاحظات نظری نیز وجود دارند که به او امکان می‌دهند مواردی را که در آن سه ذره در فرایند وارد می‌شوند تشخیص دهد (به مسئله ۷۰۰۹ مراجعه کنید). در این صورت فیزیکدان به ذره سوم فرضی خود اندازه حرکت و انرژی مشخصی را نسبت می‌دهد تا اصل بقا دست نخورده باقی بماند. این شیوه تا کنون به نتایجی منجر شده است که هم با نظریه و هم با تجربه سازگار بوده‌اند.

مثال ۱۳۰۹. مهارا (کند شدن) نوترونهایی را که در درون ماده‌ای حرکت می‌کنند و با اتمهای آن برخورد کشسان دارند بررسی کنید. در جابجایی نوترون در داخل ماده اتمها را ساکن در نظر بگیرید (ماده را مهارگر می‌نامند). در رآکتورهای هسته‌ای، نوترونهای سریع حاصل از شکافت اورانیوم با گذشتن از داخل یک مهارگر کند می‌شوند.



(ب)

(الف)

شکل ۱۵۰۹. مقایسه داده‌ها در چارچوبهای C و L در یک برخورد

حل: در این مورد ذره‌ها قبل و بعد از برخورد یکی هستند، و $m_1 = m_1'$ و $m_2 = m_2'$. همچنین داریم $p_2 = 0$ و $Q = 0$. محاسبه در چارچوب C آسانتر است (شکل ۱۵۰۹). فرض کنیم $A = m_2/m_1$ نسبت جرم اتمهای مهارگر به جرم نوترون، v_1 سرعت نوترونهای

و V_0 (برابر صفر) سرعت آنها باشد. بنا به معادله (۱۰۹) قبل از برخورد سرعت مرکز جرم برابر است با

$$V_{CM} = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} = \frac{V_1}{1 + A}$$

سرعت هر ذره قبل از برخورد، در چارچوب CM برابر است با

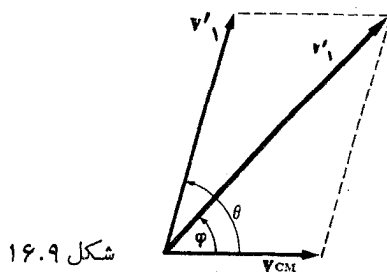
$$V_1 = V_1 - V_{CM} = \frac{AV_1}{1 + A}, \quad V_2 = 0 - V_{CM} = -\frac{V_1}{1 + A}. \quad (۴۴.۹)$$

نظر به اینکه برخورد کشسان است و در آن ذرات هویت خود را حفظ می‌کنند، بنا به توضیحاتی که به دنبال معادله (۴۲.۹) آمد، در چارچوب CM داریم $p_1 = p'_1$ و در نتیجه $V_1 = V'_1$ به گفته دیگر، بزرگی سرعت m_1 در چارچوب CM قبل و بعد از برخورد یکی است. همچنین داریم $V_2 = V'_2$. بنا وجود این در چارچوب مرکز جرم، راستا و سوی حرکت بعد از برخورد ممکن است فرق کند (به شکل ۱۵.۹ مراجعه کنید). پس، در چارچوب L سرعت نوترون پس از برخورد برابر است با

$$v'_1 = V'_1 + v_{CM}$$

به گونه‌ای که، بنا به شکل ۱۶.۹، داریم

$$v'^2_1 = V'^2_1 + v^2_{CM} + 2V'_1 \cdot v_{CM} = V'^2_1 + v^2_{CM} + 2V'_1 v_{CM} \cos \varphi.$$



شکل ۱۶.۹

با استفاده از معادلات (۴۴.۹) و با توجه به اینکه $V'_1 = V_1$ است، به دست می‌آید

$$v'^2_1 = v^2_1 \frac{A^2 + 2A \cos \varphi + 1}{(A + 1)^2}$$

در این صورت، بین انرژی جنبشی m_1 قبل و بعد از برخورد، در چارچوب L، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{E'_{k,1}}{E_{k,1}} = \frac{v'^2_1}{v^2_1} = \frac{A^2 + 2A \cos \varphi + 1}{(A + 1)^2}$$

به ازای $\varphi = 0$ (برخورد بدون تغییر راستا و سو)، $E'_{k,1} = E_{k,1}$ است و هیچ‌گونه اتلاف

انرژی جنبشی وجود ندارد. به ازای $\varphi = \pi$ ، یا برخورد رودررو، حداکثر اتلاف انرژی وجود دارد:

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{A^2 - 2A + 1}{(A + 1)^2} = \left(\frac{A - 1}{A + 1}\right)^2.$$

در این حالت اتلاف نسبی انرژی برابر است با

$$\frac{E_k - E'_k}{E_k} = \frac{4A}{(A + 1)^2}.$$

هر چه A به یک نزدیکتر باشد اتلاف انرژی بیشتر است. این نتیجه هنگام انتخاب مهارگری که بتواند خیلی سریع نوترون‌ها را کند کند بسیار اهمیت دارد، کاری که اغلب در راکتورهای هسته‌ای صورت می‌گیرد. اتمهایی که نسبت به نوترون دارای کمترین A هستند اتمهای هیدروژن می‌باشند ($A \cong 1$)، و به همین دلیل انتظار می‌رود هیدروژن خالص بهترین مهارگر باشد. ولی هیدروژن خالص حتی در دماهای معمولی نیز به صورت گاز است و تعداد اتمهای آن در واحد حجم نسبتاً کم است. بنابراین به جای هیدروژن از آب استفاده می‌کنند. برتری استفاده از آب تنها این نیست که به وفور در دسترس می‌باشد، بلکه در واحد حجم در حدود 10^3 بار بیشتر از هیدروژن خالص گازی شکل، اتم دارد. متأسفانه اتمهای هیدروژن تمایل دارند که نوترون‌ها را گیربندازند و دوتریوم تشکیل دهند. ولی، چون اتمهای دوتریوم کشش کمتری برای گیراندازی نوترون‌ها دارند، در بعضی راکتورهای هسته‌ای از آب سنگین^۱ استفاده می‌شود، که مولکولهای آن از دوتریوم (به جای هیدروژن) و اکسیژن تشکیل شده‌اند. (در این مورد $A = 2$ است). یک مهارگر رایج دیگر کربن ($A = 12$) است که به صورت گرافیت از آن استفاده می‌شود.

II دستگاههای با تعداد زیادی ذره

۸.۹ دستگاههای چند ذره‌ای: دما

اگر بخواهند نتیجه بیان شده با معادله (۳۵.۹)، یا هم‌ارز آن، قانون بقای انرژی را در مورد دستگاهی متشکل از تعداد کمی ذره، مانند منظومه شمسی یا یک اتم با چند الکترون، به کار ببرند، کافی است مطابق معادله (۳۴.۹)، تک تک جمله‌هایی که انرژی داخلی را می‌سازند، حساب کنند. ولی هنگامی که تعداد ذرات خیلی زیاد باشد، مانند اتمی که دارای الکترونهای زیادی است، یا گازی که از میلیاردها مولکول تشکیل شده است، مسئله از لحاظ ریاضی بسیار پیچیده می‌شود. بنابراین باید به جای محاسبه یکایک مقادیر دقیق عناصر تشکیل دهنده دستگاه، با بعضی روشهای آماری مقدار میانگین کمیت‌های دینامیکی را حساب کرد. از این گذشته، در چنین دستگاههای پیچیده‌ای، چگونگی رفتار هریک از اجزاء

پتنهایی برای ما جالب توجه نیست (زیرا به طور کلی چنین امری قابل مشاهده نیست)، بلکه بیشتر رفتار دستگاه به عنوان یک کل برای ما مطرح است. تکنیک ریاضی مربوط به مطالعه این دستگاهها مکانیک آمادی^۱ نام دارد. اگر ساختار داخلی دستگاه را نادیده بگیریم و تنها با به کار بردن مقادیر U و W که به طور تجربی اندازه گیری شده اند، از معادله (۳۵.۹) استفاده کنیم، یک شاخه دیگر فیزیک، به نام ترمودینامیک را به کار برده ایم. در این فصل، برای دستگاههای متشکل از ذرات زیاد، تنها به معادله (۳۵.۹) اکتفا می کنیم، بدون آنکه وارد بحث روشهای مکانیک آماری یا ترمودینامیک بشویم. همچنین، جز در مواردی که متذکر می شویم، کلیه کمیتهای دینامیکی را نسبت به چارچوب مرکز جرم دستگاه مورد نظر بیان خواهیم کرد.

ابتدا به تعریف T ، دمای دستگاه، به عنوان یک کمیت مربوط به انرژی جنبشی میانگین ذرات در چارچوب مرجع CM می پردازیم. بنا بر این دما مستقل از حرکت دستگاه نسبت به ناظر تعریف می شود. انرژی جنبشی میانگین یک ذره برابر است با

$$E_{k,ave} = \frac{1}{N} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \quad (45.9)$$

که در آن N تعداد کل ذرات و v_i سرعت ذره در چارچوب مرجع CM است. اگر جرم تمام ذرات یکسان باشد، داریم

$$E_{k,ave} = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{N} \sum_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} m (v^2)_{ave} = \frac{1}{2} m v_{rms}^2$$

که در آن v_{rms} «سرعت ریشه میانگین مربعی ذرات» است و با رابطه زیر تعریف می شود:

$$v_{rms}^2 = (v^2)_{ave} = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots) = \frac{1}{N} (\sum_i v_i^2).$$

در اینجا نیازی به مشخص کردن رابطه دقیق بین دما و انرژی جنبشی میانگین نیست. در شرایط فعلی کافی است فرض کنیم که با دانستن انرژی جنبشی میانگین ذرات در یک دستگاه، می توان دما را حساب کرد، و برعکس. بدین طریق می توان از دمای یک جامد یک گاز و حتی یک هسته مرکب گفتگو کرد.

این امر که برای تعریف دما، حرکتها را نسبت به مرکز جرم ارزیابی می کنیم بسیار مهم است. یک گلوله فلزی «گرم» ساکن در آزمایشگاه و یک گلوله فلزی «سرد» را که نسبت به آزمایشگاه با سرعت زیادی حرکت می کند در نظر بگیرید. دمای گلوله گرم بالا است، به این معنی که نسبت به مرکز جرمش، که در این مورد در آزمایشگاه ساکن است، انرژی جنبشی بیشتری دارد. از طرف دیگر، گلوله «سرد» دمای پائینتر است، بنابراین نسبت به مرکز جرم خود انرژی جنبشی کمتری دارد، که در وضع حاضر با سرعت زیادی نسبت به ناظر در حرکت است. ممکن است انرژی جنبشی کل گلوله «سرد» که با سرعت زیادی حرکت می کند نسبت به آزمایشگاه خیلی بیشتر از گلوله «گرم» ساکن باشد، ولی بیشترین بخش این انرژی انتقالی است که در دما دخالت ندارد.

درمورد دستگاهی که در تمام نقاط آن دما یکسان است، یعنی انرژی جنبشی میانگین مولکولها در هر ناحیه‌ای از دستگاه یکی است، می‌گوییم در تعادل (ترازندی) گرمایی^۱ است. در یک دستگاه منزوی، که انرژی داخلی کل آن ثابت است، اگر انرژی جنبشی داخلی تغییر کند دمای آن نیز ممکن است، به سبب تغییر انرژی پتانسیل داخلی، تغییر کند. به عنوان مثال، ممکن است در فضای بین ستارگان توده‌ای از گاز بر اثر نیروهای جاذبه خیلی قوی متراکم شود، این امر موجب کاهش انرژی پتانسیل داخلی و همزمان افزایش انرژی جنبشی می‌گردد، در نتیجه دمای آن باید افزایش یابد. از طرف دیگر، اگر دستگاه منبسط شود، انرژی پتانسیل داخلی آن افزایش می‌یابد (اگر نیروها جاذبه باشند)، و این امر موجب کاهش انرژی جنبشی و بالاخره کاهش دما می‌گردد. اگر انرژی پتانسیل داخلی یک دستگاه منزوی ثابت باقی بماند، (گاز داخل یک ظرف بسته چنین وضعی دارد) انرژی جنبشی میانگین دستگاه نیز ثابت باقی می‌ماند، یعنی دمای آن تغییر نمی‌کند. ولی اگر دستگاه منزوی نباشد، می‌تواند با بقیه جهان تبادل انرژی کند، این امر موجب تغییر انرژی جنبشی داخلی و در نتیجه تغییر دمای آن شود.

دما باید برحسب «ژول بر ذره» بیان شود. با وجود این معمول شده است که آن را برحسب درجه بیان کنند. مقیاسی که در فیزیک برای دما به کار می‌رود مقیاس مطلق است. یکای مقیاس مطلق درجه کلوین^۲ نام دارد و با علامت °K نشان داده می‌شود. در این مقیاس، دمای ذوب یخ در فشار متعارفی جو برابر 273.15°K و دمای جوش آب در همین فشار برابر 373.15°K است. بنا بر این اختلاف این دو دما برابر است با 100°K . دمای سانتیگراد یا سلسیوس^۳ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_c = T - 273.15^\circ\text{K}.$$

یک درجه کلوین در حدود 1.38×10^{-23} (یا $1.38 \times 10^{-4} \text{ eV}$) بر ذره است.

۹.۹ دستگاهای چند ذره‌ای: کار

تبادل انرژی یک دستگاه با جهان خارج، در معادله (۳۵.۹) با کار خارجی W_{ext} نشان داده شده است:

$$U - U_0 = W_{\text{ext}}.$$

اگر دوی دستگاه کار انجام بگیرد (W_{ext} مثبت)، انرژی داخلی آن افزایش می‌یابد، ولی اگر دستگاه کار انجام دهد (W_{ext} منفی) انرژی داخلی کاهش می‌یابد. این کار خارجی مجموع کارهای خارجی است که روی تک تک ذرات دستگاه انجام می‌گیرد، ولی بعضی اوقات می‌توان آن را با سانی از طریق آماری حساب کرد.

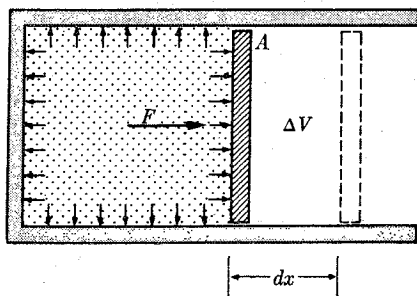
به عنوان مثال، گاز داخل استوانه‌ای را که یکی از جدارهای آن یک پیستون متحرک

1. thermal equilibrium 2. degree Kelvin

3. centigrade or Celsius

است در نظر بگیرید (شکل ۱۷.۹). گاز می تواند از طریق برخورد و برهم کنش مولکولهایش با مولکولهای دیواره های استوانه، با محیط خارج انرژی و اندازه حرکت مبادله کند. تبادل اندازه حرکت با نیروی وارد از طرف هریک از مولکولها در محل برخورد با جدار ظرف نشان داده می شود. این نیروهای انفرادی در هر نقطه دائماً افت و خیز دارند، ولی چون تعداد زیادی برخورد روی یک سطح وسیع صورت می گیرد، می توان اثر کلی آنها را با یک نیروی میانگین F که بر تمام سطح وارد می شود نشان داد. اگر A مساحت و p فشار گاز، که به صورت نیروی میانگین وارد بر واحد سطح تعریف می شود (به مثال ۲.۹ مراجعه کنید) باشد، در این صورت داریم

$$F = pA \quad \text{یا} \quad p = F/A \quad (۴۶.۹)$$



شکل ۱۷.۹. کار انجام یافته در انبساط یک گاز

اگر یکی از جدارهای ظرف متحرک باشد، مانند شکل ۱۷.۹، نیروی وارد از طرف گاز می تواند جدار را به اندازه dx جابجا کند. بنابراین تبادل انرژی بین دستگاه با محیط خارج را می توان با کاری که نیرو در مدت این جابجایی انجام می دهد بیان کرد. چون این کاری است که توسط دستگاه انجام می شود نه اینکه روی دستگاه انجام می گیرد، باید آن را منفی در نظر گرفت. بنابراین

$$dW_{\text{ext}} = -Fdx = -pAdx = -pdV \quad (۴۷.۹)$$

که در آن $dV = Adx$ نمایش تغییر حجم گاز است. اگر حجم از V_0 به V تغییر کند، کاری که روی دستگاه انجام می شود برابر خواهد بود با

$$W_{\text{ext}} = - \int_{V_0}^V p dV. \quad (۴۸.۹)$$

برای محاسبه این انتگرال، باید رابطه بین p و V معلوم باشد. این رابطه برای گازها و سایر مواد بتفصیل مورد مطالعه قرار گرفته است.

اغلب اوقات، بویژه در بررسی ماشینهای گرمایی، بهتر است به جای کاری که دستگاه از خارج می گیرد یعنی W_{ext} ، کاری که دستگاه به خارج می دهد، W_{sys} ، محاسبه شود. چون هر دو کار به یک جابجایی واحد ولی به نیروهای برابر در سوهای مخالف مربوط می شوند،

از لحاظ قدر مطلق با هم برابرند ولی علامتشان مختلف است. به گفته دیگر
 $W_{\text{syst}} = -W_{\text{ext}}$. به عنوان مثال، کار حاصل از انبساط یک گاز با استفاده از معادله
 (۴۸.۹) برابر است با

$$W_{\text{syst}} = \int_{V_0}^V p dV. \quad (49.9)$$

اکنون یکاهای معمولی فشار را تعریف می‌کنیم. ابتدا یادآور می‌شویم که فشار را باید برحسب یک یکای نیرو تقسیم بر یک یکای سطح بیان کرد. از این رو در دستگاه یکاهای MKSC فشار برحسب نیوتون بر متر مربع یا Nm^{-2} بیان می‌شود. یکای دیگری که به فراوانی به کار می‌رود دین بر سانتی‌متر مربع یا dyn cm^{-2} است. یکای بسیار مفید دیگر که بیشتر برای فشار گازها به کار می‌رود اتمسفر با علامت اختصاری atm است که با توجه به هم‌ارزیهای زیر تعریف می‌شود:

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2} = 14.7 \text{ lbf in}^{-2}.$$

یک اتمسفر تقریباً معادل فشار متعارفی جو زمین است که بر هر جسم واقع در سطح دریا وارد می‌شود.

مثال ۱۴.۹. گازی در فشار $2 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ حجمی برابر با 30 m^3 را اشغال می‌کند. در فشار ثابت، حجم تا 45 m^3 را افزایش می‌یابد. کار انجام یافته به وسیله گاز چقدر است؟

حل: از معادله (۴۹.۹) استفاده می‌کنیم؛ اگر فشار p ثابت بماند، داریم

$$W_{\text{syst}} = \int_{V_0}^V p dV = p \int_{V_0}^V dV = p(V - V_0). \quad (50.9)$$

این نتیجه بسیار کلی است و در هر دستگاهی که در فشار ثابت حجم آن تغییر کند به کار می‌رود. با وارد کردن مقادیر عددی مورد نظر به دست می‌آید $W_{\text{syst}} = 3 \times 10^4$.

مثال ۱۵.۹. گازی به گونه‌ای انبساط پیدا می‌کند که در آن حاصل ضرب pV برابر مقدار ثابت C باقی می‌ماند. این رابطه [به معادله (۶۲.۹)] و مسئله ۶۷.۹ مراجعه کنید] که قانون بویل نام دارد* ایجاب می‌کند که دمای گاز ثابت بماند. هنگامی که حجم از V_1 تا V_2 افزایش می‌یابد کار انجام یافته چقدر است؟

حل: با به کار بردن معادله (۴۹.۹) به دست می‌آید

$$W_{\text{syst}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} C \frac{dV}{V} = C \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (51.9)$$

بنابراین کار انجام یافته به نسبت دو حجم، V_2/V_1 ، (به نام نسبت انبساط^۲) بستگی دارد.

1. Boyle's law

* این قانون در کتابهای فارسی به قانون بویل - ماریوت معروف است (م).

2. expansion ratio

در ساختمان موتورهای احتراق داخلی (درون سوز) نسبت تراکم (یا انبساط)، یکی از سازه‌های تعیین کننده توان موتور است.

۱۰.۹ دستگاههای چند ذره‌ای : گرما

لازم است به خاطر بسپاریم معادله (۴۸.۹) بیان کننده یک میانگین ماکروسکوپیست است که برابر مجموع تمام تبادلهای انرژی انفرادی بین مولکولهای گاز و مولکولهای پیستون می-باشد. ولی چگونه می توان تبادل انرژی مربوط به برهم کنشهای مولکولهای گاز و جدارهایی را که حرکت نمی کنند حساب کرد؟ در این حالت نمی توان روشی را که برای به دست آوردن W برای پیستون به کار رفت مورد استفاده قرار داد، زیرا، هر چند می توان نیروی میانگینی را تعریف کرد که روی جدار اثر می کند ولی نمی توان یک جابجایی میانگین برای جدار در نظر گرفت. در هر یک از برهم کنشهای بین مولکولهای گاز و جدار، یک نیروی ضعیف وارد عمل می شود و موجب جابجایی جزئی مولکولهای جدار می گردد. اگر می توانستیم تمامی این کارهای بینهایت کوچک را محاسبه و با هم جمع کنیم قادر می شدیم کار خارجی مربوط را که به وسیله دستگاه انجام می گیرد، به دست آوریم. بدیهی است یک چنین روشی، به دلیل سازه‌های زیادی که باید در نظر گرفته شود، عملاً غیرمقدور است. از این رو یک مفهوم جدید ماکروسکوپیست یا آماری به نام گرما تعریف می کنیم.

مقدار میانگین کار خارجی یا انرژی مبادله شده بین یک دستگاه و محیط اطرافش — که ناشی از تبادلهای انرژی انفرادی است که از برخورد بین مولکولهای دستگاه و مولکولهای محیط خارج نتیجه می شود و نمی توان آن را به طور ماکروسکوپیست به صورت حاصل ضرب یک نیرو در یک جابجایی بیان کرد — گرما نامیده می شود و آن را با نماد Q نشان می دهند. بنابراین Q مجموع تعداد خیلی زیادی از کارهای جزئی انفرادی است که نمی توان آنها را به صورت حاصل ضرب یک نیروی میانگین در یک جابجایی میانگین بیان کرد.

هرگاه Q مربوط به یک کار خارجی خالص باشد که روی دستگاه انجام می شود آن را مثبت در نظر می گیرند و اگر هم ارز با یک کار خارجی خالص باشد که به وسیله دستگاه انجام می شود، آن را منفی منظور می کنند. در حالت اول گویند گرما جذب دستگاه شده است و در حالت دوم گویند گرما توسط دستگاه تولید شده است.

چون گرما با کار متناظر است باید آن را بر حسب ژول بیان کرد. با این حال، گاهی گرما با یکایی به نام کالری بیان می شود، که تعریف آن در سال ۱۹۴۸ (۱۳۲۷ ه.ش.) به این صورت مورد پذیرش قرار گرفت: $1 \text{ کالری} = 4.184 \text{ ژول}$. نخستین بار کالری هنگامی که هنوز ماهیت گرما شناخته نشده بود به عنوان یکای گرما معرفی شد. در واقع، کالری یکای دیگری برای اندازه گیری کار و انرژی است و منحصر به گرما نمی شود.

در همین جا باید به دانشجو خاطر نشان کنیم که مبدا گرما را شکل جدید یا متفاوتی از انرژی در نظر بگیرد. گرما فقط نامی است که به شکل ویژه ای از کار یا انتقال انرژی داده شده است، که در آن تعداد زیادی از ذرات شرکت دارند. قبل از اینکه مفهوم برهم کنشها

و ساختار اتمی ماده به طور روشن فهمیده شود، فیزیکدانها انرژی را به دو گروه دسته‌بندی کرده بودند: انرژی مکانیکی، که به انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی مربوط می‌شد، و انرژی غیرمکانیکی که به گرما، انرژی شیمیایی، انرژی الکتریکی، تابش و غیره تقسیم می‌شده است. امروزه دیگر این تقسیم‌بندی درستی خود را از دست داده است. فیزیکدانها انرژی بجز جنبشی و پتانسیل نمی‌شناسند. انرژی اخیر بسته به ماهیت برهم‌کنشهای فیزیکی مربوط، با روابط مختلف بیان می‌شود. از طرف دیگر، گرما و تابش بیان دو سازوکار انتقال انرژی هستند. «انرژی شیمیایی» فقط یک اصطلاح ماکروسکوپیست که جهت تشریح انرژی وابسته به برهم‌کنشهای الکتریکی در اتمها و مولکولها به کار می‌رود. این انرژی در فرایندهای شیمیایی یعنی تجدید آرایش اتمی مولکولها پدیدار می‌شود.

هنگامی که هیچگونه تبادل انرژی (به صورت گرما) بین دو دستگاه وجود نداشته باشد، می‌گوییم آن دو دستگاه در تعادل گرمایی هستند. این یک تعریف آماری است، زیرا مولکولها به طور انفرادی می‌توانند انرژی مبادله کنند، ولی به طور متوسط، مقدار انرژی مبادله شده در یک جهت با جهت دیگر یکسان است. برای اینکه بین دو دستگاه تعادل گرمایی به وجود آید، باید انرژی جنبشی مولکولی میانگین دو دستگاه که با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند یکسان باشد، به گونه‌ای که هیچگونه تبادل انرژی جنبشی از طریق برخورد مولکولها ممکن نباشد. در نتیجه، به دنبال تعریف موقتی که در بخش ۸.۹ از ما داده شد، می‌توان گفت

دو دستگاه در تعادل گرمایی، باید دارای دمای یکسانی باشند.

همچنین می‌توان نتیجه گرفت که تبادل انرژی به صورت گرما ممکن نیست، مگر اینکه دمای دو دستگاه مختلف باشند.

۱۱.۹ فرمول بندی مجدد اصل بقای انرژی برای دستگاههای چند ذره‌ای

در دو بخش قبل دیدیم که اگر با دستگاههایی سروکار داشته باشیم که دارای تعداد زیادی ذره هستند، کار خارجی کل را باید به صورت مجموع دو کمیت $Q + W_{\text{ext}}$ بیان کنیم. در اینجا W_{ext} معرف کار خارجی قابل محاسبه به صورت حاصل ضرب یک نیروی میانگین در یک جابجایی است که در بخش ۹.۹ مطالعه شد، و Q ، بنابر آنچه در بخش ۱۰.۹ دیدیم، نمایش کار خارجی است که باید به صورت گرما بیان شود. در این صورت، می‌توان معادله (۳۵.۹) برای اصل بقای انرژی را به این صورت نوشت:

$$U - U_0 = Q + W_{\text{ext}} \quad (52.9)$$

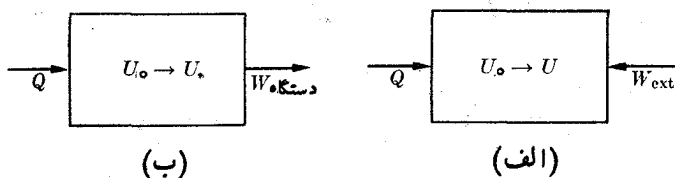
این رابطه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

تغییر انرژی داخلی یک دستگاه برابر است با مجموع گرمای جذب شده به وسیله دستگاه و کار خارجی که روی آن انجام شده است.

معادله (۵۲.۹) را به صورت تصویری در شکل ۱۸.۹ (الف) می توان دید: گرمای Q به وسیله دستگاه جذب و کار W_{ext} دوی دستگاه انجام می شود. مجموع آنها $Q + W_{\text{ext}}$ به صورت انرژی داخلی $U - U_0$ در دستگاه ذخیره می شود. گاهی، بویژه در کاربردهای صنعتی، به جای نوشتن کار خارجی W_{ext} انجام شده دوی دستگاه، کار خارجی W_{syst} انجام شده را می نویسند، که همان طور که قبلاً شرح دادیم، برابر است با کار انجام شده دوی دستگاه با علامت منفی. با قراردادن $W_{\text{ext}} = -W_{\text{syst}}$ به جای معادله (۵۲.۹) داریم

$$U - U_0 = Q - W_{\text{syst}} \quad (۵۳.۹)$$

معادله (۵۳.۹) در شکل ۱۸.۹ (ب) نشان داده شده است: گرمای Q به وسیله دستگاه جذب می شود، کار W_{syst} به وسیله دستگاه انجام می شود و تفاضل $Q - W_{\text{syst}}$ به صورت انرژی داخلی $U - U_0$ در دستگاه ذخیره می شود.



شکل ۱۸.۹. رابطه بین گرما، کار و انرژی داخلی

بیانهای مربوط به معادلات (۵۲.۹) و (۵۳.۹) قانون اول ترمودینامیک را تشکیل می دهند، که همان قانون بقای انرژی است که در مورد دستگاههای با تعداد زیاد ذره به کار می رود. جهت سهولت بیشتر، کار خارجی به دو جمله آماری تقسیم می شود، که یکی را بازم کار و دیگری را گرما می نامند. نظر به اینکه در این فصل به قدر کافی درباره مفاهیم گرما و دما، به گونه ای که در فصلهای بعدی به کار خواهند رفت، گفتگو کردیم، فعلاً بررسی ترمودینامیک را بیش از این ادامه نمی دهیم.

۱۲.۹ قضیه ویریال برای چند ذره

در این بخش می خواهیم قضیه ویریال را، که در بخش ۱۳.۸ در مورد یک ذره تنها بیان شد، برای یک دستگاه چندذره ای تعمیم دهیم. این شکل جدید قضیه ویریال را می توان در مطالعه خواص میانگین یا آماری دستگاههای متشکل از تعداد زیادی ذره و بالاخص گازها به کار گرفت.*

برای سهولت، ابتدا دستگاهی را در نظر می گیریم که از دو ذره m_1 و m_2 تشکیل شده است. کمیت اسکالری به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A = m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (۵۴.۹)$$

* برای مطالعه کاربردهای مقدماتی قضیه ویریال در مسائلی شیمی، رجوع کنید به

این رابطه فقط بسط کمیت A است که برای یک ذره واحد تعریف کردیم. با مشتق‌گیری از A نسبت به t ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dA}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_1 + m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \cdot \mathbf{r}_2 + m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

یا چون

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$$

است، داریم

$$\frac{dA}{dt} = (m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_2) + (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2).$$

جمله آخر سمت راست، بنا به معادله (۲۹.۹) دو برابر E_k ، انرژی جنبشی دستگاه است. پس می‌توان نوشت

$$\frac{dA}{dt} = 2E_k + (m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_2).$$

با استفاده از معادله (۲۶.۹) و با توجه به اینکه $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ و $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}$ است، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_2 &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) \cdot \mathbf{r}_1 + (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) \cdot \mathbf{r}_2 \\ &= \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} \end{aligned}$$

بالاخره dt/dA به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dA}{dt} = 2E_k + (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12}) = 2E_k + B$$

که در آن، جهت ساده نویسی، عبارت داخل پرانتز را با B نشان داده‌ایم. از رابطه فوق نسبت به زمان میانگین می‌گیریم؛ داریم

$$\left[\frac{dA}{dt} \right]_{\text{ave}} = 2E_{k, \text{ave}} + B_{\text{ave}}.$$

با یادآوری تعریف میانگین زمانی که دربخش ۱۳.۸ داده شد و نتیجه‌ای که با معادله (۴۶.۸) بیان شد، از نو به دست می‌آید

$$\left[\frac{dA}{dt} \right]_{\text{ave}} = \frac{A - A_0}{\tau}.$$

اگر زمان τ خیلی بزرگ باشد و A با زمان تا بینهایت بزرگ نشود، کمیت $(A - A_0)/\tau$ را می‌توان به قدری کوچک کرد که برابر صفر گردد. این وضع درمورد یک دستگاه مقید شده، مانند گازی که در ظرفی قرار دارد، رخ می‌دهد، زیرا در این صورت $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و همچنین

v_1 و v_2 در معادله (۵۴.۹) نمی‌توانند تا بینهایت افزایش پیدا کنند. در نتیجه با قرار دادن $[dA/dt]_{ave} = 0$ در معادله (۵۵.۹)، درمی‌یابیم

$$2E_{k, ave} = -B_{ave} = -(F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + F_{12} \cdot r_{12})_{ave}$$

اگر به جای دو ذره چندین ذره وجود داشته باشند، می‌توان این معادله را تعمیم داد و به صورت زیر نوشت:

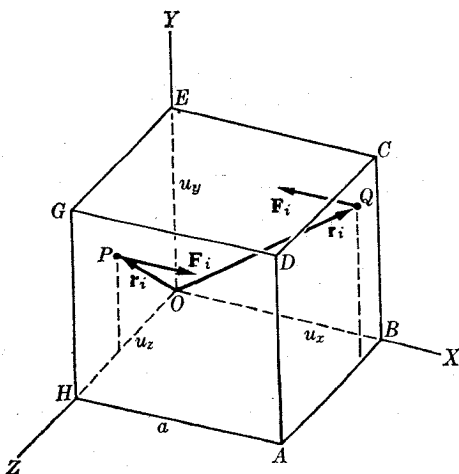
$$E_{k, ave} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{\text{تمام ذرات}} F_i \cdot r_i + \sum_{\text{جفت ذرات}} F_{ij} \cdot r_{ij} \right) \quad (56.9)$$

که در این رابطه، اولین جمع سمت راست به نیروهای خارجی وارد بر هر یک از ذرات و جمع دوم مربوط به نیروهای داخلی بین هر جفت از ذرات است. معادله (۵۶.۹) قضیه ویریا برای یک دستگاه ذرات و کمیت سمت راست آن، ویریا دستگاه نامیده می‌شود.

۱۳.۹ معادله حالت یک گاز

یکی از کاربردهای بسیار جالب قضیه ویریا عبارت است به دست آوردن معادله حالت یک گاز. منظور از معادله حالت، رابطه‌ای است بین کمیت‌های ماکروسکوپی مانند فشار، حجم و دما که حالت یک دستگاه را مشخص می‌کنند. بدیهی است که این کمیت‌های ماکروسکوپی یا آماری مستقیماً از ساختار داخلی دستگاه نتیجه می‌شوند و با طرح فرض‌های مناسب، باید بتوان یک ارتباط منطقی بین ساختار داخلی و رفتار ماکروسکوپی برقرار کرد.

فرض کنیم مولکول‌های یک گاز زیر تأثیر برهم‌کنش‌های متقابل داخلی خود و برهم‌کنش با جدار ظرف قرار دارند. برای سهولت بیشتر، ظرف گاز را مطابق شکل ۱۹.۹ به صورت



شکل ۱۹.۹

یک مکعب به ضلع a ، فرض می‌کنیم. (اثبات کلی نیازی به چنین محدودیتی ندارد).

ارزیابی معادله (۵۶.۹) را با بررسی جمع اول که مربوط به نیروهای خارجی است شروع می‌کنیم. به یک مولکول نیروی خارجی اثر نمی‌کند مگر هنگامی که به جدار ظرف برخورد می‌کند و برمی‌گردد. می‌توان فرض کرد نیرویی که به این مولکول وارد می‌شود بر جدار ظرف عمود است، فرضی که تنها به طور آماری درست است. اگر مولکولی در نقطه P به جدار $OEGH$ برخورد کند، که تمام نقاط این جدار برابر صفر است، به آن نیروی $\mathbf{F}_i = \mathbf{u}_x F_i$ وارد می‌شود. در این صورت $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = F_i x_i = 0$ است و جدار $OEGH$ هیچگونه سهمی در ویریال ندارد، زیرا مبدأ را طوری انتخاب کرده‌ایم که $x_i = 0$ می‌شود. همین نتیجه برای جدارهای $OBCE$ و $OHAB$ نیز به دست می‌آید.

در مورد جدار $ABCD$ ، بر ذره‌ای که، به عنوان مثال، به نقطه Q برخورد می‌کند، نیرویی موازی و در خلاف جهت OX وارد می‌شود، به گفته دیگر $\mathbf{F}_i = -\mathbf{u}_x F_i$ ، و تمام مولکولهای برخورد کننده بر این جدار دارای $x_i = a$ می‌باشند. بنابراین $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -F_i a$ می‌شود. جمع $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$ مربوط به جدار مورد نظر برابر است با

$$-\sum_i F_i a = -(\sum_i F_i) a = -F a = -p a^3$$

که در آن بنا به معادله (۴۶.۹) $F = p a^2$ برابر نیروی کل وارد از طرف گاز بر جدار به مساحت $A = a^2$ ، و p فشار گاز است. برای جدارهای $CDGE$ و $ADGH$ نیز نتایج مشابهی به دست می‌آید، در نتیجه سهم کل شش جدار در ویریال برابر می‌شود با

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -3 p a^3 = -3 p V$$

که در آن $V = a^3$ حجم اشغال شده به وسیله گاز است. در این صورت معادله (۵۶.۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$E_{k,ave} = \frac{3}{2} p V - \frac{1}{2} (\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})_{ave}$$

یا

$$p V = \frac{2}{3} E_{k,ave} + \frac{1}{3} (\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})_{ave}. \quad (57.9)$$

انرژی جنبشی میانگین یک مولکول برابر $(mv_{rms}^2)/2$ ، و انرژی میانگین تمام مولکولهای گاز برابر است با $E_{k,ave} = N(mv_{rms}^2)/2$ ، که در آن N تعداد کل مولکولها است. با قراردادن مقدار $E_{k,ave}$ در معادله (۵۷.۹) به دست می‌آید

$$p V = \frac{1}{3} N m v_{rms}^2 + \frac{1}{3} (\sum_{\text{تمام ذرات}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})_{ave}. \quad (58.9)$$

این رابطه فشار p و حجم V را با خواص مولکولی مانند m ، v_{rms} و $\mathbf{F}_{ij}$ مربوط می‌کند. T دمای مطلق گاز را مستقیماً متناسب با انرژی جنبشی میانگین یک مولکول تعریف می‌کنیم، و آن را با رابطه زیر نشان می‌دهیم:

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} m v_{rms}^2 \quad \text{یا} \quad k T = \frac{1}{3} m v_{rms}^2 \quad (59.9)$$

که در آن k یک ثابت عمومی است که ثابت بولتزمن^۱ نامیده می‌شود، و مقداری که به‌طور تجربی برای آن به دست آمده است (به یادداشت مربوط به اندازه‌گیری دما در صفحه ۳۳۸ مراجعه کنید) برابر است با

$$k = ۱.۳۸۰۴۵ \times ۱۰^{-۲۳} \text{ J}^\circ\text{K}^{-۱}. \quad (۶۰.۹)$$

پس معادله (۵۸.۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$pV = NkT + \frac{1}{3} \left(\sum_{\text{تمام ذرات}} \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \right)_{\text{ave}}. \quad (۶۱.۹)$$

اکنون به معادله حالت یک گاز رسیده‌ایم، ولی این معادله هنوز شکل نهایی را به خود نگرفته است، زیرا هنوز آخرین جمله را که به نیروهای بین مولکولی بستگی دارد ارزیابی نکرده‌ایم. برای ارزیابی این جمله، باید قبلاً ماهیت نیروهای بین مولکولی را بشناسیم یا فرضیهایی را در این مورد بپذیریم.

فعلاً گاز را «کامل» فرض می‌کنیم، یعنی گازی که تنها به عنوان یک مدل وجود دارد. در یک گاز کامل^۲ نیروهای بین مولکولی برابر صفر فرض می‌شوند. بنا بر این جمله آخر (۶۱.۹) از بین می‌رود و معادله حالت یک گاز کامل به صورت زیر درمی‌آید:

$$pV = NkT. \quad (۶۲.۹)$$

بسیاری از گازها، به‌طور شگفت‌انگیزی با تقریب خوبی از این معادله پیروی می‌کنند، بدین طریق معلوم می‌شود نیروهای بین مولکولی در گازها قابل اغماض هستند، مگر اینکه مولکولها کاملاً به هم فشرده باشند یا دما بسیار پایین باشد.

نکته جالب توجه در معادله (۶۱.۹) آن است که این معادله اثر نیروهای مولکولی روی فشار گاز را بروشنی نشان می‌دهد. به عنوان مثال، مشاهده می‌شود که اگر نیروهای بین مولکولی جاذبه باشند همه حاصل ضربهای $\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}$ منفی می‌شوند، به گونه‌ای که جمله سمت راست معادله (۶۱.۹) کمتر از مقداری می‌شود که برای یک گاز کامل به دست می‌آید و در نتیجه فشار کمتر خواهد بود. این نتیجه با درک فیزیکی ما کاملاً سازگار است.

مثال ۱۶.۹. با محاسبه مستقیم فشار وارد از طرف یک گاز کامل روی جدار ظرف، معادله حالت گاز را به دست آورید.

حل: دانشجو به یاد دارد که فشاری که جریان گاز در مثال ۲.۹ روی جدار به مساحت A وارد می‌کرد برابر بود با

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2Anmv^2 \cos^2 \theta}{A} = 2nmv^2 \cos^2 \theta$$

که در آن $v \cos \theta$ تصویر سرعت مولکولها روی راستای عمود بر جدار است. این رابطه فشار مولکولهایی را به دست می‌دهد که در راستایی که با راستای قائم بر جدار زاویه θ

می‌سازد حرکت می‌کنند. پس در این مورد، n تعداد کل مولکولهای موجود در واحد حجم نیست، بلکه تعداد مولکولهایی است که در راستای مذکور حرکت می‌کنند. بنابراین باید پیدا کنیم که چه کسری از مولکولها در راستایی با زاویه θ نسبت به راستای قائم جا بجا می‌شوند و سهم آنها را در تمام راستاها با هم جمع کنیم (یا در واقع انتگرال بگیریم). البته ما مسئله را به صورت دیگری که بسیار ساده‌تر و شهودی‌تر است، ولی در اساس همان نتیجه را به دست می‌دهد، بررسی می‌کنیم.

با اطمینان می‌توان فرض کرد که به طور آماری، در یک لحظه خاص، نیمی از مولکولها مؤلفه سرعتشان به سمت جدار و نیم دیگر دسوی مخالف می‌باشد. بنا بر این باید $n/2$ را جانشین n کرد، زیرا فقط $n/2$ مولکولها به جدار برخورد می‌کنند. به علاوه، اگر جدار، مستطیل $ABCD$ شکل ۱۹.۹ باشد، در این صورت $v \cos \theta$ برابر v_x ، یا مؤلفه سرعت در راستای محور X هاست، که عمود بر جدار است که انتخاب کرده‌ایم. با وارد کردن این تغییرات در رابطه قبلی فشار p ، به دست می‌آید

$$p = 2(n/2)mv_x^2.$$

بزرگی سرعت برابر است با $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. در واقع باید مقدار میانگین سرعت $v_{x,rms}^2$ و در نتیجه $v_{x,rms}^2 = v_{x,rms}^2 + v_{y,rms}^2 + v_{z,rms}^2$ را به کار برد. با وجود این اگر گاز همگن فرض شود، توزیع راستاهای سرعت مولکولها همسانگرد خواهد بود. بنا بر این $v_{x,rms}^2 = v_{y,rms}^2 = v_{z,rms}^2$ و در نتیجه $v_{x,rms}^2 = v_{rms}^2/3$ می‌باشد. با وارد کردن این مقادیر در رابطه p به دست می‌آید

$$p = 2(n/2)m(v_{rms}^2/3) = \frac{1}{3}nmv_{rms}^2 = \frac{1}{3}\frac{N}{V}mv_{rms}^2$$

زیرا $n = N/V$ است که N تعداد کل مولکولها و V حجم گاز است. بنا بر این

$$pV = Nmv_{rms}^2/3$$

این نتیجه با معادله (۵۸.۹) تطبیق می‌کند فقط جمله مربوط به نیروهای بین مولکولی در آن وجود ندارد، بنا بر این رابطه مربوط به گاز کامل است. برتری روش ویرسال در این است که بروشنی نشان می‌دهد که چگونه نیروهای بین مولکولی را باید به حساب آورد. آیا دانشجو می‌تواند راهی برای وارد کردن نیروهای بین مولکولی در استدلالی که برای مثال بالا آوردیم بیندیشد؟

یادداشت دوی اندازه‌گیری دما. در بخش ۸.۹ دمای یک دستگاه ذرات را به انرژی جنبشی میانگین یک ذره در چارچوب GM وابسته کردیم. در معادله (۵۹.۹) یا $mv_{rms}^2/2 = 3kT/2$ ، رابطه دمای یک گاز و انرژی جنبشی میانگین مولکولهای آن بیشتر تصریح گردید. با وجود این، اکنون باید دوجنبه مهم را مورد بررسی قرار دهیم. نخست اینکه، در معادله تعریف کننده (۵۹.۹) دو کمیت جدید یعنی T (دمای مطلق) و k

(ثابت بولتزمن) وارد شده‌اند. بایسد معلوم کرد چگونه می‌توان این دو کمیت را مستقل از یکدیگر اندازه‌گیری کرد. دوم اینکه، دانشجو دریافتی شهودی از دما دارد که بر تجارب حسی متکی است، آنچنانکه احساس سردی یا گرمی آن را منعکس می‌کند. او معمولاً دما را با عددی می‌سنجد که از وسیله‌ای به نام دماسنج^۱ به دست می‌آید. بنا بر این لازم است تعریفی که از دما شده است با این مفهوم شهودی ارتباط داده شود.

گازی به جرم M را که دارای N مولکول است در نظر می‌گیریم. اگر نیروهای بین مولکولی را نادیده بگیریم، معادلهٔ حالت گاز با رابطهٔ (۶۲.۹) یا $pV = NkT$ داده می‌شود. فرض کنید این گاز با یک دستگاه فیزیکی دیگر که می‌توان آن را در دمای ثابتی نگه داشت، در تعادل گرمایی باشد. این دستگاه می‌تواند آمیزه‌ای از آب و یخ در نقطهٔ انجماد خود، و در فشار یک اتمسفر باشد. فشار و حجم گاز را در این دمای ثابت اندازه می‌گیریم که بترتیب مقادیر p_0 و V_0 به دست می‌آیند. سپس به این دمای ثابت مقدار مناسب (ولی دلخواه) T_0 را نسبت می‌دهیم که دمای گاز نیز می‌باشد. بنا بر این می‌توان نوشت $p_0 V_0 = NkT_0$. این رابطه خود بخود ثابت بولتزمن، $k = p_0 V_0 / NT_0$ ، را تثبیت می‌کند، و اگر جرم هر مولکول معلوم باشد می‌توان N را به دست آورد.

برای تعیین دمای گاز هنگامی که حجم آن V و فشار آن p است، به گونه‌ای که $pV = NkT$ باشد، با استفاده از مقادیر استاندارد، سازهٔ Nk را حذف می‌کنیم، و به دست می‌آوریم

$$T = T_0 (pV / p_0 V_0).$$

این رابطه T را بر حسب دمای مرجع T_0 و سایر کمیت‌های قابل سنجش به دست می‌دهد. بدین طریق، گاز مورد نظر به صورت یک دماسنج گازی درمی‌آید. به جای گاز می‌توان از مواد دیگری مثلاً یک آبگون یا یک میلهٔ فلزی که ابعاد (حجم یا طول) آن با دما تغییر می‌کند نیز به عنوان دماسنج استفاده کرد. چون معادلهٔ حالت این مواد پیچیده‌تر است، در عمل این دماسنج‌ها را با یک دماسنج گازی زینه‌بندی می‌کنند. چون خاصیت انتخاب شده ممکن است تغییر خطی بر حسب تغییر دما نداشته باشد، احتمال دارد برای دماهای میانی اندکی اختلاف مشاهده شود.

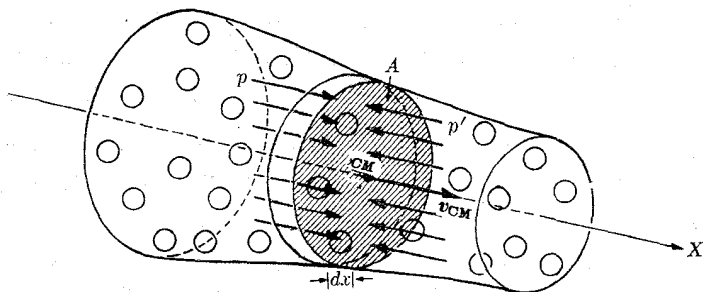
مقدار T_0 را می‌توان از دیدگاه‌های مختلف انتخاب کرد. به عنوان مثال، می‌توانیم فرایند دیگری را که فکر می‌کنیم در دمای ثابتی رخ می‌دهد، مانند فرایند جوشیدن آب در فشار یک اتمسفر، انتخاب کنیم. آنگاه می‌توانیم حکم کنیم که دمای این نقطهٔ مرجع دوم ۱۰۰ واحد یا درجه بالای T_0 است. اگر V_1 و p_1 بترتیب حجم و فشار گاز در این دمای جدید باشند، داریم $p_1 V_1 = Nk(T_0 + ۱۰۰)$. مقدار Nk را از رابطهٔ $p_0 V_0 = NkT_0$ به دست می‌آوریم و آن را در رابطهٔ بالا قرار می‌دهیم؛ نتیجه می‌شود

$$T_0 = ۱۰۰ \frac{p_1 V_1}{p_1 V_1 - p_0 V_0}.$$

از اینجا یک مقدار عددی برای T_0 به دست می‌آید. عددی که به دنبال این نوع آزمایش (یا آزمایشهای دیگری با تکنیکهای دیگر) برای T_0 به دست می‌آید عبارت است از $273.15^\circ K$. هر واحد را یک درجهٔ کلوین می‌خوانند و با $^\circ K$ نشان می‌دهند. باید توجه داشت که تکنیک سنجش دما روی تقریب گاز کامل پایه‌گذاری شده‌است. اگر گازهای مختلف به کار ببریم نتایج متفاوتی به دست می‌آیند، زیرا اثر نیروهای بین مولکولی، به گونه‌ای که در معادله (۱۰.۹) ظاهر می‌شود، برای هرگازی متفاوت است. معمولاً هیدروژن یا هلیوم را به کار می‌برند. کمال مطلوب آن است که بتوان مقیاس دمایی به دست آورد که مستقل از ماده‌ای باشد که به عنوان وسیلهٔ سنجش به کار می‌رود. این مطلبی است که در ترمودینامیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد و در اینجا از آن گفتگو نمی‌کنیم.

۱۴.۹ حرکت شاره

اصول کلی را که در این فصل دربارهٔ دستگاههای چند ذره‌ای مورد بحث قرار گرفتند، می‌توان براحتی در مطالعهٔ حرکت یک شاره به کار برد. برای سهولت، شاره‌ای (یک گاز یا یک آبگون) را در نظر می‌گیریم که در یک لولهٔ استوانه‌ای با مقطع متغیر A جریان دارد (شکل ۲۰.۹). لوله را می‌توان در هر راستایی قرار داد، بنا بر این محور X ها را در راستای محور استوانه در نظر می‌گیریم. یک جزء حجم به ضخامت dx و حجم Adx را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هر چند این حجم کوچک است ولی حاوی تعداد زیادی مولکول است. حرکت این جزء حجم از شاره را می‌توان با استفاده از معادله (۹.۹) مطالعه کرد که در آن به جای جرم M جملهٔ $\rho(Adx)$ را قرار می‌دهیم، که ρ چگالی شاره است. برای یک شاره همگن می‌توان فرض کرد مرکز جرم بر مرکز حجم جزء منطبق است. سرعت شاره در مرکز حجم v_{CM} خوانده می‌شود، که در این مورد موازی محور X ها است.



شکل ۲۰.۹

اکنون باید بر آیند نیروهای خارجی وارد بر این حجم شاره را تعیین کنیم. فشار در سمت چپ و راست جزء حجم را به ترتیب p و p' می‌گیریم. شاره واقع درست چپ، نیروی pA را به سمت راست بر جزء حجم وارد می‌کند و نیروی وارد از شارهٔ واقع درست راست

برابر $p'A$ و به سمت چپ است. مؤلفه نیروی برآیند خارجی روی محور X ها که بر جزء حجم وارد می شود برابر است با

$$dF_x = -p'A + pA = -(p' - p)A.$$

$p' - p$ اختلاف فشار بین دو نقطه به فاصله dx است. بنابراین داریم $dp = p' - p$ ؛ در نتیجه

$$dF_x = -(dp)A = -\frac{dp}{dx}(A dx).$$

چون $A dx$ برابر حجم است، نتیجه می گیریم که نیروی وارد بر واحد حجم ناشی از فشار در راستای محور X ها برابر است با

$$f_p = -\frac{dp}{dx}. \quad (۶۳.۹)$$

هرگاه این نتیجه را با معادله (۲۳.۸) مقایسه کنیم، می بینیم که می توان فشار را همانند انرژی پتانسیل بر واحد حجم در نظر گرفت. این مقایسه از نقطه نظر ابعادی نیز درست است، زیرا فشار بر حسب Nm^{-2} بیان می شود که عیناً برابر است با $(\text{Nm})\text{m}^{-3}$ یا Jm^{-3} .

علاوه بر فشار ممکن است نیروهای خارجی دیگری (مانند گرانی یا میدان الکتریکی یا مغناطیسی) روی شاره داخل جزء حجم وارد شوند. فرض کنیم f_e هر نیروی دیگر از این قبیل باشد که بر واحد حجم وارد می شود (مانند وزن تقسیم بر حجم)، در این صورت برآیند نیروهای خارجی وارد بر شاره واقع در داخل جزء حجم برابر می شود با

$$(f_p + f_e) A dx = \left(-\frac{dp}{dx} + f_e\right) A dx.$$

(نیروی بین مولکولها در داخل جزء حجم نیروهای داخلی هستند و نباید به حساب آورده شوند.) بنابراین، مطابق معادله (۹.۹)، معادله حرکت (با حذف شاخص CM برای سرعت) عبارت می شود از

$$(\rho A dx) \frac{dv}{dt} = \left(-\frac{dp}{dx} + f_e\right) A dx$$

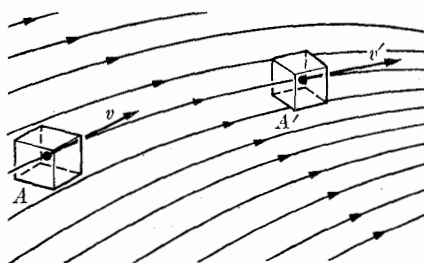
یا پس از حذف جمله مشترک $A dx$ از دو طرف رابطه، داریم

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} + f_e. \quad (۶۴.۹)$$

اگر نیروی f_e پایستار باشد، داریم $f_e = -(dE_p/dx)$ که در آن E_p انرژی پتانسیل مربوط به واحد حجم است. پس معادله فوق به صورت زیر درمی آید:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} - \frac{dE_p}{dx} = -\frac{d}{dx}(p + E_p). \quad (۶۵.۹)$$

قبل از هر توضیح دیگری، باید ماهیت حرکت شاره را روشن کنیم. حرکت شاره را ایستودا گویند هرگاه روند حرکت نسبت به زمان تغییر نکند. این جمله بدان معنی است که هرچند ممکن است سرعت یک جزء از شاره با تغییر مکان آن تغییر کند، ولی سرعت شاره در هر نقطه از فضا یکسان باقی می ماند. برای اینکه موضوع را روشن تر بیان کرده باشیم، جزئی از شاره را در طول مسیر آن دنبال می کنیم (شکل ۲۱.۹). سرعت شاره را در نقطه A با v و در نقطه A' با v' نشان می دهیم. اگر حرکت ایستور باشد، تمام جزءهای شاره هنگام رسیدن به نقطه A دارای سرعت v و در نقطه A' دارای سرعت v' می شوند. در این صورت سرعت شاره به جای اینکه تابع زمان باشد تابع مکان خواهد بود، در یک حرکت غیرایستور سرعت در هر نقطه با زمان تغییر می کند. به عنوان مثال، اگر در یک لحظه معین، سرعت شاره در نقطه A برابر v باشد، در حالت کلی، سرعت آن در زمانهای بعد تغییر می کند. ما در بحث حاضر، تنها حرکت ایستور شاره را مورد بررسی قرار می دهیم.



شکل ۲۱.۹. حرکت ایستور. خطهای رسم شده در شکل را خطهای جریان می نامند.

در یک حرکت ایستور، اگر dt زمانی باشد که در طول این زمان یک جزء شاره به اندازه dx جابجا می شود، می توان نوشت

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v^2 \right).$$

با قرار دادن رابطه فوق در معادله (۶۵.۹)، داریم

$$\rho \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = - \frac{d}{dx} (p + E_p).$$

شاره را غیرقابل تراکم (به گفته دیگر با چگالی ثابت) در نظر می گیریم. بنابراین سمت چپ معادله بالا را می توان به صورت $d(\rho v^2/2)/dx$ نوشت. در این صورت معادله به شکل زیر درمی آید:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + E_p \right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \rho v^2 + p + E_p = \text{const.} \quad (۶۶.۹)$$

این نتیجه، که به نام قضیهٔ برنولی^۱ معروف است، اصل بقای انرژی را در یک شاره بیان می‌کند. جملهٔ اول نمایش انرژی جنبشی بر واحد حجم است، جملهٔ دوم همانند یک انرژی پتانسیل بر واحد حجم تعبیر می‌شود که وابسته به فشار است و جملهٔ سوم انرژی پتانسیل بر واحد حجم ناشی از سایر نیروهای خارجی می‌باشد. بنابراین اگر تمام نیروهای وارد بر شاره پایستار باشند و حرکت یک حجم کوچک از شاره را دنبال کنیم، معلوم می‌شود که انرژی کل بر واحد حجم ثابت باقی می‌ماند.

در حالت ویژه‌ای که نیروی خارجی وارد بر شاره منحصراً نیروی گرانی باشد، $E_p = \rho g z$ است و معادلهٔ (۶۶.۹) به صورت زیر درمی‌آید:

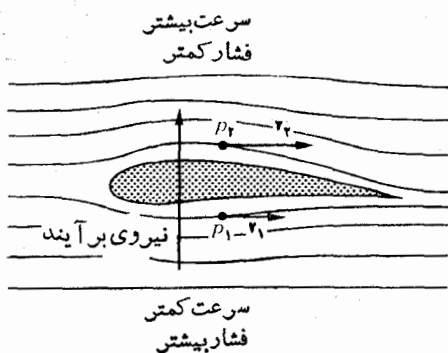
$$\frac{1}{\rho} \rho v^2 + p + \rho g z = \text{const.} \quad (۶۷.۹)$$

دو حالت مهم زیر را در نظر می‌گیریم. اگر شاره فقط در یک تراز افقی حرکت کند، جملهٔ $\rho g z$ ثابت باقی می‌ماند و معادلهٔ (۶۷.۹) به صورت سادهٔ زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\rho} \rho v^2 + p = \text{const.} \quad (۶۸.۹)$$

بنابراین در یک لولهٔ افقی هر چه فشار کمتر باشد سرعت بیشتر است و برعکس. از این پدیده جهت بالابردن هواپیما استفاده می‌کنند (شکل ۲۲.۹). نیمرخ بال هواپیما به گونه‌ای طرح و ساخته می‌شود که سرعت هوا در بالای سطح بال بیشتر از سرعت هوا در زیر آن باشد. این امر موجب می‌شود در پایین بال فشار بیشتر از بالای آن باشد، در نتیجه از برآیند نیروها نیرویی در سوی پایین به بالا به وجود می‌آید. اگر سطح بال هواپیما برابر A باشد نیروی به طرف بالا برابر است با

$$F = A(p_1 - p_2) = \frac{1}{\rho} A \rho (v_1^2 - v_2^2)$$



شکل ۲۲.۹. نیروی بالابردن روی بال هواپیما

که در آن شاخصهای ۱ و ۲ مربوط به شرایط موجود در سطح پایین و بالای بال هواپیما هستند. چون داریم

$$\frac{1}{\rho}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{\rho}(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$$

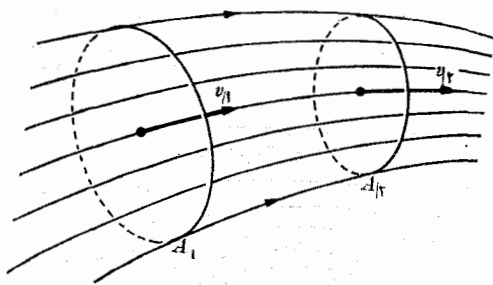
با تقریب بسیار خوبی می توان گفت که $(v_1 + v_2)/2$ برابر v و معادل سرعت هواپیما نسبت به هواست. در این صورت نیروی برآیند بالا بر برابر است با

$$F = A\rho v(v_2 - v_1).$$

به عنوان مثال دوم، شاره ای را در نظر بگیرید که ساکن است یا با سرعت ثابتی در یک لوله حرکت می کند. در این حالت، می توان جمله $\rho v^2/2$ را از معادله (۶۷.۹) حذف کرد، و در نتیجه آن را به صورت $p + \rho gz = \text{const}$ خلاصه کرد. اگر مقدار ثابت را با p_0 نشان دهیم، فشار در یک شاره غیر قابل تراکم ترازمند برابر می شود با

$$p = p_0 - \rho gz. \quad (۶۹.۹)$$

بدیهی است p_0 مقدار فشار در ارتفاع $z = 0$ است. می توان این مطالعه را برای حالتی که شاره تراکم پذیر است یا حالتی که در آن نیروها یا پستار نیستند گسترش داد. (حالت اخیر هنگامی رخ می دهد که به عنوان مثال، شاره یک کار هیلگردانی^۱ انجام می دهد و موجب حرکت ساز و کاری مانند توربین در یک دستگاه هیدرولیک می شود، یا هنگامی که شاره با محیط خارج تبادل گرما می کند، مانند کارخانجات فرآورده های شیمیایی.) در اینجا این ملاحظات را که مربوط به درسهای تخصصی تری هستند مورد توجه قرار نمی دهیم.



شکل ۲۳.۹

آخرین اصلی که در مطالعه حرکت یک شاره بسیار اهمیت دارد، معادله پیوستگی^۲ است، که اصل بقای جرم شاره را بیان می کند. شاره ای را در نظر می گیریم که در داخل لوله شکل ۲۳.۹ در شرایط دائمی حرکت می کند به گونه ای که در هیچ نقطه ای نه اتلاف جرم

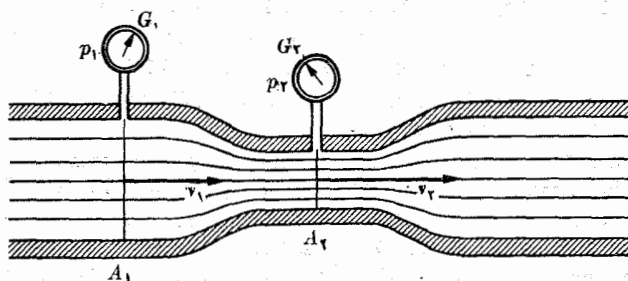
وجود دارد و نه افزایش آن. A_1 و A_2 دو مقطع لوله می باشند. حجم شارهای که در واحد زمان از سطح A_1 می گذرد متناظر با استوانه ای است به قاعده A_1 و طول v_1 و حجم $A_1 v_1$. بنابراین جرم شارهای که در واحد زمان از A_1 می گذرد برابر می شود با $\rho_1 A_1 v_1$. همچنین $\rho_2 A_2 v_2$ جرم شارهای است که در واحد زمان از سطح A_2 می گذرد. تحت شرایطی که گفته شد، اصل بقای جرم ایجاب می کند این دو جرم برابر باشند، یا

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (70.9)$$

این رابطه را معادله پیوستگی می نامند. اگر شاره تراکم ناپذیر باشد، چگالی ثابت باقی می ماند و معادله (70.9) به صورت زیر خلاصه می شود:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (71.9)$$

این معادله نشان می دهد که سرعت شاره متناسب است با عکس سطح مقطع لوله؛ و این نتیجه با درک فیزیکی ما سازگار است.



شکل ۲۴.۹

مثال ۱۷.۹. پیمانه ونتوری، شکل ۲۴.۹، روشی است برای تعیین سرعت جریان یک شاره در یک لوله. دو فشارسنج G_1 و G_2 فشار را در لوله و در نقطه ای کسه لوله تنگتر می شود نشان می دهند. سرعت v_1 را بر حسب اختلاف فشار $p_1 - p_2$ حساب کنید.

حل: برای به دست آوردن رابطه سرعت، اگر v_1 و v_2 نمایش سرعتها در دو مقطع، بترتیب به مساحت های A_1 و A_2 ، باشند، از معادله پیوستگی (71.9) به دست می آید $A_1 v_1 = A_2 v_2$ یا $v_2 = (A_1/A_2)v_1$. از طرف دیگر، اگر لوله افقی باشد، از قضیه برنولی به صورت معادله (۶۸.۹)، داریم

$$\frac{1}{\rho} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{\rho} \rho v_2^2 + p_2$$

با قرار دادن v_2 که قبلاً پیدا کردیم و محاسبه v_1 ، بالاخره به دست می آید

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(A_1/A_2)^2 - 1]}}$$

مقدار شارهای که در واحد زمان از هر مقطع لوله می‌گذرد برابر است با

$$V = A_1 v_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} = K \sqrt{p_1 - p_2}$$

در این رابطه K ثابتی است که به ویژگیهای لوله و ماهیت شار بستگی دارد.

فهرست منابع

1. «A Sketch for a History of the Kinetic Theory of Gases,» E. Mendoza, *Physics Today*, March 1961, page 36.
2. «Development of the Kinetic Theory of Gases, V: The Equation of State,» S. Brush, *Am. J. Phys.* 29, 593 (1961).
3. *Physical Mechanics* (third edition), by R.B. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Chapter 6, Sections 11-1 through 11-5.
4. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, Sections 13-1, 19-3, 19-5, 21-1.
5. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Sections 6-6, 7-3, 7-14, 22-1 through 22-6.
6. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, & M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 39.
7. *Source Book in Physics*, by W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 73, Pascal; page 196, Mayer; page 212, Helmholtz; page 274, Bernoulli; page 255, Joule; page 257, Maxwell.
8. *Foundations of Modern Physical Science*, by G. Holton & D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapter 25.
9. *Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases, and Statistical Mechanics*, (second edition), by Francis W. Sears. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1953, Chapter 1.

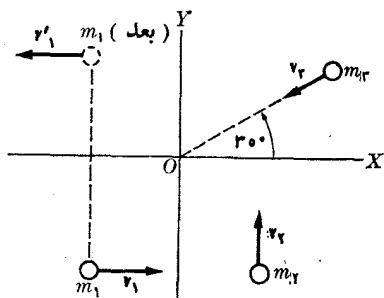
۱۰. سایمون، کیت ر. مکانیک، ترجمه اعظم نیرومندراد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، فصل ۴، بخشهای ۵-۱۱، ۸-۶ تا ۸-۹.

مسئله‌ها

۱۰۹. دستگاهی از سه ذره به جرمهای ۳ kg، ۲ kg و ۵ kg تشکیل شده است. سرعت ذره اول برابر $u_1(6) \text{ ms}^{-1}$ است. ذره دوم در راستایی که با محور X زاویه 30° می‌سازد، با سرعت 8 m s^{-1} حرکت می‌کند. اگر مرکز جرم دستگاه نسبت به ناظر بی‌حرکت به نظر برسد سرعت ذره سوم چیست؟

۲۰۹. در یک لحظه مشخص، سه ذره مطابق شکل ۲۵۰۹ حرکت می‌کنند. آنها تحت تأثیر برهم‌کنشهای متقابل خود می‌باشند و هیچ نیروی خارجی بر آنها اثر نمی‌کند. بعد از مدتی که مجدداً آنها را مشاهده می‌کنند، معلوم می‌شود m_1 مطابق آنچه در شکل دیده می‌شود حرکت

می‌کند، در صورتی که m_4 ساکن است. با قراردادن $m_1 = 2 \text{ kg}$ ، $m_2 = 0.5 \text{ kg}$ ، $v_1 = 1 \text{ m s}^{-1}$ ، $v_2 = 2 \text{ m s}^{-1}$ ، $v_3 = 4 \text{ m s}^{-1}$ و $v'_1 = 3 \text{ m s}^{-1}$

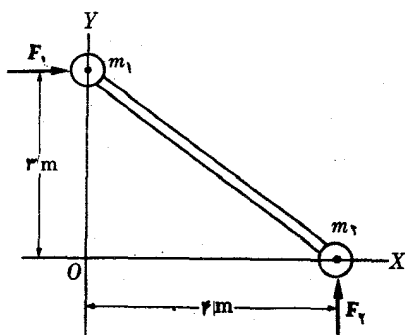


شکل ۲۵.۹

سرعت m_3 را پیدا کنید. سرعت CM دستگاه را در دو لحظه داده شده در مسئله حساب کنید. در یک زمان معلوم مکان ذره‌ها عبارتند از

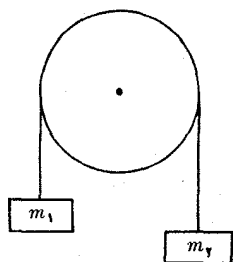
$m_1(-0.8 \text{ m و } -1.1 \text{ m})$ و $m_2(0.8 \text{ m و } -1.1 \text{ m})$ و $m_3(1.4 \text{ m و } 0.8 \text{ m})$

خطی را که مسیر CM دستگاه را نشان می‌دهد رسم کنید.



شکل ۲۶.۹

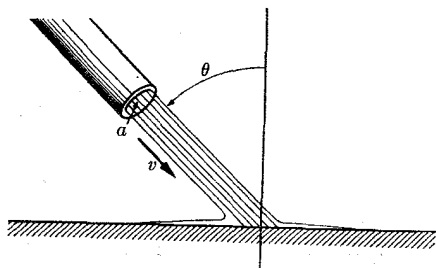
۳.۹. جرمهای $m_1 = 10 \text{ kg}$ و $m_2 = 6 \text{ kg}$ توسط میله سختی به جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند (شکل ۲۶.۹). این جرمها که در آغاز در حال سکون می‌باشند، مطابق شکل



شکل ۲۷.۹

بترتیب تحت تأثیر نیروهای $F_1 = u_x(\lambda)N$ و $F_2 = u_y(\epsilon)N$ قرار می‌گیرند. (الف) مختصات مرکز جرم آنها را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید. (ب) اندازه حرکت کل را به صورت تابعی از زمان بنویسید.

۴.۹. دو جرم شکل ۲۷.۹ در آغاز بی‌حرکت هستند. به فرض اینکه $m_1 > m_2$ باشد، شتاب و سرعت مرکز جرم آنها را در لحظه t پیدا کنید.



شکل ۲۸.۹

۵.۹. آبگونی در راستایی با زاویه θ روی صفحه‌ای می‌ریزد (شکل ۲۸.۹). آبگون پس از برخورد با صفحه روی سطح آن پخش می‌شود. فشاری را که آبگون روی صفحه وارد می‌کند پیدا کنید. چگالی آبگون برابر ρ و سرعت آن v است.

۶.۹. (الف) با استفاده از داده‌های جدول ۱.۱۳، مکان مرکز جرم و جرم کاهیده دستگاه‌های زمین - ماه، خورشید - زمین را پیدا کنید. (ب) همچنین اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی هر دستگاه را پیدا کنید. (ج) همین عمل را در مورد مولکولهای CO و HCl نیز انجام دهید. طول پیوند در مولکول CO برابر $1.13 \times 10^{-10} m$ و در مولکول HCl برابر $1.27 \times 10^{-10} m$ است.

۷.۹. دو ذره به جرمهای $2 kg$ و $3 kg$ بترتیب با سرعتهای $8 m s^{-1}$ در راستای محور X و $8 m s^{-1}$ در راستایی که با محور X زاویه 120° می‌سازد نسبت به ناظری حرکت می‌کنند. (الف) هر سرعت را به صورت برداری بنویسید. (ب) سرعت CM آنها را پیدا کنید. (ج) سرعت هر ذره را نسبت به سرعت CM بنویسید. (د) اندازه حرکت هر ذره را در چارچوب CM پیدا کنید. (ه) سرعت نسبی ذره‌ها را حساب کنید. (و) جرم کاهیده دستگاه را به دست آورید. (ز) رابطه داده شده در مثال ۴.۹ را تحقیق کنید.

۸.۹. انرژی جنبشی کل ذره‌های مسئله ۷.۹ را، نسبت به آزمایشگاه و نسبت به مرکز جرمشان تعیین کنید. برای محاسبه دوم دو روش مختلف به کار ببرید. درستی رابطه‌های داده شده در مثال ۸.۹ را تحقیق کنید.

۹.۹. فرض کنید که ذره‌های داده شده در مسئله ۷.۹ بترتیب در نقطه‌های (۱، ۱) و (۰، ۵) و (۲، ۵) قرار دارند. (الف) مکان CM آنها را پیدا کنید. (ب) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه را نسبت به CM آنها تعیین کنید. (ج) اندازه حرکت زاویه‌ای را نسبت به مبدأ حساب کنید. برای محاسبه (ب) و (ج) از دو روش مختلف استفاده کنید.

۱۰۰۹. یک هسته اورانیوم ^{236}U در حال سکون، به دو قطعه به جرمهای 140 amu و 90 amu تقسیم می شود. Q واکنش برابر 190 MeV است. انرژی و سرعت هر قطعه را پیدا کنید.

۱۱۰۹. یک هسته اورانیوم ^{238}U در حال سکون، با گسیل یک ذره آلفا ($m = 4\text{ amu}$) و باقی گذاردن یک هسته ^{234}Th ($M \approx 234\text{ amu}$) فروپاشیده می شود. انرژی کل قابل دسترس 418 MeV است. (الف) انرژی جنبشی ذره آلفا و هسته باقی مانده را پیدا کنید، (ب) اندازه حرکت آنها را حساب کنید، و (ج) سرعت آنها را به دست آورید.

۱۲۰۹. در یک هسته که در آغاز بی حرکت است، واپاشی رادیواکتیوی انجام می گیرد و از آن یک الکترون با اندازه حرکت $10^{-21} \times 9.22 \times 10^{-31} \text{ kg m s}^{-1}$ و یک نوترینو با اندازه حرکت $10^{-21} \times 5.33 \text{ kg m s}^{-1}$ عمود بر راستای حرکت الکترون گسیل می شود. (الف) هسته باقی مانده در چه راستایی پس می زند؟ (ب) اندازه حرکت آن چقدر است؟ (ج) می دانیم که جرم هسته باقی مانده برابر $10^{-25} \times 390 \text{ kg}$ است. سرعت و انرژی جنبشی آن چقدر است؟

۱۳۰۹. نارنجکی به جرم m بر اثر انفجار چند قطعه می شود. انفجار دارای Q مثبت است. (الف) اگر نارنجک دو تکه شود ثابت کنید که در چارچوب مرجع C آنها در دوسوی مخالف جابجا می شوند. (ب) اگر نارنجک سه قطعه شود ثابت کنید که نسبت به چارچوب C اندازه حرکت و سرعت آنها در یک صفحه قرار دارند. (ج) اگر نارنجک به بیش از سه قطعه تقسیم شود، آیا شرط ویژه ای برای اندازه حرکت این قطعات نسبت به مرکز جرم وجود دارد؟ (د) اگر نارنجک به دو قطعه برابر تقسیم شود، ثابت کنید که اندازه حرکت و سرعت آنها در چارچوب مرجع C بترتیب برابرند با $(mQ/2)^{1/2}$ و $(2Q/m)^{1/2}$. (ه) اگر نارنجک به سه قطعه برابر تقسیم شود و در چارچوب C به طور متقارن گسیل گردند، ثابت کنید که اندازه حرکت و سرعت آنها در این چارچوب بترتیب برابرند با $(2mQ)^{1/2}/3$ و $(2Q/m)^{1/2}$. (و) قسمت (ه) را به فرض اینکه دو قطعه با سرعت یکسان نسبت به چارچوب C و لی در دو راستای عمود برهم گسیل شوند، از نو حل کنید. (ز) اگر در لحظه انفجار، نارنجک در چارچوب L با سرعت $(2Q/m)^{1/2}/4$ و در راستای یکی از قطعات حاصل حرکت می کرد، نتایج (د) و (ه) به نظر ناظری در چارچوب L چگونه ظاهر می شد؟

۱۴۰۹. پرتابه ای تحت زاویه 60° با افق و با سرعت اولیه 400 m s^{-1} شلیک می شود. در نقطه اوج گذرگاه خود، پرتابه منفجر و به دو قطعه به جرمهای یکسان تقسیم می شود و یکی از قطعات در راستای قائم سقوط می کند. (الف) قطعه دوم در چه فاصله ای از نقطه پرتاب به زمین برخورد می کند؟ (زمین را تخت فرض کنید). (ب) انرژی که بر اثر انفجار آزاد می شود چقدر است؟

۱۵۰۹. نارنجکی به جرم M که با سرعت v در حال افتادن است، در ارتفاع h منفجر و به دو قطعه برابر تقسیم می شود که این قطعات در چارچوب C ابتدا به صورت افقی حرکت

می‌کنند. Q انفجار برابر است با Mv_0 . محل افتادن قطعه‌های نارنجک را نسبت به نقطه‌ای از زمین که در لحظه انفجار درست زیر نارنجک واقع می‌شود پیدا کنید.

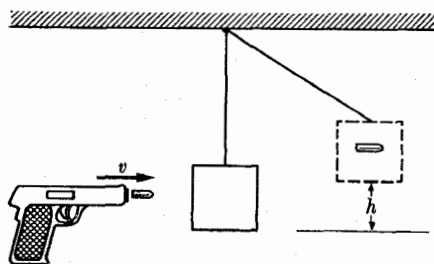
۱۶۰۹. مسئله ۱۵۰۹ را در مورد نارنجکی که در لحظه انفجار در راستای افقی حرکت می‌کند حل کنید.

۱۷۰۹. گویی به جرم 4 kg و سرعت 12 m s^{-1} با گوی دیگری به جرم 5 kg که در راستای حرکت گوی اول با سرعت 6 m s^{-1} حرکت می‌کند برخورد رو در رو می‌کند. (الف) سرعت گویها را بعد از برخورد پیدا کنید (برخورد را کشسان فرض کنید). (ب) تغییر اندازه حرکت هریک از گویها را به دست آورید.

۱۸۰۹. مسئله پیش را به فرض اینکه گوی دوم در سوی مخالف گوی اول حرکت کند از نو حل کنید.

۱۹۰۹. دو مسئله پیش را به فرض اینکه دو گوی بعد از برخورد به هم بچسبند و با هم به حرکت ادامه می‌دهند از نو حل کنید.

۲۰۰۹. ذره‌ای به جرم 2 kg و با سرعت 40 m s^{-1} به ذره ساکنی به جرم 3 kg برخورد می‌کند. بعد از برخورد ذره نخست با سرعت 20 m s^{-1} در راستایی که با راستای اولیه آن زاویه 40° می‌سازد حرکت می‌کند. سرعت ذره دوم و Q فرایند را پیدا کنید.



شکل ۲۹.۹

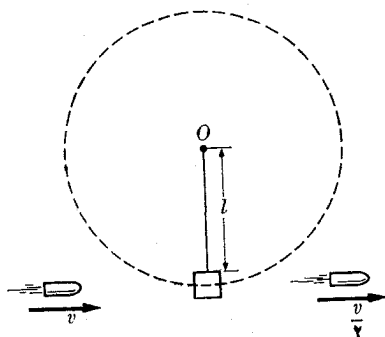
۲۱۰۹. دستگاه شکل ۲۹.۹ آونگ پرتابی^۱ نامیده می‌شود که آن را برای تعیین سرعت یک گلوله به کار می‌برند. برای این کار ارتفاع h را که آونگ پس از برخورد و نفوذ گلوله بالا می‌رود اندازه‌گیری می‌کنند. ثابت کنید که سرعت گلوله برابر است با

$$\sqrt{2gh(m_1 + m_2)/m_1}$$

که در آن m_1 جرم گلوله و m_2 جرم قطعه آویزان به عنوان آونگ است.

۲۲۰۹. گلوله‌ای به جرم m و سرعت v از گوی آونگی به جرم M عبور می‌کند و با سرعت $v/2$ از آن خارج می‌شود (شکل ۳۰۰۹). گوی آونگ از نخ به طول l آویزان است.

حداقل سرعت v چقدر باید باشد تا آونگ یک دور کامل بگردد؟



شکل ۳۰.۹

۲۳.۹. ذره‌ای به جرم 5 kg که با سرعت 2 m s^{-1} حرکت می‌کند به ذره ساکنی به جرم 8 kg برخورد می‌کند. اگر برخورد کشان باشد، سرعت هر ذره را در حالت‌های زیر پیدا کنید: (الف) برخورد کاملاً رودررو است، (ب) ذره نخست 50° از راستای اولیه خود منحرف می‌شود. تمام راستاها را نسبت به راستای ذره برخورد کننده در نظر بگیرید.

۲۴.۹. ذره‌ای به جرم m که با سرعت v حرکت می‌کند به طور کشان و رودررو با ذره دیگری به جرم M (بزرگتر از m) برخورد می‌کند که دارای (الف) اندازه حرکت برابر ولی درسوی مخالف ذره اول است؛ (ب) انرژی جنبشی برابر با ذره اول است ولی درسوی مخالف حرکت می‌کند. در هر حالت سرعت ذره نخست را بعد از برخورد حساب کنید. (ج) اگر M ساکن و خیلی بزرگتر از m باشد، ثابت کنید تغییر انرژی جنبشی m عبارت است از

$$\Delta E_k / E_k \approx -\frac{1}{2}(m/M).$$

۲۵.۹. آزمایش نشان می‌دهد که در یک برخورد رودررو بین دو کره جامد، مانند دوگویی بیلیارد، سرعت‌های بعد از برخورد با رابطه $v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2)$ به سرعت‌های قبل از برخورد مربوط اند. در اینجا e بین صفر و یک تغییر می‌کند و ضریب بازگشت نامیده می‌شود. این نتیجه توسط نیروتون کشف شد و تنها به طور تقریبی معتبر است. علاوه، اندازه حرکت در برخورد ثابت باقی می‌ماند. ثابت کنید (الف) سرعت‌های بعد از برخورد از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2e) + v_2(1 + e)m_2}{m_1 + m_2}$$

و

$$v_2' = \frac{v_1(1 + e)m_1 + v_2(m_2 - m_1e)}{m_1 + m_2}$$

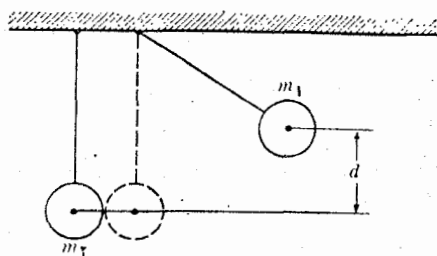
(ب) Q برخورد برابر است با

$$-\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2.$$

(ج) در یک برخورد کشسان مقدار e چقدر است؟

۰۲۶۰۹. در یک برخورد پلاستیک^۱ دو جسم بعد از برخورد به صورت جسم واحدی درمی آیند. (الف) مقدار ضریب بازگشت e چقدر است؟ (ب) Q واکنش را مستقیماً، همچنین با استفاده از نتیجه‌های مسئله پیش همراه با مقدار مناسب برای e ، حساب کنید.

۰۲۷۰۹. جرم گویهای m_1 و m_2 در شکل ۳۱۰۹ بترتیب 2kg و 1kg می باشد. هنگامی که $d = 0.2\text{m}$ است جرم m_1 رها می شود. ارتفاعی را که دو گوی بالا می روند، در حالتی که برخورد (الف) کشسان، (ب) ناکشسان با ضریب بازگشت برابر 0.9 ، و (ج) پلاستیک ($e = 0$) باشد، حساب کنید. مسئله را در حالتی که جرم m_2 تا ارتفاع d بالا برده می شود و رها می گردد و جرم m_1 ساکن است، حل کنید.



شکل ۳۱۰۹

۰۲۸۰۹. در نتایج فیزیکی یک برخورد که در آن مقدار e (الف) منفی، (ب) بزرگتر از یک است بحث کنید. آیا می توان نتیجه گرفت که این مقادیر در مورد برخورد بین دو کره جامد قابل قبول هستند؟

۰۲۹۰۹. به فرض اینکه جسم دوم در مسئله ۲۵۰۹ ساکن و جرم آن نسبت به جرم جسم اول خیلی بزرگ باشد، سرعت هر یک از آنها را بعد از برخورد و همچنین Q برخورد را پیدا کنید. از این نتیجه برای محاسبه ارتفاعی که یک جسم پس از رها شدن از ارتفاع h ، از زمین بلند می شود استفاده کنید. شخصاً این آزمایش را با یک تپله انجام دهید و e مربوط به آن را برآورد کنید.

۰۳۰۰۹. نشان دهید که زمانی که لازم است تا گلوله مسئله ۲۹۰۹ از بلند شدن باز بماند برابر است با

$$t = \sqrt{2h/g}(1+e)/(1-e).$$

۰۳۱۰۹. ثابت کنید که اگر گلوله مسئله ۲۹۰۹ در راستایی که با قایم زاویه α می سازد به زمین

برخورد کند، با سرعت $v' = v\sqrt{e^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$ و با زاویه β از زمین بلند می‌شود، که این زاویه از رابطه $\operatorname{tg} \beta = (1/e) \operatorname{tg} \alpha$ به دست می‌آید. از این نتایج برای مطالعه حرکت گلوله‌ای که با سرعت اولیه افقی v از روی یک میز می‌افتد استفاده کنید. به فرض اینکه گلوله چندین بار به زمین برخورد کند و بلند شود شکل مسیر آن را رسم کنید.

۳۲.۹. به‌طور مستقیم ثابت کنید که اگر در یک برخورد کشسان اندازه حرکتها و انرژیها ثابت باقی بمانند، داریم

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

که $\mathbf{u}$ بردار یکا در راستایی است که در آن راستا اندازه حرکت یکی از ذرات تغییر کرده است. این نتیجه به معنی آن است که در برخورد، مؤلفه سرعت نسبی در راستای تبادل اندازه حرکت تغییر علامت می‌دهد. این نتیجه را در مورد یک برخورد رو در رو به کار ببرید و آن را با نتیجه مسئله ۲۵.۹ برای $e = 1$ مقایسه کنید. [داهنمایی: دوقانون بقا را طوری بنویسید که در هر معادله تمام جملات مربوط به هر ذره در یک سمت قرار بگیرند.]

۳۳.۹. یک نوترون با انرژی 1 MeV ، در داخل (الف) دوتریوم، (ب) کربن، حرکت می‌کند. برآورد کنید در هر یک از این مواد نوترون چند برخورد رو در رو باید داشته باشد تا انرژی به مقدار گرمایی در حدود 250 eV کاهش یابد. احتمال نسبی گیراندازی نوترون توسط این مواد $1:10$ است. در کدام یک از این مواد احتمال بیشتری وجود دارد که نوترون قبل از کند شدن گیر بیفتد؟

۳۴.۹. نشان دهید که در برخورد ذره‌ای به جرم m_1 که با سرعت v_1 در چارچوب L حرکت می‌کند، با ذره‌ای به جرم m_2 که در همین چارچوب ساکن است، زاویه‌هایی که راستاهای ذره اول بعد از برخورد با راستای سرعت اولیه تشکیل می‌دهند از رابطه $\operatorname{tg} \theta = \sin \varphi / (\cos \varphi + 1/A)$ به دست می‌آیند. در این رابطه $A = m_2/m_1$ و زاویه‌های θ و φ به ترتیب به چارچوبهای L و C مربوط می‌شوند.

۳۵.۹. تحقیق کنید که اگر در مسئله پیش $m_1 = m_2$ باشد، $\theta = \varphi/2$ خواهد بود. در این صورت حداکثر مقدار θ چقدر است؟

۳۶.۹. با برگشت به مسئله ۳۴.۹، ثابت کنید که مقدار بیشینه θ برای یک مقدار اختیاری A از رابطه $\operatorname{tg} \theta = A/\sqrt{1-A^2}$ به دست می‌آید. حالتی را که A بزرگتر از یک، و نیز حالتی را که A کوچکتر از یک باشد مطالعه کنید.

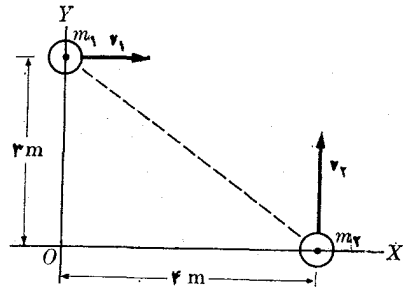
۳۷.۹. با تجزیه و تحلیل انحراف ذره‌های آلفایی که در هیدروژن حرکت می‌کنند، فیزیکدانان به‌طور تجربی دریافته‌اند که انحراف بیشینه ذره آلفا در چارچوب L در حدود 16° است. با استفاده از نتایج مسئله ۳۶.۹، جرم ذره آلفا را نسبت به جرم هیدروژن برآورد کنید. پاسخ به دست آمده را با مقدار واقعی که با روشهای دیگری به دست آمده است مقایسه کنید.

۳۸.۹. اگر انرژی جنبشی داخلی یک دستگاه دو ذره‌ای برابر $E_{k,CM}$ باشد، ثابت کنید بزرگی سرعت ذره‌ها نسبت به مرکز جرم عبارتند از

$$v_1 = [2m_2 E_{k,CM} / m_1(m_1 + m_2)]^{1/2}$$

و

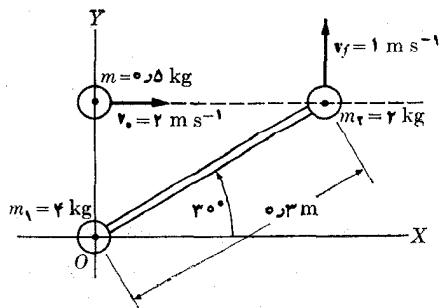
$$v_2 = [2m_1 E_{k,CM} / m_2(m_1 + m_2)]^{1/2}.$$



شکل ۳۲.۹

۳۹.۹. درمورد دوزده شکل ۳۲.۹ داریم $m_1 = 4\text{ kg}$, $m_2 = 6\text{ kg}$, $v_1 = u_x(2)\text{ ms}^{-1}$ و $v_2 = u_y(3)\text{ ms}^{-1}$. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه را نسبت به O و نسبت به CM تعیین کنید و رابطه بین آن دو را تحقیق کنید. (ب) انرژی جنبشی کل را نسبت به O و CM تعیین کنید، و رابطه بین آنها را بررسی کنید.

۴۰.۹. فرض کنید که دو ذره مسئله پیش توسط فنری کشسانی با ثابت $2 \times 10^{-3}\text{ Nm}^{-1}$ به هم مربوط شده‌اند و فنر در آغاز درحالت طبیعی خود می‌باشد. (الف) فنر چه تأثیری بر حرکت مرکز جرم دستگاه می‌گذارد؟ (ب) انرژی داخلی کل دستگاه چقدر است؟ آیا ثابت باقی می‌ماند؟ (ج) بعد از مدتی، فنر 4 cm فشرده می‌شود. انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل داخلی ذرات را پیدا کنید. (د) بزرگی سرعتها را نسبت به مرکز جرم حساب کنید. (آیا می‌توان راستای آنها را نیز تعیین کرد؟) همچنین (ه) بزرگی سرعت نسبی آنها و (و) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه را نسبت به O و CM پیدا کنید.



شکل ۳۳.۹

۴۱.۹. دوجرم همانند شکل ۳۳.۹ با میله سبکی به هم مربوط شده‌اند و روی یک سطح افقی کاملاً صیقلی بیحرکت می‌باشند. ذرهٔ سومی به جرم 5 kg به سرعت v به دستگاه نزدیک می‌شود و به جرم 2 kg برخورد می‌کند. اگر جرم 5 kg به بعد از برخورد مطابق شکل با سرعت v_f به طرف بالا حرکت کند، حرکت مرکز جرم دو ذره چگونه خواهد بود؟

۴۲.۹. انرژی پتانسیل ناشی از برهم‌کنش بین یک پروتون و یک اتم دوتریوم برابر است با $E_{p,int} = 2.3 \times 10^{-28} \text{ J}$ ، که در آن r فاصلهٔ بین دو ذره برحسب متر است. در لحظهٔ معینی پروتونی با انرژی 5 MeV در فاصلهٔ 10^{-12} m از یک اتم دوتریوم بیحرکت قرار دارد. هر دو ذره نسبت به دستگاه مختصات L در نظر گرفته شده‌اند. (الف) انرژی جنبشی و همچنین انرژی پتانسیل داخلی دستگاه را در چارچوبهای C و L پیدا کنید ($m_p = 1.0056 \text{ amu}$ و $m_d = 2.0147 \text{ amu}$). (ب) پس از مدت زمان معینی پروتون در فاصلهٔ 10^{-13} m از اتم دوتریوم قرار دارد. انرژی جنبشی دستگاه و همچنین انرژی داخلی را در چارچوبهای C و L پیدا کنید. (ج) در هر دو حالت بزرگی سرعت CM را تعیین کنید.

۴۳.۹. کمیت‌های مربوط به زمین و ماه و خورشید را بترتیب با شاخصهای پایین E ، M و S نشان دهید، و معادلهٔ (۳۴.۹) را به طور کامل برای دستگاههای متشکل از (الف) زمین و ماه، (ب) زمین، ماه و خورشید بنویسید.

۴۴.۹. گازی را در تمام طول مدتی که حجم آن از $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ تا $9 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ افزایش می‌یابد در فشار ثابت 20 atm ثابت نگه می‌دارند. چه مقدار انرژی به صورت گرما باید به آن داده شود تا (الف) انرژی داخلی ثابت باقی بماند؟ (ب) انرژی داخلی آن به اندازهٔ کار خارجی انجام شده افزایش یابد؟ نتیجه‌ها را برحسب کالری و ژول بنویسید.

۴۵.۹. گازی به گونه‌ای منبسط می‌شود که در هر لحظه رابطهٔ بین حجم و فشار آن به صورت $pV^\gamma = C$ می‌باشد. γ یک ثابت مناسب برای گاز است. ثابت کنید که کار انجام شده برای اینکه حجم گاز از V_1 به V_2 برسد برابر است با

$$W = (p_1 V_1 - p_2 V_2) / (\gamma - 1).$$

۴۶.۹. یادآوری می‌کنیم (مسئلهٔ ۸.۲) یک مول از هر ماده عبارت است از مقداری (برحسب گرم) برابر با جرم مولکولی (یا اتمی) برحسب amu . تعداد مولکولها در یک مول از هر ماده‌ای، برابرند و این تعداد عدد آووگادرو نامیده می‌شود و برابر است با

$$N_A = 6.0225 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

ثابت کنید که اگر N نمایش تعداد مولها باشد، معادلهٔ (۶۲.۹) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$pV = NRT.$$

در این رابطه $R = kN_A$ ثابت گاز نامیده می‌شود. همچنین ثابت کنید که

$$R = 8.3143 \text{ J}^\circ\text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

۴۷.۹. ثابت کنید که نتیجه مسئله ۴۶.۹ را می توان به صورت $p = \rho(RT/M)$ نیز نوشت. در اینجا ρ چگالی گاز و M جرم مولکولی آن (بر حسب kg) است.

۴۸.۹. حجم یک مول از هرگازی را در شرایط متعارفی دما و فشار (STP) پیدا کنید. همچنین ثابت کنید که در این شرایط، تعداد مولکولهای یک گاز در یک سانتی متر مکعب برابر است با $10^{19} \times 2.68 \times 10^{23}$. این عدد را عدد لوشمیت^۱ می نامند.

۴۹.۹. انرژی جنبشی میانگین یک مولکول از گازی در دمای 25°C چقدر است؟ این انرژی را بر حسب ژول و eV بنویسید. سرعت rms هر یک از گازهای (الف) هیدروژن، (ب) اکسیژن، (ج) ازت، چقدر است؟ توجه داشته باشید که مولکولهای این گازها دو اتمی اند. همین عمل را در مورد هلیوم (تک اتمی) و گاز کر بنیک انجام دهید.

۵۰.۹. انرژی داخلی یک مول گاز در دمای صفر درجه سلزیوس (273°K) پیدا کنید. آیا این انرژی به ماهیت گاز بستگی دارد؟ چرا؟

۵۱.۹. تغییر انرژی داخلی یک مول گاز کامل را هنگامی که دمای آن از 0°C به 100°C می رسد پیدا کنید. آیا لازم است چگونگی تغییر حجم و فشار گاز را نیز مشخص کنیم؟

۵۲.۹. فرایندی که در مسئله پیش بدان اشاره شد در حجم ثابت انجام می گیرد. (الف) کار انجام یافته به وسیله گاز چقدر است؟ (ب) گرمای جذب شده چقدر است؟

۵۳.۹. مسئله قبل را هنگامی که فرایند ذکر شده در مسئله ۵۱.۹ در فشار ثابت صورت گرفته باشد از نو حل کنید.

۵۴.۹. ثابت C را که در معادله (۵۱.۹)، مربوط به کار انبساط یک گاز در دمای ثابت، ظاهر می شود مشخص کنید. (الف) کار انجام گرفته توسط یک مول گاز کامل را هنگامی که حجم آن در دمای ثابت 0°C دو برابر می شود حساب کنید. (ب) تغییر انرژی داخلی و گرمای جذب شده را حساب کنید.

۵۵.۹. ثابت کنید اگر انرژی پتانسیل بر هم کنش بین دو ذره برابر $E_p = -Cr_{12}^{-n}$ باشد، داریم

$$r_{12} \cdot F_{12} = nE_p.$$

[دانهمایی: ذره ۱ را به عنوان مبدأ مختصات انتخاب کنید و مطالب بخش ۱۳.۷ را به کار ببرید.]

۵۶.۹. از نتایج مسئله پیش استفاده کنید و قضیه ویرال، معادله (۵۶.۹)، را به صورت زیر بنویسید:

$$E_{k, \text{ave}} = -\frac{1}{\gamma} [\sum_i F_i \cdot r_i + nE_p]_{\text{ave}}.$$

در این رابطه E_p مربوط به انرژی پتانسیل داخلی کل دستگاه است. توجه داشته باشید که اگر دستگاه منزوی باشد (یعنی هیچ نیروی خارجی روی آن اثر نکند) خواهیم داشت

۲/ $E_{k,ave} = -E_{p,ave}$. نتیجه اخیر را با معادله (۴۹.۸) مقایسه کنید.

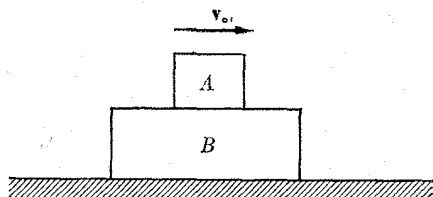
۵۷.۹. فرض کنید که نیروهای گرانشی جاذبه هستند و از قانون عکس مجذور پیروی می کنند (به فصل ۱۳ مراجعه کنید)، به گونه ای که انرژی پتانسیل کل منفی و $n = ۱$ است. با استفاده از نتایج مسئله ۵۶.۹ ثابت کنید که (الف) انرژی کل یک دستگاه منزوی منفی است؛ (ب) اگر دستگاه اتلاف انرژی داشته باشد (معمولاً بر اثر تابش)، انرژی پتانسیل باید کاهش یابد؛ (ج) در نتیجه، انرژی جنبشی دستگاه افزایش می یابد و موجب بالا رفتن دمای آن می شود. (این نتیجه ها در اختر فیزیک از اهمیت زیادی برخوردارند.)

۵۸.۹. امکان استفاده از قضیه ویریال را در مورد دستگاهی که در آن نیروهای داخلی دافعه هستند مورد مطالعه قرار دهید. فرض کنید که انرژی پتانسیل بین دو ذره برابر است با

$$E_p = +Cr_{12}^{-n}$$

۵۹.۹. جسمی به جرم ۱۰ kg با سرعت ۳ ms^{-1} روی یک سطح افقی لیز می خورد، تا آنجایی که نیروهای مالش آن را از حرکت باز می دارند. مقدار انرژی را که به حرکت داخلی مولکولی جسم و سطح منتقل شده است، بر حسب ژول و کالری بیان کنید. آیا می توان گفت که این انرژی به صورت گرما انتقال یافته است؟

۶۰.۹. در شکل ۳۴.۹ قطعات A و B دارای جرمهای m_1 و m_2 هستند. بین A و B یک نیروی مالش به بزرگی F وجود دارد، ولی B روی یک سطح افقی بدون مالش لیز می خورد. در آغاز A با سرعت v حرکت می کند در حالی که B ساکن است. اگر هیچ نیروی دیگری روی دستگاه اثر نکند، حرکت A کندتر می شود و B سرعت می گیرد تا جایی که دو جسم با سرعت یکسان v حرکت کنند. (الف) قبل از اینکه این امر اتفاق بیفتد A و B نسبت به سطح افقی چه مسافتی را می پیمایند؟ تغییر انرژی جنبشی دستگاه بر حسب مسافت پیموده شده به وسیله A نسبت به B ، چقدر است؟ (ج) اندازه حرکت کل چه وضعی پیدا می کند؟



شکل ۳۴.۹

۶۱.۹. سطح مقطع یک لوله افقی در یک ناحیه ۱۵ cm^2 و در ناحیه دیگری ۵ cm^2 است. سرعت آب در ناحیه اول ۵ ms^{-1} و فشار در ناحیه دوم برابر $۲ \times ۱۰^۵ \text{ Nm}^{-۲}$ است. (الف) سرعت جریان آب را در ناحیه دوم و فشار را در ناحیه اول را پیدا کنید. (ب) مقدار آبی که در ۵ دقیقه از یک سطح مقطع می گذرد چقدر است؟ (ج) انرژی کل را برای هر کیلوگرم آب حساب کنید.

۶۲.۹. مسئله پیش را در حالتی که لوله کج باشد و مقطع دوم ۲ m بالاتر از مقطع اول

قرارداد از نو حل کنید.

۶۳.۹. تحقیق کنید که معادله حرکت یک شاره به صورت برداری به شکل زیر است:

$$\frac{\rho d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \mathbf{f}_e.$$

۶۴.۹. اگر سوراخی در ظرفی وجود داشته باشد و سطح آبگون ظرف 2 m بالاتر از سوراخ باشد، ثابت کنید که سرعت خروج آبگون از سوراخ برابر است با $v = \sqrt{2gh}$. ظرفی به شکل استوانه به قطر 10 m و بلندی 20 m را در نظر بگیرید. سوراخی به مساحت 1 cm^2 در قاعده استوانه وجود دارد. آب به میزان $10^{-4}\text{ m}^3\text{s}^{-1}$ به داخل ظرف جریان دارد. (الف) تعیین کنید آب تا چه ارتفاعی در ظرف بالا می‌رود. (ب) بعد از اینکه آب به این ارتفاع رسید، ورود آب به داخل ظرف متوقف می‌شود. زمانی را که طول می‌کشد تا ظرف خالی شود پیدا کنید.

۶۵.۹. با به کار بردن معادله حرکت به دست آمده در مسئله ۶۳.۹، ثابت کنید که در یک شاره تراکم پذیر، قضیه برنولی به صورت

$$W = \left(\frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 \right) - \left(\frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 \right) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho}$$

درمی‌آید. W کاری است که نیروهای دیگر، علاوه بر نیروی گرانش، روی واحد جرم شاره انجام می‌دهند. [دانهمایی: $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ نیروی خارجی وارد بر واحد حجم را به نیروی $-\rho g \mathbf{u}_z$ ، مربوط به وزن، و نیروی دیگری که می‌تواند روی شاره اثر کند، تجزیه کنید، سپس معادله حرکت برآیند را به ρ تقسیم کنید و به طور اسکالر در $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ ضرب کنید. توجه داشته باشید که $d\mathbf{r} \cdot (\text{grad } p) = dp$ است.]

۶۶.۹. استوانه‌ای به بلندی h و سطح قاعده A به طور قائم در داخل شاره‌ای به چگالی ρ_f شناور است. بنا به معادله (۶۹.۹) فشار شاره با رابطه $p = p_0 - \rho_f g z$ بیان می‌شود. ثابت کنید که نیروی کل مؤثر روی استوانه در راستای پایین به بالا ناشی از فشار شاره، برابر است با $V \rho_f g$ ، که در اینجا V حجم استوانه است. این نتیجه را در مورد جسمی که دارای شکل مشخصی نیست تعمیم دهید. هر جسم را می‌توان به استوانه‌های جزئی قائم تقسیم کرد. (این نتیجه اصل ارشمیدوس^۱ را تشکیل می‌دهد و نیرو به نام نیروی شناوری خوانده می‌شود).

۶۷.۹. بنا به معادله (۶۲.۹)، ثابت کنید که اگر دمای گاز کاملاً ثابت بماند داریم $PV = \text{const}$ یا $P_1 V_1 = P_2 V_2$. این نتیجه به نام قانون بویل معروف است. همچنین ثابت کنید که اگر فشار ثابت بماند به دست می‌آید $V/T = \text{const}$ یا $V_1/T_1 = V_2/T_2$. این نتیجه به نام قانون شارل^۲ شناخته شده است. بالاخره نشان دهید

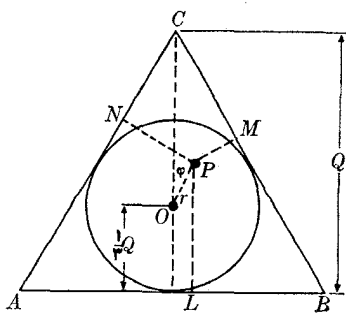
که اگر حجم ثابت باقی بماند، داریم $p/T = \text{const}$ یا $p_1/T_1 = p_2/T_2$. این نتیجه قانون گئی لوساک^۱ نامیده شده است. این قانونها مدتها پیش از اینکه مجموعاً در معادله (۶۲.۹) ترکیب شوند به طور تجربی به دست آمده بودند.

۶۸.۹. دستگاهی را با N ذره مشابه، هر یک به جرم m ، در نظر می گیریم (یک گاز دارای چنین حالتی است). نشان دهید که انرژی جنبشی میانگین یک ذره نسبت به ناظری که مشاهده می کند مرکز جرم دستگاه با سرعت v_{CM} حرکت می کند، برابر است با انرژی جنبشی میانگین ذره نسبت به چارچوب مرجع C به علاوه $\frac{1}{2}mv_{CM}^2$. [دانهمایی: از رابطه داده شده در معادله (۳۸.۹) استفاده کنید.]

۶۹.۹. فشار یک گاز با رابطه $p = \rho(RT/M)$ به چگالی آن مربوط می شود، که در آن M جرم مولکولی در مقیاس اتمی است (به مسئله ۴۷.۹ مراجعه کنید). (الف) با به کار بردن نتیجه بخش ۱۳.۹، نشان دهید که اگر گازی در حال تعادل باشد، فشار آن نسبت به ارتفاع مطابق رابطه $p = p_0 e^{-(Mg/RT)z}$ تغییر می کند. این رابطه را گاهی معادله توزیع جو^۲ می نامند، و از آن می توان برای برآورد تغییرات فشار جو با ارتفاع استفاده کرد. (ب) ثابت کنید که برای ارتفاعات کم، این رابطه به مقدار داده شده در پایان بخش ۱۴.۹ برای یک شارۀ غیر قابل تراکم تبدیل می شود.

۷۰.۹. بمبی هنگام انفجار به سه قطعه برابر هر یک به جرم m تقسیم می شود. در این انفجار انرژی Q آزاد می شود. در این حالت، قانونهای بقای اندازه حرکت و انرژی، اندازه حرکت و انرژی هر یک از قطعه ها را به طور منحصر به فرد مشخص نمی کنند. با ارجاع فرایند به چارچوب مرجع C ، ثابت کنید که (الف) انرژی جنبشی قطعات را می توان با فاصله های نقطه ای مانند P از اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع به ارتفاع Q نمایش داد؛ (ب) بقای اندازه حرکت ایجاب می کند که نقطه P در داخل دایره محاطی مثلث (به شعاع $Q/3$) قرار گیرد. این طرز نمایش نمودار دالیتز^۳ نامیده می شود (شکل ۳۵.۹)، و به طور گسترده در توصیف و پاشی یک ذره بنیادی به سه قطعه به کار می رود.

[دانهمایی: برای اثبات (ب) توجه داشته باشید که در چارچوب C اندازه



شکل ۳۵.۹

حرکت کل برابر صفر است و در نتیجه $p_1 + p_2 \geq p_3$ می باشد. همچنین می توان سه انرژی را به صورت

$$E_{k, 1} = PN = \frac{1}{3}Q + r\cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$E_{k, 2} = PM = \frac{1}{3}Q + r\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$E_{k, 3} = PL = \frac{1}{3}Q + r\cos\varphi$$

نوشت.

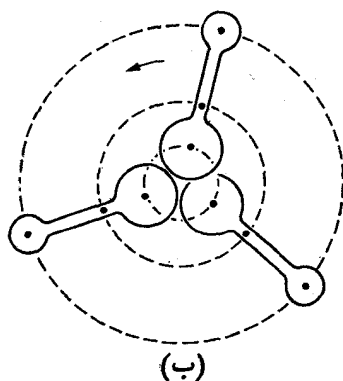
دینامیک جسم سخت

مقدمه	۱.۱۰
اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم سخت	۲.۱۰
محاسبه گشتاور لختی	۳.۱۰
معادله حرکت چرخشی یک جسم سخت	۴.۱۰
انرژی جنبشی چرخش	۵.۱۰
حرکت ژيروسکوپی	۶.۱۰

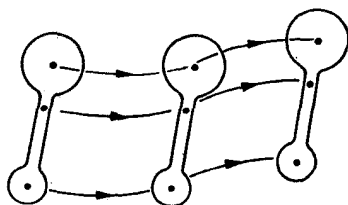
۱۰۱۰ مقدمه

یک مورد خاص و مهم دستگاههای متشکل از ذرات زیاد، جسم سخت است، یعنی جسمی که هنگام وارد شدن نیرو یا یک گشتاور نیرو، فاصله بین ذرات تشکیل دهنده آن تغییر نمی‌کند. بنا براین جسم سخت هنگام حرکت شکل خود را حفظ می‌کند.

می‌توان در یک جسم سخت دو نوع حرکت تشخیص داد: حرکت انتقالی، و آن وقتی است که همه ذرات مسیرهای موازی می‌پیمایند بگونه‌ای که خطهایی که دو نقطه دلخواه از جسم را به هم متصل می‌کنند همیشه موازی وضع اولیه باقی می‌مانند (شکل ۱۰۱۰ الف). دیگری حرکت چرخشی است دور یک محور، و آن هنگامی است که ذرات جسم دور یک خط که محور چرخش خوانده می‌شود، دایره‌هایی رسم می‌کنند (شکل ۱۰۱۰ ب). محور می‌تواند ثابت باشد، یا در جریان حرکت راستایش نسبت به جسم تغییر کند.



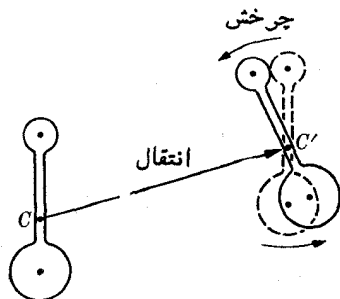
(ب)



(الف)

شکل ۱۰۱۰. حرکت یک جسم سخت: (الف) حرکت انتقالی، (ب) حرکت چرخشی.

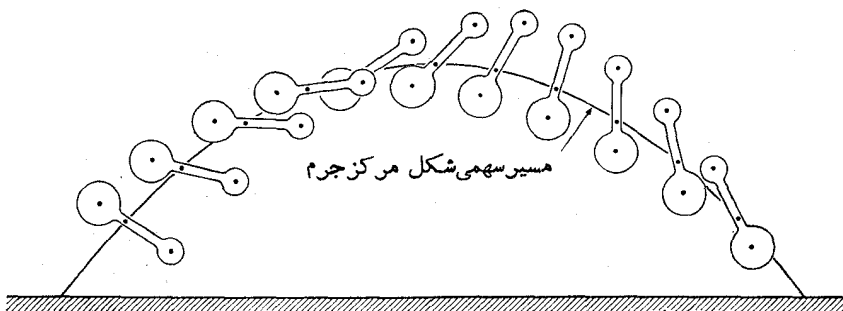
در حالت کلی، حرکت یک جسم سخت را می‌توان ترکیبی از یک انتقال و یک چرخش در نظر گرفت. یعنی اینکه، همیشه امکان دارد چارچوب مرجعی پیدا کرد که دارای حرکت انتقالی بدون چرخش باشد، و در آن حرکت جسم منحصراً چرخشی به نظر



شکل ۲۰۱۰. حرکت کلی یک جسم سخت

برسد. به عنوان مثال، در شکل ۲۰۱۰، حرکت جسم سختی را که از وضع ۱ به وضع ۲ می‌رسد، می‌توان یک انتقال و یک چرخش در نظر گرفت که اولی با جابجایی CC' نمایش داده می‌شود که مرکز جرم را در دو حالت به هم وصل می‌کند، و دومی چرخش دور محوری که از مرکز جرم C' می‌گذرد.

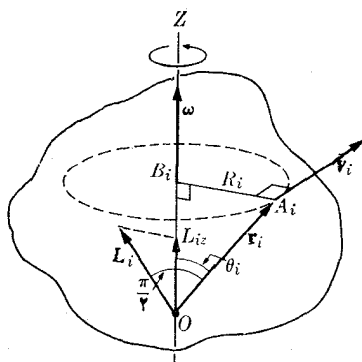
بنا به معادله (۹.۹)، $M d\mathbf{v}_{CM}/dt = \mathbf{F}_{ext}$ ، حرکت مرکز جرم معادل با حرکت یک ذره تنها است که جرم آن برابر جرم تمام جسم سخت است و بر آن نیرویی مساوی با برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم اثر می‌کند. این حرکت را می‌توان مطابق همان روشهایی که در فصل ۷ در مورد دینامیک یک ذره شرح داده شد، تجزیه و تحلیل کرد، بنا براین به تکنیک ویژه‌ای نیاز ندارد. در این فصل می‌خواهیم حرکت چرخشی یک جسم سخت را دور محوری که از نقطه ثابتی در یک دستگاه لخت، یا از مرکز جرم جسم می‌گذرد مورد مطالعه قرار دهیم. در حالت اول، برای بررسی حرکت از معادله (۱۹.۹)، $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$ ، استفاده می‌کنیم (که در آن $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\tau}$ هر دو نسبت به نقطه ثابت محاسبه می‌شوند)، در صورتی که در حالت دوم باید از معادله (۲۵.۹)، $d\mathbf{L}_{CM}/dt = \boldsymbol{\tau}_{CM}$ ، استفاده کرد (شکل ۳۰۱۰).



شکل ۳۰۱۰. حرکت یک جسم سخت بر اثر نیروی گرانی. مرکز جرم یک مسیر سهمی را طی می‌کند که مربوط به حرکت ذره‌ای است به جرم M که تحت تأثیر نیروی Mg قرار دارد، در حالی که جسم حول CM می‌چرخد. چون نیروی وزن به مرکز جرم اثر می‌کند، گشتاور آن نسبت به این نقطه برابر صفر است و اندازه حرکت زاویه‌ای جسم نسبت به CM در مدت حرکت ثابت می‌ماند.

۲۰۱۰ اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم سخت

جسم سختی را که با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ دور محوری مانند Z می‌چرخد در نظر می‌گیریم (شکل ۴۰۱۰). هر نقطه از جسم دایره‌ای رسم می‌کند که مرکز آن روی محور Z قرار دارد. به عنوان مثال، نقطه A_i دایره‌ای به شعاع $R_i = A_i B_i$ را با سرعت $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ می‌پیماید که در آن $\mathbf{r}_i$ بردار مکان نقطه A_i نسبت به مبدأ O است. (مبدأ را باید یک نقطه ثابت در



شکل ۴.۱۰. اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم سخت چرخان

چارچوب لخت یا مرکز جرم جسم انتخاب کرد). بنا به معادله (۴.۸.۵)، بزرگی سرعت برابر است با

$$v_i = \omega r_i \sin \theta_i = \omega R_i.$$

توجه داشته باشید که نوشتیم ω ، و نه ω_i ، زیرا سرعت زاویه‌ای برای کلیه نقاط جسم سخت یکسان است. اندازه حرکت زاویه‌ای ذره A_i نسبت به مبدأ O برابر است با

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

و راستای آن عمود است بر سطح حاصل از بردارهای $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{v}_i$ ، و در صفحه‌ای که از $\mathbf{r}_i$ و محور Z می‌گذرد قرار دارد؛ بنا بر این با محور چرخش Z زاویه $\theta_i - \pi/2$ می‌سازد. بزرگی بردار $\mathbf{L}_i$ برابر است با $m_i r_i v_i$ و تصویر آن روی خطی موازی با محور Z برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} L_{iz} &= (m_i v_i r_i) \cos (\pi/2 - \theta_i) \\ &= m_i (r_i \sin \theta_i) (\omega R_i) = m_i R_i^2 \omega. \end{aligned}$$

این نتیجه هم ارز معادله (۴.۳.۷) است که برای ذره‌ای که روی یک دایره حرکت می‌کند به دست آوردیم. تصویر اندازه حرکت زاویه‌ای کل جسم در حرکت چرخشی آن روی محور Z برابر است با

$$\begin{aligned} L_z &= L_{1z} + L_{2z} + L_{3z} + \dots = \sum_i L_{iz} \\ &= (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots) \omega = (\sum_i m_i R_i^2) \omega. \end{aligned} \quad (۴.۱۰)$$

کمیت

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots = \sum_i m_i R_i^2 \quad (۴.۱۹)$$

گشتاور لختی^۱ جسم سخت نسبت به محور چرخش Z نامیده می‌شود و مقدار آن از جمع

حاصل ضربهای جرم هر ذره در مجذور فاصله اش از محور به دست می آید. گشتاور لختی کمیت بسیار مهمی است که در بیشتر روابط مربوط به حرکت چرخشی یک جسم لخت ظاهر می شود. بنابر این معادله (۳.۱۰) را می توان به صورت زیر نوشت:

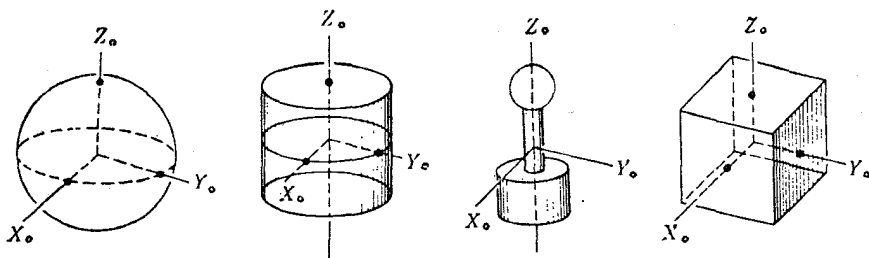
$$L_z = I\omega. \quad (3.10)$$

اندازه حرکت زاویه ای کل یک جسم سخت برابر است با

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots = \sum_i L_i$$

و در حالت کلی این بردار موازی با محور چرخش نیست، زیرا قبلاً گفتیم که تک تک اندازه حرکت های زاویه ای L_i که در جمع بالا وارد می شوند موازی محور نیستند.

در اینجا ممکن است برای دانشجوی این سؤال مطرح شود که آیا برای هر جسم سخت محور چرخشی وجود دارد که اندازه حرکت زاویه ای نسبت به آن موازی این محور باشد؟ پاسخ این سؤال مثبت است. می توان ثابت کرد که برای هر جسمی، هر شکلی که داشته باشد، سه راستای عمود بر هم وجود دارند که اندازه حرکت زاویه ای نسبت به آنها موازی محور چرخش است. این راستاها محورهای اصلی لختی^۱ خوانده می شوند. گشتاورهای لختی مربوط به این محورها، گشتاورهای لختی اصلی^۲ نام دارند و با I_1 ، I_2 و I_3 نشان داده می شوند. ما در اینجا محورهای اصلی را با X ، Y ، Z نشان می دهیم؛ این محورها یک چارچوب مرجع متصل به جسم را تشکیل می دهند، بنابراین در حالت کلی نسبت به ناظر در چرخش هستند. هنگامی که جسم دارای نوعی تقارن باشد، محورهای اصلی با بعضی از محورهای تقارن منطبق می شوند. به عنوان مثال، در یک کره هر محوری که از مرکز آن بگذرد یک محور اصلی است. در یک استوانه، و در حالت کلی برای تمام اجسامی که تقارن استوانه ای دارند، محور تقارن و نیز کلیه محورهای عمود بر محور تقارن، محورهای اصلی را تشکیل می دهند. برای یک مکعب مستطیل، سه محور اصلی بر رویه ها عمودند و از مرکز جسم می گذرند. این محورها در شکل ۵.۱۰ نشان داده شده اند.



شکل ۵.۱۰. محورها ی اصلی در اجسام متقارن

هنگامی که جسم دور یک محور اصلی لختی می چرخد، اندازه حرکت زاویه ای کلی موازی سرعت زاویه ای ω است که همیشه در راستای محور چرخش قرار دارد، و به جای معادله اسکالر (۳.۱۰) که برای تصویرهای L روی محور Z معتبر است، می توان رابطه

برداری زیر را نوشت:

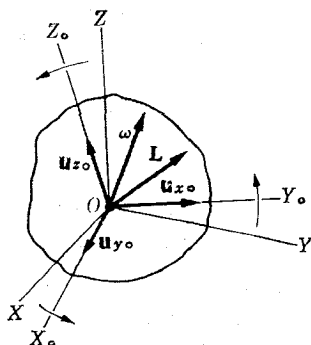
$$L = I\omega \quad (۴.۱۰)$$

که در آن I گشتاور لختی اصلی مربوطه است. بر این نکته تأکید می‌کنیم که این رابطه برداری تنها برای چرخش دور محور اصلی لختی اعتبار دارد.

در حالت کلیتر، در چرخش یک جسم سخت دور یک محور اختیاری، می‌توان اندازه حرکت زاویه‌ای L را نسبت به محورهای اصلی لختی متحرک X_0, Y_0, Z_0 (شکل ۴.۱۰) به صورت زیر نوشت:

$$L = u_{x_0} I_1 \omega_{x_0} + u_{y_0} I_2 \omega_{y_0} + u_{z_0} I_3 \omega_{z_0} \quad (۵.۱۰)$$

در این رابطه $u_{x_0}, u_{y_0}, u_{z_0}$ بردارهای یکا در راستاهای X_0, Y_0, Z_0 و $\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}$ تصاویر ω روی همین محورها هستند. در این حالت، چنانکه قبلاً گفتیم، L و ω در راستاهای مختلفی قرار دارند. برتری استفاده از این رابطه برای L در این است که I_1, I_2, I_3 کمیت‌های



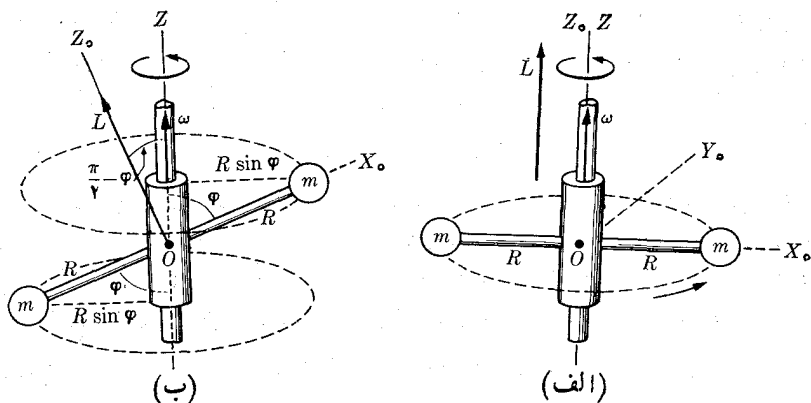
شکل ۴.۱۰. محورهای متصل به جسم و محورهای ثابت در آزمایشگاه

ثابتی هستند که می‌توان برای هر جسم سختی مقادیر آنها را به دست آورد. با وجود این، چون محورهای $u_{x_0}, u_{y_0}, u_{z_0}$ همراه جسم می‌چرخند، راستای آنها لزوماً ثابت نیست. دانشجو می‌تواند بررسی کند که وقتی چرخش جسم به دور یک محور اصلی باشد (دو تا از تصاویر ω برای ω برابر صفر باشند)، معادله (۵.۱۰) به معادله (۴.۱۰) تبدیل می‌شود.

مثال ۷.۱۰. اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاهی را که در شکل ۷.۱۰ نشان داده شده است، حساب کنید. این دستگاه از دو کره یکسان به جرم m تشکیل شده است که بر بازوهای سوار بر پایه‌ای متصل اند و پایه می‌تواند حول محور Z بچرخد. از جرم بازوها صرف نظر می‌شود.

حل: شکل ۷.۱۰ (الف) حالتی را نشان می‌دهد که در آن بازوها بر محور چرخش عمودند. هر کره دایره‌ای به شعاع R را با سرعت $v = R\omega$ می‌پیماید. در این حالت، اندازه حرکت زاویه‌ای هر کره نسبت به نقطه O برابر $mR^2\omega$ است و در راستای محور Z ها

قرار دارد (به شکل ۲۲.۷ مراجعه کنید). بنا بر این اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه برابر $L = 2mR^2\omega$ و در راستای محور Z هاست، که آن را می‌توان به صورت برداری نوشت، یعنی دستگاه دور یک محور اصلی می‌چرخد. در واقع، محورهای $L = 2mR^2\omega$



شکل ۷.۱۰

اصلی آنهایی هستند که در شکل نشان داده شده‌اند و Z_0 بر Z منطبق است. (به دلیل مقایسه بودن دستگاه هر محور عمود بر X_0 یک محور اصلی است.) توجه داشته باشید که $I = 2mR^2$ گشتاور لختی دور محور Z_0 است و رابطه $L = I\omega$ در این حالت برقرار است.

شکل ۷.۱۰ (ب) حالتی را نشان می‌دهد که دو بازو با محور چرخش Z زاویه φ می‌سازند، به گونه‌ای که ω با محور اصلی موازی نیست. شعاع دایره‌ای که هر کره رسم می‌کند برابر است با $R \sin \varphi$ ، در نتیجه بزرگی سرعت هر کدام برابر $\omega (R \sin \varphi)$ است. در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای هر کره نسبت به O برابر است با $mR(R\omega \sin \varphi)$ و بر خط واصل دو کره عمود است و در صفحه Z و X_0 قرار دارد. اندازه حرکت زاویه‌ای کل برابر است با مجموع آنها، یعنی $\omega (2mR^2 \sin \varphi)$ و با محور چرخش زاویه $\varphi - \pi/2$ می‌سازد. بدین طریق، در این حالت دستگاه دور محور اصلی نمی‌چرخد، همچنانکه از شکل هندسی دستگاه می‌توان مشاهده کرد. دقت کنید که بردار L با همان سرعت دستگاه دور محور Z می‌چرخد (یا چنانکه گاهی گفته می‌شود حرکت تقدیمی^۱ دارد).

تصویر L روی راستای محور چرخش برابر است با

$$L_z = L \cos (\pi/2 - \varphi) = (2mR \sin^2 \varphi) \omega.$$

این رابطه با معادله (۳.۱۰) تطبیق می‌کند زیرا $I = 2m(R \sin \varphi)^2$ گشتاور لختی دستگاه نسبت به محور Z هاست.

۳.۱۰ محاسبه گشتاور لختی

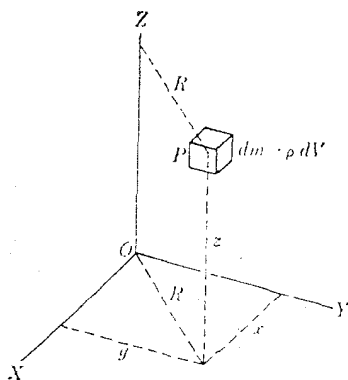
اکنون در مورد روشهای محاسبه گشتاور لختی گفتگو می‌کنیم، زیرا در جریان مطالعه این فصل بارها به این کمیت برخورد خواهیم کرد. ابتدا خاطر نشان می‌کنیم که یک جسم سخت از تعداد بسیار زیادی ذره تشکیل شده است، به گونه‌ای که در معادله (۲.۱۰) به جای جمع باید از انتگرال استفاده کرد: $I = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 dm$ ؛ یا اگر ρ چگالی جسم باشد، بنا به معادله (۲.۲)، $dm = \rho dV$ است و داریم

$$I = \int \rho R^2 dV. \quad (۶.۱۰)$$

اگر جسم همگن باشد، چگالی آن ثابت است، و به جای معادله (۶.۱۰) می‌توان نوشت $I = \rho \int R^2 dV$. در این صورت انتگرال به یک سازه هندسی تبدیل می‌شود، یعنی برای تمام اجسامی که دارای شکل و اندازه یکسان باشند یکسان است. بنا به شکل ۸.۱۰ داریم $R^2 = x^2 + y^2$ ، در نتیجه گشتاور لختی نسبت به محور Z ها برابر است با

$$I_z = \int \rho (x^2 + y^2) dV. \quad (۷.۱۰)$$

توصیه می‌کنیم که دانشجو رابطه‌های مربوط به I_x و I_y را بنویسد.



شکل ۸.۱۰

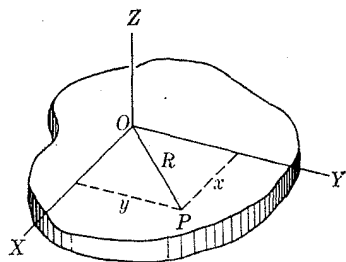
اگر جسم، چنانکه شکل ۹.۱۰ نشان می‌دهد، به صورت یک ورقه نازک باشد، گشتاور لختی را نسبت به محورهای X و Y می‌توان به این صورت نوشت:

$$I_x = \int \rho y^2 dV \quad \text{و} \quad I_y = \int \rho x^2 dV$$

زیرا مختصه Z اساساً برابر صفر است. مقایسه این روابط با معادله (۷.۱۰) نشان می‌دهد که در این حالت

$$I_z = I_x + I_y.$$

این نتیجه تنها در مورد ورقه‌های نازک اعتبار دارد.

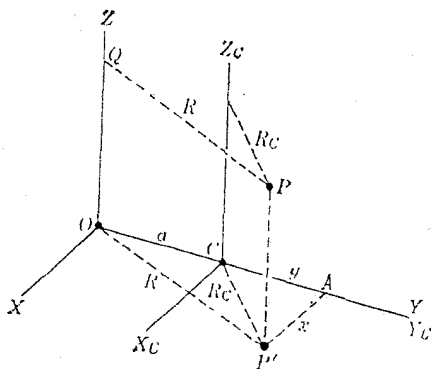


شکل ۹.۱۰

گشتاور لختی نسبت به محورهای موازی با فرمول ساده‌ای به هم مربوط می‌شوند. فرض کنیم Z یک محور اختیاری و Z_C محور موازی با Z باشد که از مرکز جرم جسم می‌گذرد (شکل ۱۰.۱۰). اگر a فاصله دو محور باشد، رابطه زیر، که به قضیه اشتاینر معروف است،* برقرار است:

$$I = I_C + Ma^2 \quad (۱۰.۱۰)$$

در اینجا I و I_C بترتیب گشتاور لختی جسم نسبت به محورهای Z و Z_C ، و M جرم جسم است. برای اثبات این رابطه، محورهای X_C ، Y_C و Z_C را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مبدأ آنها در نقطه C ، مرکز جرم، و محور Y_C در صفحه Z و Z_C قرار گیرد. محورهای XYZ را طوری انتخاب می‌کنیم که Y بر Y_C منطبق باشد. یک نقطه اختیاری از جسم M است. در این صورت، با توجه به اینکه، بنا به شکل ۱۰.۱۰، $P'A$ عمود بر Y_C و $OC = a$ و $CA = y$ ، $P'A = x$ داریم



شکل ۱۰.۱۰

5. Steiner's theorem

* این قضیه در کتابهای مأخذ فرانسوی به نام «قضیه هویگنز» شناخته شده است. (۴)

$$R_c^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + (y+a)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2ya + a^2 \\ &= R_c^2 + 2ya + a^2. \end{aligned}$$

گشتاور لختی نسبت به محور Z ها برابر است با

$$\begin{aligned} I &= \sum m R^2 = \sum m (R_c^2 + 2ya + a^2) \\ &= \sum m R_c^2 + 2a(\sum my) + a^2 \sum m. \end{aligned}$$

جمله اول گشتاور لختی I_c نسبت به محور Z_c و در جمله آخر، $\sum m = M$ جرم کل جسم است. در نتیجه

$$I = I_c + 2a \sum my + Ma^2. \quad (9.10)$$

برای محاسبه جمله میانی، یادآوری می‌کنیم که بنا به معادله (۲۱.۴)، مکان مرکز جرم چنین نوشته می‌شود $y_{CM} = \sum my / \sum m$. ولی در اینجا $y_{CM} = 0$ است، زیرا مرکز جرم بر مبدأ چار چوب $X_c Y_c Z_c$ منطبق است. بنا بر این داریم $\sum my = 0$ و معادله (۹.۱۰) به صورت معادله (۸.۱۰) در می‌آید، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود. گشتاور لختی را باید به صورت حاصل ضرب یکایی از جرم و مجذور یکایی از فاصله بیان کرد. بدین ترتیب در دستگاه یکاهای MKSC گشتاور لختی بر حسب یکای $m^2 kg$ بیان می‌شود.

شعاع ژیراسیون^۱ یک جسم با نماد K ، کمیتی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

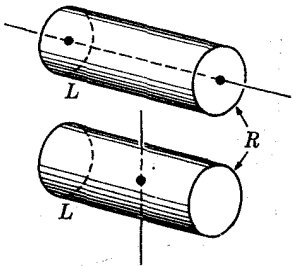
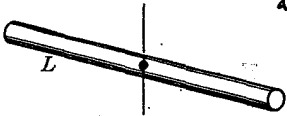
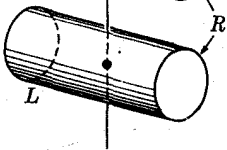
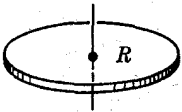
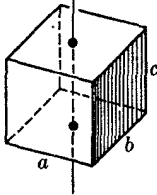
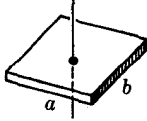
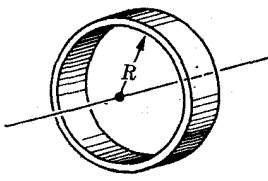
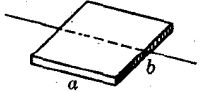
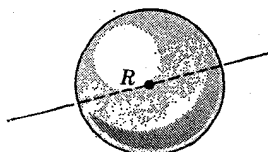
$$I = MK^2 \quad \text{یا} \quad K = \sqrt{I/M} \quad (10.10)$$

که در آن I گشتاور لختی و M جرم جسم است. K نمایش فاصله‌ای از محور است که اگر تمام جرم جسم در آنجا متمرکز شود گشتاور لختی تغییر نمی‌کند. K کمیت بسیار مفیدی است، زیرا آن را می‌توان برای اجسام همگن، تنها از روی شکل هندسی شان تعیین کرد. بنا بر این برای K جدولی درست شده است که در محاسبه گشتاور لختی بسیار کمک می‌کند. جدول ۱۰.۱۰ مجذور شعاع ژیراسیون را برای چند شکل به دست می‌دهد.

مثال ۲.۱۰. گشتاور لختی یک میله نازک همگن را نسبت به محوری که بر میله عمود است و (الف) از انتهای میله، (ب) از مرکز جرم میله می‌گذرد، حساب کنید.
حل: (الف) فرض کنیم L طول میله AB و S سطح مقطع آن باشد، که خیلی کوچک فرض می‌شود (شکل ۱۱.۱۰). میله را به قطعات کوچک به طول dx تقسیم می‌کنیم. حجم هر قطعه برابر $S dx$ و فاصله هر جزء از محور y برابر $x = R$ می‌شود. با استفاده از معادله (۶.۱۰) و با توجه به اینکه چگالی ثابت است، می‌توان نوشت:

$$I_A = \int_0^L \rho x^2 (S dx) = \rho S \int_0^L x^2 dx = \rho S L^3 / 3$$

جدول ۱۰.۱۰. شعاع ژیراسیون چند جسم با شکلهای هندسی ساده

K^2	محور	K^2	محور
$\frac{RL^2}{4}$	استوانه 	$\frac{L^2}{12}$	میله 
$\frac{R^2}{2} + \frac{L^2}{12}$		$\frac{R^2}{2}$	دیسک 
$\frac{a^2 + b^2}{12}$	مکعب مستطیل 	$\frac{R^2}{2}$	
$\frac{a^2 + b^2}{12}$	ورقه مستطیل شکل 	R^2	حلقه 
$\frac{b^2}{12}$		$\frac{2R^2}{5}$	کره 

چون SL برابر حجم میله و ρSL مساوی جرم آن می باشد، در نتیجه داریم

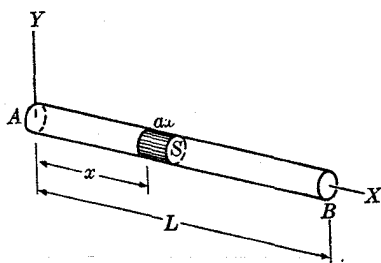
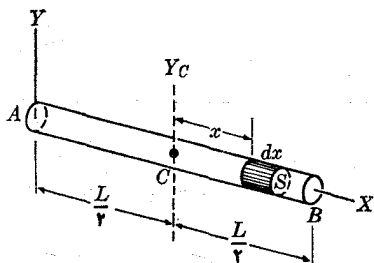
$$I_A = \frac{1}{3}ML^2.$$

با مقایسه این رابطه با معادله (۱۰.۱۰) شعاع ژیراسیون برابر $K^2 = L^2/3$ به دست می آید.

(ب) برای محاسبه گشتاور لختی نسبت به محور Y_C که از C می گذرد، می توان با سه شیوه متفاوت عمل کرد: یک شیوه بسیار ساده این است که فرض کنیم میله به دو قسمت تقسیم شده است که هر قسمت دارای جرم $M/2$ و طول $L/2$ می باشد و انتهای آنها

در نقطه C با هم در تماس اند. در این صورت با استفاده از نتیجه قسمت (الف) برای میله به دست می آید

$$I_C = 2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}M\right) \left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2.$$



شکل ۱۱.۱۰

روش دیگر این است که مثل قسمت (الف) عمل کنیم ولی انتگرال را بین $-L/2$ و $+L/2$ محاسبه کنیم، زیرا این بار مبدأ در مرکز میله قرار دارد. حل از این روش را به عهده دانشجو واگذار می کنیم. سومین روش به کار بردن قضیه اشتاینر یا معادله (۸.۱۰) است. در این حالت نوشته می شود $I_A = I_C + M(L/2)^2$ زیرا $a = L/2$ است. بنابراین داریم

$$I_C = I_A - \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{12} ML^2.$$

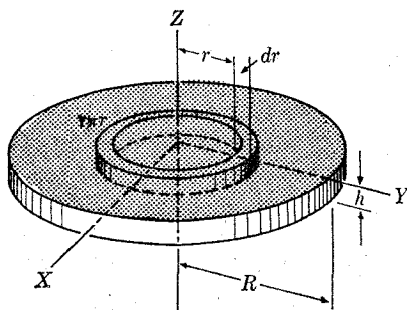
مثال ۳.۱۰. گشتاور لختی یک دیسک همگن را نسبت به (الف) محوری عمود بر دیسک که از مرکز آن می گذرد، (ب) محوری که بویکی از قطرهای دیسک منطبق است، حساب کنید. حل: (الف) تقارن شکل جسم ایجاب می کند که جزء حجم را حلقه ای به شعاع r و پهنای dr انتخاب کنیم (شکل ۱۲.۱۰). بدین طریق، اگر h کلفتی دیسک باشد، حجم برابر است با $dV = (\pi r^2)(dr)h = \pi r^2 h dr$. همه نقاط حلقه در فاصله r از محور Z قرار دارند. در نتیجه، با به کار بردن معادله (۶.۱۰) به دست می آید

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \rho r^2 (\pi r^2 h dr) \\ &= \pi \rho h \int_0^R r^4 dr = \frac{1}{5} \pi \rho h R^5. \end{aligned}$$

چون $\pi R^2 h$ برابر حجم دیسک و $M = \rho(\pi R^2 h)$ جرم کل دیسک می باشد، بنا بر این

$$I = \frac{1}{5} MR^2$$

و شعاع ژیراسیون برابر است با $K^2 = R^2/5$.



شکل ۱۲.۱۰

(ب) برای به دست آوردن گشتاور لختی نسبت به محوره‌های X و Y می‌توان از انتگرال‌گیری مستقیم استفاده کرد (به عنوان جزء حجم می‌توان نوارهای موازی یا عمود بر محوره‌های مربوط را به کار برد) ولی تقارن مسئله امکان می‌دهد از شیوه ساده‌تری استفاده شود. در این حالت، واضح است که $I_x = I_y$ و در نتیجه، بنا به فرمول ورقه نازک، داریم

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x \quad \text{و}$$

$$I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} MR^2.$$

۴.۱۰ معادله حرکت چرخشی یک جسم سخت

معادله (۲۱.۹) رابطه‌ای است بین اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه ذرات و گشتاور کل نیروهای وارد به ذرات، هرگاه این گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای هر دو نسبت به نقطه‌ای محاسبه شوند که در یک دستگاه لخت ساکن است. به گفته دیگر،

$$\frac{dL}{dt} = \tau. \quad (۱۱.۱۰)$$

در این رابطه، $L = \sum_i L_i$ اندازه حرکت زاویه‌ای کل و $\tau = \sum_i \tau_i$ گشتاورکل نیروهای خارجی است. بدیهی است این معادله برای یک جسم سخت، که مورد ویژه‌ای از دستگاه ذرات است نیز برقرار است. بنا بر این معادله (۱۱.۱۰) معادله اساسی برای بحث در حرکت چرخشی یک جسم را تشکیل می‌دهد. ابتدا این معادله را در مورد یک جسم سخت به کار می‌بریم که دور یک محور اصلی که یک نقطه آن در یک دستگاه لخت ثابت است می‌چرخد. در این صورت، بنا به معادله (۴.۱۰) داریم $L = I\omega$. گشتاور نیروهای خارجی τ باید گشتاور نسبت به نقطه ثابت محور اصلی باشد. بنابراین معادله (۱۱.۱۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$d(I\omega)/dt = \tau \quad (۱۲.۱۰)$$

اگر محورها نسبت به جسم ثابت بمانند، گشتاور لختی ثابت می‌ماند، و خواهیم داشت

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau \quad \text{یا} \quad I\alpha = \tau \quad (۱۳.۱۰)$$

که در آن $\alpha = d\omega/dt$ شتاب زاویه‌ای جسم است. مقایسهٔ معادله‌های (۱۲.۱۰) و (۱۳.۱۰) با معادله‌های (۱۴.۷) و (۱۵.۷) شباهت زیادی را بین چرخش یک جسم دور یک محور اصلی و حرکت یک ذره نشان می‌دهد. به جای جرم m گشتاور لختی I ، به جای سرعت v سرعت زاویه‌ای ω ، به جای شتاب a شتاب زاویه‌ای α ، و بالاخره به جای نیروی F گشتاور τ آمده است.

به عنوان مثال، اگر $\tau = 0$ باشد، معادلهٔ (۱۲.۱۰) نشان می‌دهد که $I\omega = \text{const}$ است؛ اگر I گشتاور لختی ثابت باشد ω نیز ثابت می‌ماند، به گفتهٔ دیگر، اگر بر جسمی که دور یک محور اصلی می‌چرخد هیچگونه گشتاور نیروی خارجی اثر نکند سرعت زاویه‌ای آن ثابت خواهد بود.

بیان فوق‌را می‌توان قانون لختی در حرکت چرخشی در نظر گرفت. [هنگامی که گشتاور لختی متغیر باشد، وضعی که ممکن است برای یک جسم غیر سخت پیش بیاید، شرط $I\omega = \text{const}$ موجب می‌شود که اگر I افزایش (یا کاهش) پیدا کند ω کاهش (یا افزایش) پیدا کند. این نتیجه کاربردهای متعددی دارد.]

در مورد جسمی که چرخش آن دور محور اصلی نیست، باز هم از معادلهٔ (۳.۱۰) داریم $dL_z/dt = \tau_z$ ، یا اگر سو و راستای محور نسبت به جسم ثابت باشد به گونه‌ای که I ثابت بماند، در این صورت به دست می‌آید

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \quad (14.10)$$

اختلاف این رابطه با معادلهٔ (۱۳.۱۰) در این است که τ_z تصویر گشتاور نیروهای خارجی روی محور چرخش است، نه گشتاور کل. در این حالت به غیر از مؤلفهٔ τ_z ، ممکن است گشتاورهای دیگر نیز لازم باشند تا جسم را در یک وضع ثابت به محور چرخش نگه دارند (به مثال ۷.۱۰ مراجعه کنید).

وقتی که محور چرخش نقطهٔ ثابتی در یک دستگاه لخت ندارد، نمی‌توان معادلهٔ (۱۱.۱۰) را به کار برد، و باید اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور نیرو را نسبت به مرکز جرم جسم حساب کرد. بنابراین، لازم می‌آید از معادلهٔ (۲۵.۹)، یا

$$\frac{dL_{CM}}{dt} = \tau_{CM} \quad (15.10)$$

استفاده کنیم. اگر چرخش دور یک محور اصلی صورت بگیرد، این معادله به صورت زیر در می‌آید:

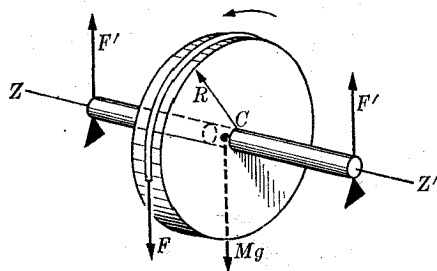
$$I_C \frac{d\omega}{dt} = \tau_{CM}$$

اگر $\tau_{CM} = 0$ باشد، یعنی حالتی که نیروی وارد بر جسم تنها وزن آن باشد، نتیجه می‌شود که ω ثابت است (به شکل ۳.۱۰ مراجعه کنید).

مثال ۴.۱۰. دیسکی به شعاع m ۵ و جرم kg ۲۰ می‌تواند آزادانه دور یک محور افقی

که از مرکز آن می‌گذرد بچرخد. به وسیله نخ‌ی که دور دیسک پیچیده است نیرویی برابر با 9.8 N به آن وارد می‌شود. شتاب زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای دیسک را بعد از 2 ثانیه پیدا کنید.

حل: از شکل ۱۳.۱۰ پیدا است که تنها نیروهای خارجی وارد بر دیسک عبارتند از وزن آن Mg ، نیروی کشش F به سمت پایین و F' نیروی تکیه‌گاه‌های محصور چرخ. ZZ'



شکل ۱۳.۱۰

یک محور اصلی است. با محاسبه گشتاور نیروها نسبت به مرکز جرم C ، درمی‌یابیم که گشتاور نیروی وزن برابر صفر است. گشتاور کل نیروهای F' نیز برابر صفر است. بنا براین $\tau = FR = I\alpha$ با $I = MR^2/2$ (۱۳.۱۰) داریم $FR = (MR^2/2)\alpha$ ، یا $F = MR\alpha/2$ از اینجا شتاب زاویه‌ای برابر می‌شود با

$$\alpha = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \times (9.8 \text{ N})}{(20 \text{ kg})(0.5 \text{ m})} = 1996 \text{ rads}^{-2}$$

بنا به معادله (۵۴.۵)، دو ثانیه بعد از حرکت دیسک، سرعت زاویه‌ای آن برابر می‌شود با

$$\omega = \alpha t = (1996 \text{ rads}^{-2})(2 \text{ s}) = 3992 \text{ rads}^{-1}$$

چون مرکز جرم C ثابت است، شتاب آن برابر صفر می‌شود و باید داشته باشیم

$$2F' - Mg - F = 0 \quad \text{یا} \quad F' = 1029 \text{ N.}$$

مثال ۵.۱۰. شتاب زاویه‌ای دستگاه نمایش داده شده در شکل ۱۳.۱۰ را، اگر جرم جسم آویزان 1 kg باشد، پیدا کنید. مشخصات دیسک همانهایی هستند که در مثال ۴.۱۰ داده شدند و محور ZZ' ثابت و یک محور اصلی است.

حل: چون جرم جسم 1 kg است، وزن آن 9.8 N می‌شود، یعنی با نیروی F در شکل ۱۳.۱۰ برابر است. بنابراین ممکن است کسی این حالت را مشابه حالت پیش در نظر بگیرد و انتظار داشته باشد که نتایج نیز یکی باشند. ولی چنین نیست! جرم m در حال افتادن نیروی کششی F را به‌سوی پایین روی دیسک وارد می‌کند و بنا به قانون کنش و واکنش، دیسک نیز یک نیروی کششی برابر با F ولی در سوی مخالف آن بر جرم m وارد می‌کند. چون جرم m با حرکت شتابدار پایین می‌آید، نیروی مؤثر کل روی آن نمی‌تواند

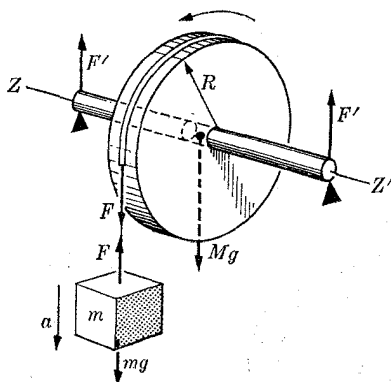
صفر باشد. بنابراین F برابر mg نیست، بلکه کوچکتر از آن است. در نتیجه به دیسک نیز گشتاور کوچکتری وارد می‌شود.

معادله حرکت جرم m عبارت است از

$$mg - F = ma = mR\alpha$$

که در آن از رابطه $a = R\alpha$ استفاده شده است. معادله حرکت دیسک عبارت است از $I\alpha = FR$ یا $F = MR\alpha/2$ (زیرا $I = MR^2/2$). با حذف F بین این دو رابطه شتاب زاویه‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{mg}{(m + M/2)R} = 1.8 \text{ rads}^{-2}.$$



شکل ۱۴.۱۰

این مقدار کوچکتر از نتیجه مثال پیش است. شتاب m به سمت پایین و برابر است با

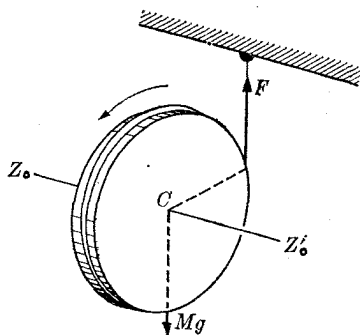
$$a = R\alpha = \frac{Mg}{m + M/2} = 0.90 \text{ ms}^{-2}.$$

از $a = 9.80 \text{ ms}^{-2}$ ، یعنی شتاب سقوط آزاد کوچکتر است. نیروی وارد از طرف تکیه‌گاه را می‌توان مانند مثال پیش به دست آورد.

مثال ۶.۱۰. شتاب زاویه‌ای دیسک شکل ۱۵.۱۰ و شتاب به سمت پایین مرکز جرم آن را حساب کنید. مشخصات دیسک همانهایی هستند که در مثال ۴.۱۰ آمده‌اند.

حل: محور چرخش محور اصلی Z_0Z_0' است. اختلاف این مثال با مثالهای قبلی در این است که در اینجا مرکز جرم ثابت نیست و حرکت دیسک به حرکت یک یو-یو شباهت دارد، و این بار باید معادله (۱۵.۱۰) را به کار برد. چرخش دیسک دور Z_0Z_0' با معادله $I\alpha = RF$ نشان داده می‌شود، زیرا گشتاور نیروی وزن Mg نسبت به C برابر صفر است. در این صورت، با قرار دادن $I = MR^2/2$ (و بعد از ساده کردن نسبت به R)

می‌توان نوشت $F = MR\alpha/2$.



شکل ۷.۱۰

شتاب حرکت سقوطی مرکز جرم برابر $a = R\alpha$ است، و اگر توجه داشته باشیم که برآیند نیروهای خارجی برابر $Mg - F$ است، با استفاده از معادله (۹.۹)، داریم

$$Mg - F = Ma = MR\alpha.$$

با حذف F بین این معادله و معادله پیش، جرم M نیز حذف می‌شود و از معادله جدید به دست می‌آید $\alpha = 2g/3R = 13.16 \text{ rads}^{-2}$. شتاب به سمت پایین مرکز جرم جسم برابر است با $a = R\alpha = 2g/3 = 6.53 \text{ ms}^{-2}$ ، که این شتاب کوچکتر از شتاب سقوط آزاد و نیز مستقل از ابعاد و جرم دیسک می‌باشد.

مثال ۷.۱۰. گشتاور نیروی لازم جهت به چرخش در آوردن دستگاه شکل ۷.۱۰ (ب) را با سرعت زاویه‌ای ثابت حساب کنید.

حل: در این حالت، سرعت زاویه‌ای ω دور محور ثابت Z تغییر نمی‌کند یعنی $d\omega/dt = 0$ است. از این فرض بلافاصله دو نتیجه به دست می‌آید: اول اینکه می‌دانیم که بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای کل $L = (2mR^2 \sin^2 \varphi) \omega$ و همچنین $L_z = (2mR^2 \sin^2 \varphi) \omega$ تصویر اندازه حرکت زاویه‌ای روی محور Z ، ثابت باقی می‌مانند. دوم اینکه گشتاور نیرو نسبت به محور Z ها یعنی $\tau_z = I d\omega/dt$ ، برابر صفر است. در نگاه نخست، ممکن است به نظر برسد که برای در حرکت نگه داشتن دستگاه نیازی به گشتاور نیرو وجود ندارد. ولی چنین نیست؛ اندازه حرکت زاویه‌ای L همراه دستگاه دور محور Z ها می‌چرخد (همچنانکه در پایان مثال ۱۰.۱۰ گفتیم آن را حرکت تقدیمی می‌نامند) و گشتاور نیرویی برای ایجاد این تغییر راستای L لازم است. این وضع درست شبیه به چیزی است که در حرکت دایره‌ای یکنواخت به دست آوردیم: بزرگی سرعت ثابت ولی برای تغییر راستای آن نیرویی لازم است.

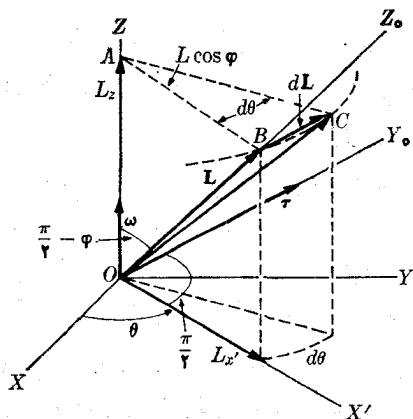
گشتاور τ باید در صفحه XY باشد زیرا $\tau_z = 0$ است و نیز باید بر صفحه $Z_0 Z$ ،

حاصل از راستای L (یا محور Z_0) و محور Z ، عمود باشد (شکلهای ۱۶.۱۰ و ۱۷.۱۰)، و بالاخره در راستای محور Y_0 باشد. این نکته را می توان با شیوه زیر به دست آورد. معادله (۱۱.۱۰)، $dL = \tau dt$ ، نشان می دهد که dL و τ بردارهای موازی هستند (چنانکه در مورد یک ذره تنها F و dV با هم موازی بودند). ولی چون بزرگی L ثابت است، بنابراین dL و همچنین τ بر آن عمودند. چون L با محور Z زاویه ثابت $\varphi - \pi/2$ می سازد، انتهای آن روی دایره ای به شعاع

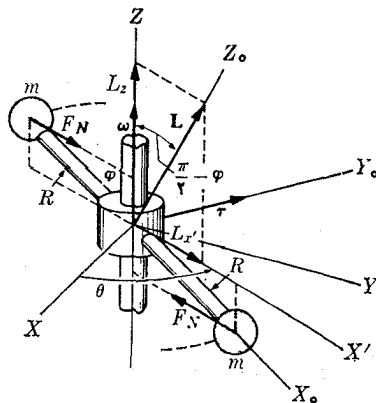
$$AB = L \sin(\pi/2 - \varphi) = L \cos \varphi$$

حرکت می کند و dL بر این دایره مماس است. این امر به نوبه خود ایجاب می کند که dL بر صفحه $Z_0 Z$ عمود (یا با Y_0 موازی) باشد. با توجه به موازی بودن dL و τ ، بنا بر این τ نیز چنین وضعی خواهد داشت. برای به دست آوردن بزرگی dL ، از شکل ۱۷.۱۰ درمی یابیم که

$$|dL| = AB d\theta = (L \cos \varphi) \omega dt$$



شکل ۱۷.۱۰. حرکت تقدیمی اندازه حرکت زاویه ای جسمی که در شکل ۱۶.۱۰ نشان داده شده است.



شکل ۱۶.۱۰. چرخش یک جسم سخت دور یک محور اختیاری

زیرا $\omega = d\theta/dt$ است. با برابر قرار دادن $|dL|$ با $|\tau dt|$ و وارد کردن مقدار L به دست می آید

$$\tau = (2mR^2 \sin \varphi \cos \varphi) \omega^2.$$

بسیار آموزنده است که ببینیم از لحاظ فیزیکی چه نیازی به این گشتاور نیرو وجود دارد. از شکل ۱۶.۱۰ پیداست که کره ایی به جرم m دارای حرکت دایره ای یکنواخت هستند و هر کدام برای پیمودن دایره ای به شعاع $R \sin \varphi$ یک نیروی مرکزگرا برابر $F_N = m\omega^2 R \sin \varphi$ لازم دارند. این دو نیرو تشکیل یک جفت^۱ می دهند که بازوی اهرم آن $2R \cos \varphi$ است. در این صورت گشتاور جفت برابر است با

$$\tau = (mR\omega^2 \sin\varphi)(\gamma R \cos\varphi)$$

که با نتیجه پیش مطابقت دارد. بنا بر این گشتاور نیرو دارای نقش نگه‌داری کره‌ها در وضع ثابت نسبت به محور چرخش می‌باشد.

به عهده دانشجو می‌گذاریم تا تحقیق کند که در مورد شکل ۷.۱۰ (الف) که در آن چرخش دور یک محور اصلی و با سرعت زاویه‌ای ثابت صورت می‌گیرد، نیازی به این گشتاور نیرو نیست. بدین دلیل و جهت پیشگیری از ظاهر شدن گشتاورهای عرضی مانند مثال فوق، قسمتهای گردان یک سازوکار باید روی یکی از محوره‌های اصلی سوار شوند.

یک روش دیگر برای حل این مسئله آن است که تصاویر L را روی محوره‌های ثابت XYZ پیدا کنیم و تصاویر T را با استفاده مستقیم از معادله (۱۱.۱۰) به دست آوریم. انجام این کار را به عنوان تمرین به عهده دانشجو واگذار می‌کنیم (مسئله ۵۰.۱۰).

مثال ۸.۱۰. حرکت کلی یک جسم سخت را در غیاب هرگونه گشتاور نیروی خارجی تجزیه و تحلیل کنید.

حل: در این مثال می‌خواهیم حرکت عمومی یک جسم سخت را هنگامی که هیچگونه گشتاور نیروی خارجی به آن وارد نمی‌شود، یا به گفته دیگر، وقتی که $T = 0$ است مطالعه کنیم. در این صورت از معادله (۱۱.۱۰) به دست می‌آید $dL/dt = 0$ یا $L = \text{const}$. بنا بر این بزرگی و راستای اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به چارچوب لخت XYZ که ناظر به کار می‌برد ثابت باقی می‌ماند.

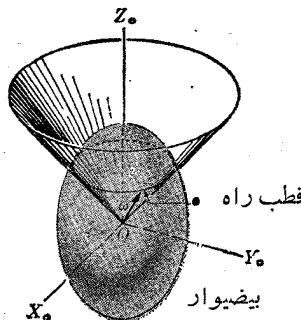
نظر به اینکه گشتاور نیروها و اندازه حرکت‌های زاویه‌ای همیشه نسبت به یک نقطه حساب می‌شوند، باید پیدا کنیم که گشتاور نیرو نسبت به کدام نقطه برابر صفر است. دو امکان وجود دارد: اولی مربوط به حالتی است که نقطه در یک چارچوب مرجع لخت ثابت است؛ در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به این نقطه ثابت حساب می‌شود. دومی موقعی به وجود می‌آید که گشتاور نیرو نسبت به مرکز جرم برابر صفر باشد. این مورد حالت تویی است یک فوتبالیست به آن ضربه‌ای وارد کرده باشد. موقعی که توپ در هواست تنها نیروی خارجی وارد بر توپ وزن آن می‌باشد که به مرکز جرمش اثر می‌کند، بنا بر این هیچگونه گشتاوری نسبت به مرکز جرم وجود ندارد. در این حالت، اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم ثابت باقی می‌ماند. حرکت مرکز جرم مورد نظر ما نیست، زیرا این حرکت ناشی از برآیند نیروهای خارجی است و مطابق رابطه (۹.۹) انجام می‌گیرد. چیزی که مورد نظر ماست چرخش دور مرکز جرم است.

در این مثال L نمایش اندازه حرکت زاویه‌ای دور نقطه ثابت یا دور مرکز جرم است، و در هر دو مورد نیز گفتگو خواهیم داشت. ابتدا فرض می‌کنیم که جسم دور یک محور اصلی می‌چرخد. در این صورت معادله (۷.۱۰) صادق و $L = I\omega$ است؛ چنانکه ω ثابت باشد L نیز ثابت است. این امر بدین معنی است که جسم با سرعت زاویه‌ای ثابتی دور یک محور که هم نسبت به جسم و هم نسبت به ناظر ثابت است می‌چرخد. اکنون فرض می‌کنیم که چرخش جسم دور یک محور اصلی نیست. در این صورت

معادله (۵.۱۰) به کار می‌رود و ثابت بودن L دلیل ثابت بودن ω نیست. بنابراین سرعت زاویه‌ای جسم تغییر می‌کند و محور چرخش نسبت به ناظر ثابت نخواهد بود و ناظر ω را در حال حرکت تقدیمی دور L می‌بیند. محور چرخش نیز نسبت به جسم ثابت نیست. از معادله (۵.۱۰) که L را به محورهای اصلی X_0, Y_0, Z_0 مربوط می‌کند، به دست می‌آید

$$L^2 = I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = \text{const}$$

هنگامی که L ثابت باشد، این رابطه شرطی را که باید محورهای اصلی X_0, Y_0, Z_0 داشته باشند بیان می‌کند. چون ضرایب I_x^2 و I_y^2 مثبت و ثابت هستند، به شرطی که ω_x و ω_y و ω_z مختصات یک نقطه در نظر گرفته شوند، رابطه فوق معادله یک بیضیوار^۱ است. بنابراین انتهای بردار ω باید روی این بیضیوار باشد (شکل ۱۸.۱۰). در مدت حرکت، بزرگی بردار ω و راستای آن نسبت به جسم تغییر می‌کند و بنابراین انتهای این بردار مسیری روی بیضیوار رسم می‌کند که به آن قطب^۲ نام داده‌اند.



شکل ۱۸.۱۰. ترسیم حرکت یک جسم سخت. مسیری که انتهای بردار سرعت زاویه‌ای نسبت به محور متصل به جسم رسم می‌کند قطب راه نام دارد.

حرکتی که در بالا بیان کردیم در موارد بسیار زیادی دیده می‌شود. به عنوان مثال، نیروهای وارد از طرف خورشید، ماه و سیاره‌ها روی زمین عملاً به مرکز جرم آن اثر می‌کنند، بنابراین گشتاور نیرو نسبت به مرکز جرم آن اساساً برابر صفر است (در واقع، گشتاور کوچکی وجود دارد؛ به مثال ۱۰.۱۰ مراجعه کنید). زمین دقیقاً به شکل کره نیست، بلکه مختصری به گلابی شباهت دارد؛^{۲۲} بنابراین دوریک محور اصلی نمی‌چرخد. در نتیجه، محور حرکت چرخشی آن نسبت به خودش ثابت نیست.

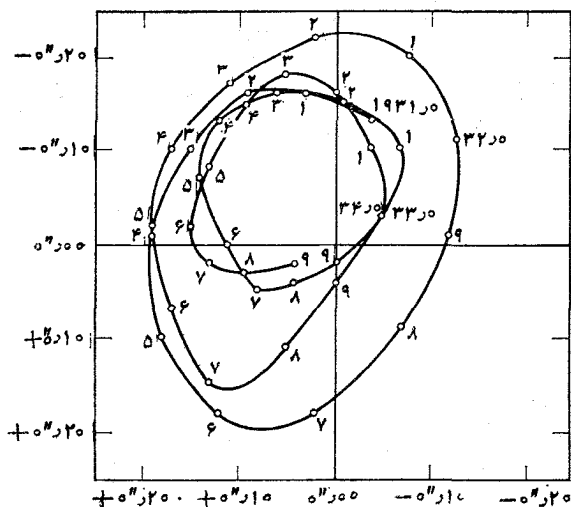
قطب راه محور چرخش زمین در شکل ۱۹.۱۰ نشان داده شده است. این شکل مسیری

1. ellipsoid

☆ Polhode. گرفته شده از یونانی: polos به معنی قطب و hodos به معنی مسیر.

☆☆ باید توجه داشت که این شباهت بسیار ناچیز است؛ شعاع زمین در قطب جنوب در حدود ۱۵ متر از شعاع در قطب شمال کمتر است. (۲) ر.ک.

را که انتهای شمالی محور چرخش زمین از سال ۱۳۱۰ تا ۱۳۱۴ ه. ش. پیموده است نمایش می‌دهد. به سبب دخالت سایر سازه‌ها، شکل منحنی کمی نامنظم است، ولی قطر منحنی هرگز از ۱۵m تجاوز نمی‌کند و دورهٔ گردش محور در حدود ۴۲۷ روز است.



شکل ۱۹.۱۰. قطب راه محور چرخش زمین از سال ۱۳۱۰ تا ۱۳۱۴

تلو تلو خوردن یک توپ رگبی، پس از آنکه بازیکنی ضربه‌ای به آن وارد می‌کند مثال دیگری از تغییر راستای محور چرخش جسمی است که هیچگونه گشتاوری به آن وارد نمی‌شود، زیرا در بیشتر موارد، اندازه حرکت زاویه‌ای توپ در راستای یکی از محورهای اصلی آن نیست.

۵.۱۰ انرژی جنبشی چرخش

در بخش ۵.۹ انرژی جنبشی یک دستگاه ذرات را با رابطهٔ زیر تعریف کردیم:

$$E_k = \sum_i m_i v_i^2 / 2$$

در بخش ۲.۱۰ دیدیم در یک جسم سخت که با سرعت زاویه‌ای ω به دور محوری می‌چرخد، سرعت هر ذرهٔ آن برابر است با $v_i = \omega R_i$ که در آن R_i فاصلهٔ ذره از محور چرخش است. پس داریم

$$E_k = \sum_i m_i v_i^2 / 2 = \sum_i m_i R_i^2 \omega^2 / 2 = (\sum_i m_i R_i^2) \omega^2 / 2$$

با یادآوری تعریف گشتاور لختی، رابطهٔ (۲.۱۰)، می‌توان نوشت

$$E_k = I \omega^2 / 2 \quad (۱۶.۱۰)$$

رابطهٔ (۱۶.۱۰) برای هر محوری، حتی اگر محور اصلی نباشد، درست است، زیرا چنانکه

از بحث بخش ۲۰۱۵ می توان نتیجه گرفت، بزرگی سرعت همیشه برابر است با $v_i = \omega R_i$. وقتی که چرخش دور یک محور اصلی صورت می گیرد، می توان معادله (۲۰۱۵) را به کار برد و نوشت

$$E_k = \frac{L^2}{2I}. \quad (17.10)$$

می توان با به کار بردن مؤلفه های ω روی محورها ی اصلی X, Y, Z رابطه کلی تر دیگری برای انرژی جنبشی پیدا کرد. نتیجه ای که از اثبات آن صرف نظر می کنیم، چنین است:

$$E_k = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2).$$

با به کار بردن مؤلفه های L روی X, Y, Z ، بنا به معادله (۵۰۱۵)، می توان نوشت

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z} \right).$$

برای چرخش دور یک محور اصلی رابطه بالا به معادله (۱۷.۱۵) تبدیل می شود. از موارد جالب توجه، مخصوصاً در بحث چرخشهای مولکولی، موردی است که در آن جسم تقارن محوری، مثلاً نسبت به محور Z داشته باشد، به گونه ای که $I_x = I_y$ باشد. در این صورت داریم

$$E_k = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{I_x} (L_x^2 + L_y^2) + \frac{1}{I_z} L_z^2 \right]$$

که آن را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$E_k = \frac{L^2}{2I_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I_x} \right) L_z^2$$

اکنون یک حالت کلی را در نظر می گیریم که در آن جسم دور محوری که از مرکز جرم آن می گذرد می چرخد و در همان زمان نسبت به ناظر حرکت انتقالی دارد. چنانکه در مثال ۸.۹ ثابت کردیم، انرژی جنبشی جسم در یک چارچوب مرجع لخت برابر است با

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_{k,CM}$$

که در آن M جرم کل، v_{CM} سرعت مرکز جرم و $E_{k,CM}$ انرژی جنبشی داخلی نسبت به مرکز جرم است. در مورد یک جسم سخت، $M v_{CM}^2 / 2$ درست برابر انرژی جنبشی انتقالی است، بنابراین $E_{k,CM}$ باید انرژی جنبشی نسبت به مرکز جرم جسم باشد که به وسیله معادله (۱۶.۱۵) محاسبه می شود. این نکته درست است، زیرا در یک جسم سخت مرکز جرم نسبت به جسم ثابت است، و تنها حرکتی که جسم نسبت به مرکز می تواند داشته باشد حرکت چرخشی است. بنابراین می توان نوشت

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (18.10)$$

در این رابطه I_C گشتاور لختی نسبت به محور چرخشی است که از مرکز جرم می‌گذرد. نظر به اینکه در یک جسم سخت، فاصله بین ذرات در طول حرکت تغییر نمی‌کند، می‌توان فرض کرد که $E_{p,int}$ ، انرژی پتانسیل داخلی جسم، ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه هنگام بحث درباره تبادله انرژی جسم با محیط خارج، نباید آن را به حساب آورد. از این رو، اصل بقای انرژی که برای یک دستگاه ذرات به صورت معادله (۳۵.۹) نوشته شد، در مورد یک جسم سخت به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$E_k - E_{k,o} = W_{ext}. \quad (19.10)$$

در این رابطه W_{ext} کار نیروهای خارجی است. اگر نیروهای خارجی پایستار باشند، داریم

$$W_{ext} = (E_{p,o} - E_p)_{ext} \quad (20.10)$$

که در آن $E_{p,ext}$ انرژی پتانسیل وابسته به نیروهای خارجی است و معادله (۱۹.۱۰) به معادله زیر تبدیل می‌شود (از شاخص «ext» برای انرژی پتانسیل صرف نظر شده است):

$$E_k + E_p = (E_k + E_p)_o. \quad (21.10)$$

این نتیجه مشابه با نتیجه‌ای است که به صورت معادله (۲۹.۸) برای یک ذره به دست آمد و حالت خاصی از معادله (۳۶.۹)، برای حالتی است که انرژی پتانسیل داخلی تغییر نمی‌کند. (قبلاً گفتیم، این تغییر ناپذیری در مورد یک جسم سخت وجود دارد.) بدین مناسبت $E = E_k + E_p$ را انرژی کل جسم سخت می‌خوانند. هنگامی که معادله (۱۸.۱۰) را برای E_k به کار می‌بریم، معادله (۲۱.۱۰) مربوط به انرژی کل چنین می‌شود:

$$E = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + E_p = \text{const}.$$

به عنوان مثال، هنگام افتادن جسم بر اثر نیروی وزن داریم $E_p = Mgy$ که در آن y ارتفاع مرکز جرم جسم نسبت به یک صفحه مرجع افقی است، و انرژی کل برابر می‌شود با

$$E = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + Mgy = \text{const}. \quad (22.10)$$

اگر بعضی از نیروها پایستار نباشند (بر مبنای گفتگوی قبلی که در بخش ۱۲.۸ داشتیم) به جای معادله (۲۰.۱۰) باید نوشت

$$W_{ext} = E_{p,o} - E_p + W'$$

که در آن W' کار نیروی ناپایستار خارجی است. معادله (۲۱.۱۰) به این صورت درمی‌آید:

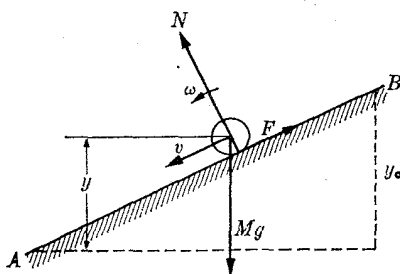
$$(E_k + E_p) - (E_k + E_p)_o = W'. \quad (23.10)$$

به عنوان مثال، این معادله را باید هنگامی به کار برد که نیروهای مالش همزمان با نیروی گرانی بر جسم اثر می‌کنند.

مثال ۹.۱۰. یک کره، یک استوانه و یک حلقه با شعاعهای برابر، هر سه از ارتفاع یکسان y ، روی یک صفحه شیب‌دار می‌غلطند. سرعت هر کدام را هنگام رسیدن به پایین صفحه

به دست آورید.

حل: شکل ۲۰.۱۰ نیروهای وارد بر جسم در حال غلتش را نشان می‌دهد. این نیروها عبارتند از Mg ، نیروی وزن، N ، واکنش صفحه و F ، نیروی مالش در نقطه تماس جسم با صفحه. می‌توانیم همان روشی را که برای حل مثال ۵.۱۰ به کار بردیم اینجا نیز مورد استفاده قرار دهیم (به دانشجو توصیه می‌کنیم همین کار را انجام دهد)، ولی ما در اینجا اصل بقای انرژی را، آنچنانکه در معادله (۲۲.۱۰) نوشته شده است به کار می‌بریم.



شکل ۲۰.۱۰. غلتش یک جسم روی صفحه شیب‌دار

در نقطه شروع حرکت B ، هنگامی که جسم در ارتفاع y در حال سکون است، انرژی کل آن برابر $E = Mgy$ می‌باشد. برای هروضع بینابینی در مسیر حرکت، مرکز جرم با سرعت انتقال v جابجا می‌شود و جسم با سرعت زاویه‌ای ω دور مرکز جرم می‌چرخد. در اینجا دوسرعت با رابطه $v = R\omega$ به هم مربوطند. در این صورت انرژی کل برابر است با

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + Mgy = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_C}{R^2}\right)v^2 + Mgy.$$

اگر گشتاور لختی را به صورت $I_C = MK^2$ بنویسیم که در آن K مطابق تعریف (۱۰.۱۰) شعاع ژیراسیون است، رابطه انرژی کل به صورت زیر درمی‌آید:

$$E = \frac{1}{2}M\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)v^2 + Mgy.$$

با برابر قرار دادن این انرژی با انرژی اولیه $E = Mgy$ و با حل رابطه برحسب v به دست می‌آوریم

$$v^2 = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + (K/R)^2}.$$

اگر به جای جسمی که می‌غلتد، جسمی داشتیم که به سمت پایین صفحه می‌لغزد، نمی‌بایست انرژی چرخشی را وارد می‌کردیم، و نتیجه به صورت $v^2 = 2g(y_0 - y)$ درمی‌آمد، یعنی همان نتیجه‌ای که در مورد سقوط یک ذره منفرد به دست می‌آید. بنابراین نتیجه

می‌گیریم که حرکت چرخشی موجب کند شدن حرکت انتقالی می‌گردد. این نتیجه را می‌توان بدین طریق توجیه کرد که در یک حرکت چرخشی انرژی پتانسیل اولیه، هم باید به مصرف انرژی انتقالی و هم انرژی جنبشی چرخشی برسد. ولی هنگامی که جسم روی صفحه می‌لغزد، تمام انرژی پتانسیل اولیه به انرژی جنبشی انتقالی تبدیل می‌شود.

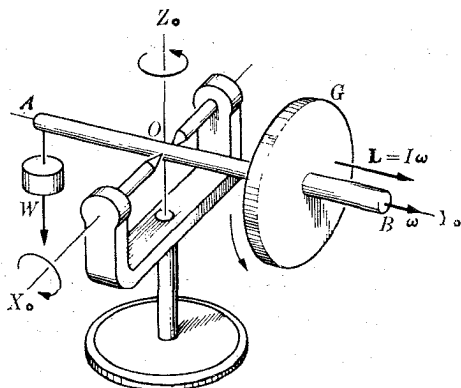
با مراجعه به جدول ۱۰.۱، مشاهده می‌شود که K^2/R^2 برای یک کره برابر $2/5$ ، برای استوانه برابر $1/2$ و بالاخره برای یک حلقه برابر ۱ است. بنابراین v^2 برای کره، استوانه و حلقه به ترتیب برابر می‌شود با $4g(y - y_0)/3$ ، $2g(y - y_0)$ و $g(y - y_0)$. به گفته دیگر، کره سریعتر از همه حرکت می‌کند، پس از آن استوانه قرار می‌گیرد و بالاخره حرکت حلقه کندتر از همه است. آیا دانشجو می‌توانست تنها از روی شکل هندسی اجسام این نتیجه را حدس بزند؟

یک نتیجه جالب که از رابطه v^2 به دست می‌آید این است که سرعت جسمی که روی سطح شیب‌داری به سمت پایین حرکت می‌کند، نه به جرم بستگی دارد، نه به ابعاد آن، بلکه تنها به شکل هندسی آن بستگی دارد.

۶.۱۰ حرکت ژيروسکوپ

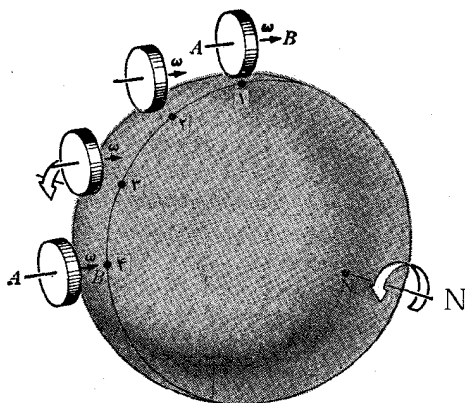
چنانکه در بخش ۴.۱۰ اشاره کردیم، معادله $dL/dt = \tau$ نشان می‌دهد که اگر گشتاور نیروی خارجی τ وجود نداشته باشد، L اندازه حرکت زاویه‌ای جسم ثابت باقی می‌ماند. اگر جسم دور یک محور اصلی بچرخد، چنانکه قبلاً نیز گفتیم، به چرخش خود دور این محور با سرعت زاویه‌ای ثابتی ادامه خواهد داد و داریم $L = I\omega$.

بهترین وسیله نمایش این پدیده ژيروسکوپ است (شکل ۲۱.۱۰) و آن وسیله‌ای است که امکان می‌دهد چرخشی را به گونه‌ای سوار کنند که راستای محور چرخش آن بتواند آزادانه



شکل ۲۱.۱۰. ژيروسکوپ که زیر تاثیر هیچ گشتاور نیرویی نیست

تغییر کند. چرخ G روی میله افقی AB سوار شده است و طوری با وزنه W ترازمند گردیده که گشتاور کل نیروها نسبت به نقطه O برابر صفر باشد: میله AB می تواند آزادانه دور محور X و همچنین Z حرکت کند و چرخ G خیلی سریع دور Y می چرخد؛ این سه محور محورهای اصلی ژيروسکوپ می باشند. در نتیجه، هنگامی که محور Y در فضا ثابت باشد، اندازه حرکت زاویه ای دستگاه، موازی آن باقی می ماند. اگر ژيروسکوپ را جابجا کنیم، مشاهده می کنیم که AB همواره در یک راستا قرار می گیرد. اگر محور ژيروسکوپ را طوری قرار دهیم که AB به صورت افقی و در راستای مشرق - مغرب باشد (وضع ۱ در شکل ۲۲.۱۰ که در آن N نمایش قطب شمال زمین و پیکان سوی سرعت زاویه ای چرخ را نشان می دهد)، مشاهده می کنیم که AB بتدریج منحرف می شود، به طوری که بعد از ۶ ساعت در وضع قائم قرار می گیرد (وضع ۴ در شکل ۲۲.۱۰). این چرخش ظاهری AB در واقع ناشی از چرخش زمین است، و در حالی که آزمایشگاه ما بعد از شش ساعت از وضع ۱ به وضع ۴ می رسد، امتداد AB در فضا ثابت می ماند.



شکل ۲۲.۱۰. درغیاب هر گشتاور نیرو، محور چرخش ژيروسکوپ در فضا ثابت باقی می ماند و در نتیجه نسبت به زمین می چرخد.

اگر گشتاور وارد بر ژيروسکوپ صفر نباشد، اندازه حرکت زاویه ای در مدت زمان dt تغییری برابر با

$$dL = \tau dt \quad (22.10)$$

پیدا می کند. به گفته دیگر، تغییر اندازه حرکت زاویه ای همیشه در راستای گشتاور نیرو می باشد (همان گونه که تغییر اندازه حرکت یک ذره در راستای نیرو صورت می گیرد)؛ قبلاً در مثال ۷.۱۰ با این وضع مواجه شده بودیم. در واقع، گفتگوی حاضر به مثال ۷.۱۰ بسیار شبیه است، ولی یک اختلاف اساسی بین این دو وجود دارد: در اینجا اندازه حرکت زاویه ای عمده تاً از چرخش ژيروسکوپ به دور محور خود، Y ، ناشی می شود، در صورتی که در دستگاه شکل ۱۶.۱۰ اندازه حرکت زاویه ای از چرخش دور محور Z ها

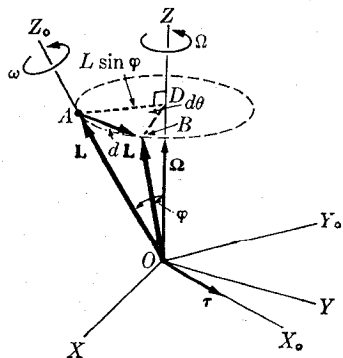
بدون چرخش به دور Y به وجود می‌آید.

اگر گشتاور τ بر اندازه حرکت زاویه‌ای L عمود باشد، تغییر dL نیز بر L عمود است. در این صورت راستا و سوی اندازه حرکت زاویه‌ای تغییر می‌کند ولی نه بزرگی آن، یعنی راستای محور چرخش عوض می‌شود ولی بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت می‌ماند. چنانکه در مثال ۲۰.۱۰ گفتیم، این وضع شبیه یک حرکت دایره‌ای بر اثر یک نیروی مرکزگراست که در آن، راستای نیرو بر راستای سرعت عمود است و راستای سرعت تغییر می‌کند ولی بزرگی آن بدون تغییر می‌ماند. چنانکه قبلاً در مثال ۲۰.۱۰ متذکر شدیم، حرکت محور چرخش دور یک محور ثابت بر اثر یک گشتاور نیروی خارجی حرکت تقدیمی نامیده می‌شود.

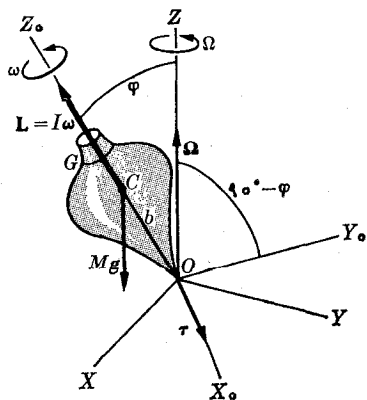
این وضع در یک فرقه معمولی دیده می‌شود. این اسباب بازی نوعی ژيروسکوپ است (شکل ۲۳.۱۰). توجه داشته باشید که در فرقه، محور اصلی X در صفحه XY انتخاب شده است، بنابراین Y در صفحه حاصل از Z و Z قرار دارد. به دلیل تقارن استوانه‌ای فرقه، محورهای اصلی X ، Y و Z با سرعت زاویه‌ای ω نمی‌چرخند. مبدأ هر دو گروه محورها در نقطه O ، که در یک چارچوب مرجع لخت ثابت است انتخاب شده است. در این صورت L و τ هر دو باید نسبت به O حساب شوند. هنگامی که فرقه با سرعت زاویه‌ای ω دور OZ محور تقارن خود می‌چرخد، L ، اندازه حرکت زاویه‌ای آن نیز با محور OZ موازی است. گشتاور نیروی خارجی τ از وزن Mg که بر مرکز جرم اثر می‌کند ناشی می‌شود و برابر است با $(\vec{OC}) \times (Mg)$. بنابراین گشتاور τ بر صفحه OZ عمود است، در نتیجه بر L نیز عمود می‌باشد، و بزرگی آن برابر است با

$$\tau = Mgbsin\varphi \quad (25.10)$$

که در آن φ زاویه بین محور تقارن Z و محور قایم Z و $b = OC$ مکان مرکز جرم را به دست می‌دهد.



شکل ۲۴.۱۰. حرکت تقدیمی محور ژيروسکوپ



شکل ۲۳.۱۰. ژيروسکوپ زیر تأثیر یک گشتاور نیروی خارجی

چنانکه شکل ۲۴.۱۰ نشان می‌دهد، در طول مدت کوتاه dt بردار L از وضع OA

به وضع OB در می‌آید و تغییر آن برابر $dL = \overrightarrow{AB}$ و موازی τ است. انتهای بردار L دور Z دایره‌ای به شعاع $AD = OA \sin \varphi = L \sin \varphi$ رسم می‌کند، و در طول زمان dt شعاع AD به اندازه زاویه $d\theta$ جابجا می‌شود تا به وضع BD می‌رسد. Ω ، سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی، یعنی سرعتی که OZ محور جسم دور محور ثابت OZ در آزمایشگاه می‌چرخد، با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (26.10)$$

و با برداری موازی OZ نشان داده می‌شود. بزرگی dL برابر است با

$$|dL| = AD d\theta = (L \sin \varphi) (\Omega dt).$$

از طرف دیگر، از معادله (۲۴.۱۰)، می‌دانیم که $|dL| = \tau dt$ است. با برابر قرار دادن دو نتیجه می‌توان نوشت

$$\Omega L \sin \varphi = \tau \quad (27.10)$$

یا با به کار بردن معادله (۲۵.۱۰) برای گشتاور نیرو، به دست می‌آید

$$\Omega = \frac{\tau}{L \sin \varphi} = \frac{Mgb}{I\omega} \quad (28.10)$$

با توجه به راستای نسبی بردارهای Ω ، L و τ در شکل ۲۴.۱۰، معادله (۲۷.۱۰) را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت:

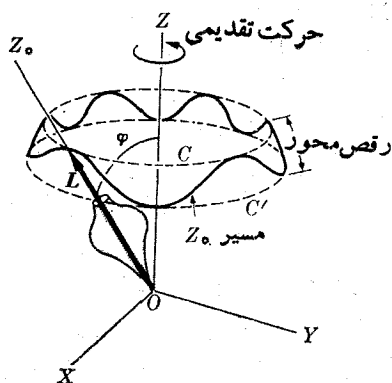
$$\Omega \times L = \tau \quad (29.10)$$

که رابطه بسیار مفیدی است. [این رابطه را می‌توان با رابطه مشابه خود، $\omega \times P = F$ در حرکت دایره‌ای یکنواخت مقایسه کرد که با معادله (۳۰.۷) نشان داده شد، زیرا هر دو، رابطه ریاضی یکسانی را بین بردارهای مورد مطالعه نشان می‌دهند.]

نتایج (۲۷.۱۰) یا (۲۸.۱۰) تقریبی هستند. آنها را تنها هنگامی می‌توان به کار برد که ω خیلی بزرگتر از Ω باشد، چون اگر جسم یک حرکت تقدیمی دور OZ داشته باشد، دارای یک اندازه حرکت زاویه‌ای دور این محور نیز می‌باشد و در نتیجه اندازه حرکت زاویه‌ای کل آن، چنانکه فرض کردیم، دیگر برابر $I\omega$ نیست، زیرا سرعت زاویه‌ای برآیند برابر $\omega + \Omega$ است. با وجود این، اگر حرکت تقدیمی خیلی کند باشد (یعنی Ω نسبت به ω خیلی کوچک باشد)، می‌توان از اندازه حرکت زاویه‌ای دور OZ صرف نظر کرد، چنانکه ما در محاسبات خود به طور ضمنی آن را انجام دادیم. در این صورت نتایجی که به دست آوردیم کاربرد پیدا می‌کند.

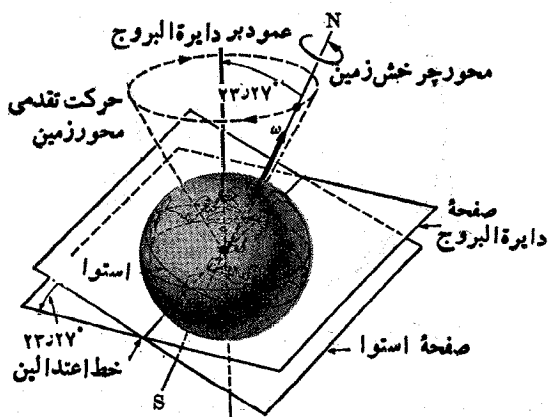
یک بررسی دقیقتر نشان می‌دهد که در حالت کلی، زاویه φ ثابت باقی نمی‌ماند، بلکه بین دو مقدار معین نوسان می‌کند. به گونه‌ای که انتهای L در همان زمان که دور محور

Z حرکت تقدیمی دارد، بین دودایره C و C' (شکل ۲۵.۱۰) نوسان می‌کند و مسیر مشخص شده را می‌پیماید. این حرکت نوسانی Z حرکت دقش محوری^۱ نامیده می‌شود. حرکت رقص محوری نیز مانند حرکت تقدیمی، در اندازه حرکت زاویه‌ای کل سهم است، ولی عموماً سهم آن حتی کمتر از حرکت تقدیمی می‌باشد.



شکل ۲۵.۱۰. حرکت رقص محوری و تقدیمی محور ژيروسکوپ

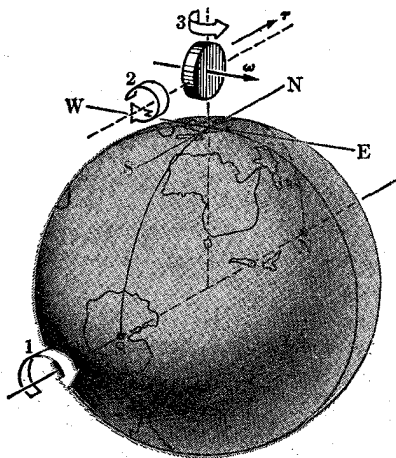
پدیده‌های ژيروسکوپی کاربردهای گسترده‌ای دارند. تمایل ژيروسکوپ در نگهداری محور خود در یک راستای ثابت در فضا، اصلی است که در حفظ تعادل کشتیها و هدایت هواپیماهای بدون خلبان مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک مثال جالب دیگر از حرکت ژيروسکوپی حرکت تقدیمی اعتدالین^۲ است، که در بخش ۳.۲ مورد بحث قرار گرفت. صفحه مسیر حرکت انتقالی زمین یا دایره البروج^۳ با صفحه استوا زاویه‌ای برابر $23^{\circ}27'$



شکل ۲۶.۱۰. حرکت تقدیمی محور چرخش زمین

می‌سازد. فصل مشترک این دو صفحه را خط اعتدالین می‌نامند. زمین یک ژيروسکوپ غول‌آسا است که محور چرخش آن اساساً خطی است که از قطبهای شمال و جنوب می‌گذرد. این محور چنانکه شکل ۲۶.۱۰ نشان می‌دهد، دارای یک حرکت تقدیمی دور خط عمود بر صفحه دایرة البروج در راستای شرق-غرب، با دوره ۲۷۲۵ سال، یا با سرعت زاویه‌ای حدود $۵۰۲۷''$ کمان در سال، یا $۱۰^{-11} \text{ rad s}^{-1}$ $۷۱۹ \times$ می‌باشد. حرکت تقدیمی محور زمین موجب می‌شود راستای خط اعتدالین نیز به‌همین اندازه تغییر کند. این پدیده در حدود سال ۱۳۵ قبل از میلاد به‌وسیله ابرخس^۱ کشف شده است.

حرکت تقدیمی نقطه‌های اعتدالین از گشتاور نیروی وارد از طرف خورشید و ماه روی زمین ناشی می‌شود. زمین به‌شکل کره نیست بلکه تقریباً به‌شکل بیضیوار است که قطر بزرگ آن در صفحه استوا قرار دارد (در واقع زمین به‌شکل گلابی است*). محاسبات خیلی دقیق نشان داده‌اند، به‌سبب شکل هندسی و میل محور آن نسبت به صفحه دایرة البروج، نیروهای وارد از طرف خورشید و ماه روی زمین دارای یک گشتاور برآیند نسبت به مرکز آن می‌باشند. راستای این گشتاور نیرو بر محور زمین عمود است. بنابراین محور زمین بر اثر این گشتاور باید حرکت تقدیمی داشته باشد. در فصل ۱۵ خواهیم دید که هنگام حرکت یک ذره باردار مانند الکترون یا پروتون در یک میدان مغناطیسی نیز اثر مشابهی مشاهده می‌شود (هرچند دلیل فیزیکی این دو پدیده یکی نیست). محور زمین دارای یک حرکت رقص محوری با دامنه $۹۲''$ و دوره نوسان ۱۹ سال نیز می‌باشد.



شکل ۲۷.۱۰. قطب‌نمای ژيروسکوپی

یک مثال دیگر از کاربرد حرکت ژيروسکوپی، که آن نیز به حرکت چرخشی زمین وابسته است، قطب‌نمای ژيروسکوپی^۲ می‌باشد. فرض کنید ژيروسکوپی مطابق شکل ۲۷.۱۰

1. Hipparchus
2. gyroscopic compass

در وضع G قرار دارد. پیکان ۱ سوی حرکت چرخشی زمین را نشان می‌دهد. ژيروسکوپ به‌گونه‌ای قرار گرفته است که محور آن در صفحه افقی باقی بماند. این کار را می‌توان مثلاً با شناور کردن ژيروسکوپ روی یک آبگون انجام داد. فرض کنیم ابتدا محور ژيروسکوپ در راستای شرق - غرب باشد. وقتی که زمین می‌چرخد صفحه افقی و راستای شرق - غرب نیز همراه با زمین می‌چرخد. در نتیجه اگر محور ژيروسکوپ بخواهد در راستای شرق - غرب باقی بماند، باید مطابق آنچه که پیکان ۲ نشان می‌دهد بچرخد، بنابراین باید گشتاور نیرویی در راستای جنوب - شمال به آن اثر کند. در نتیجه محور ژيروسکوپ، زیر تأثیر این گشتاور نیرو، مطابق آنچه که پیکان ۳ نشان می‌دهد، دور خط قایم آن قدر می‌چرخد تا اینکه شمال را نشان دهد. برتری قطب‌نمای ژيروسکوپی در این است که همیشه شمال حقیقی را نشان می‌دهد، زیرا هیچگونه اثر مغناطیسی محلی روی آن مؤثر نیست.

جدول ۲۰۱۰. مقایسه بین دینامیک حرکت انتقالی و حرکت چرخشی

حرکت انتقالی	حرکت چرخشی
اندازه حرکت خطی $P = mv$	اندازه حرکت زاویه‌ای $L = I\omega^*$
نیرو $F = dP/dt$	گشتاور نیرو $\tau = dL/dt$
جسمی با جرم ثابت $F = ma$	جسمی با گشتاور لختی ثابت $\tau = I\alpha^*$
نیروی عمود بر اندازه حرکت $F = \omega \times P$	گشتاور نیروی عمود بر اندازه حرکت زاویه‌ای $\tau = \Omega \times L$
انرژی جنبشی $E_k = mv^2/2$	انرژی جنبشی $E_k = I\omega^2/2$
توان $P = F \cdot v$	توان $P = \tau \cdot \omega$

* فرمولهایی که با ستاره مشخص شده‌اند، تنها در مورد چرخش دور محورهای اصلی معتبرند.

مثال ۱۰.۱۰. گشتاوری را که باید بر زمین اثر کند تا حرکت تقدیمی مشاهده شده در نقطه‌های اعتدالین را به وجود آورد حساب کنید.

حل: از معادله (۳۷.۱۰) داریم $\tau = \Omega L \sin \varphi$ که در آن

$$\Omega = 7.19 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-1} \text{ و } \varphi = 23^\circ 27'$$

است. Ω سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی زمین است. ابتدا باید اندازه حرکت زاویه‌ای زمین را حساب کنیم. نظر به اینکه محور چرخش زمین اختلاف ناچیزی با محور اصلی دارد، می‌توان معادله $L = I\omega$ را به کار برد. مقدار ω برابر است با $7.29 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$

که در مثال ۱۱.۵ داده شده بود. بنا به جدول ۱۰.۱۰، به فرض اینکه زمین به شکل کره کامل باشد گشتاور لختی زمین برابر است با

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(6.38 \times 10^6 \text{ m})^2 \\ = 9.72 \times 10^{37} \text{ m}^2 \text{ kg}.$$

بنا بر این به دست می آید $\tau = 2.76 \times 10^{27} \text{ N m}$.

فهرست منابع

1. «Moments of Inertia of Solid Rectangular Parallelepipeds, Cubes, & Twin Cubes, & Two Other Regular Polyhedra,» J. Satterly; *Am. J. Phys.* 25, 70 (1957).
2. «Moments of Inertia of Plane Triangles,» J. Satterly, *Am. J. Phys.* 26, 452 (1958).
3. «Elementary Analysis of the Gyroscope,» E. Barker, *Am. J. Phys.* 28, 808 (1960).
4. «Resource Letter CM-1 on the Teaching of Angular Momentum & Rigid Body Motion,» John I. Shonle, *Am. J. Phys.* 33, 879 (1965).
5. *Physical Mechanics* (third edition), by R.B. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Chapter 7.
6. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Sections 10-1, 10-2, 10-3, Chapters 12 & 13.
7. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 13, 15, & 16.
8. *A Source Book of Physics*, by W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963; page 65, Poinsot.
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, & M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 18, 19, & 20.
۱۰. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمه اعظم نیرومندراد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، فصلهای ۵ و ۱۱.

مسئله‌ها

۱۰.۱۰. یک میله نازک به طول ۱ m دارای جرم ناچیزی است. این میله ۵ جسم را که جرم هر کدام برابر ۱۰۰۰ kg است و در فاصله‌های ۵۰ cm، ۲۵ cm، ۵۰ cm و ۷۵ cm از یک سر آن قرار گرفته‌اند تحمل می‌کند. گشتاور لختی تمام دستگاه را نسبت به محوری عمود بر میله که (الف) از یک انتها، (ب) از جرم دوم، (ج) از مرکز جرم می‌گذرد، حساب کنید. در هر حالت شعاع ویراسیون را محاسبه و درستی قضیه اشتاینر را تحقیق کنید.

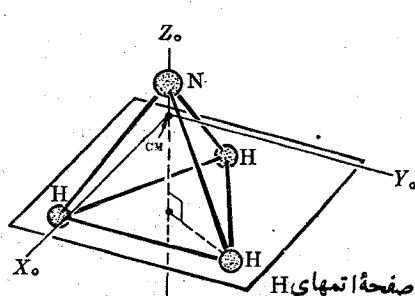
۲۰۱۰. مسئله پیش را در حالتی که جرم میله 20 kg باشد از نو حل کنید.

۳۰۱۰. سه جرم 2 kg هرکدام در یک رأس مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 10 cm قرار دارند. گشتاور لختی دستگاه و شعاع ژیراسیون آن را نسبت به محوری عمود بر سطح مثلث که (الف) از یک رأس مثلث، (ب) از وسط یک ضلع، و (ج) از مرکز جرم می‌گذرد حساب کنید.

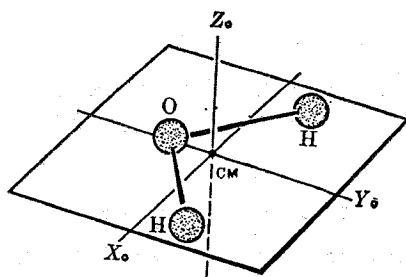
۴۰۱۰. ثابت کنید که گشتاور لختی دستگاهی متشکل از دو جرم m_1 و m_2 به فاصله r ، نسبت به محوری که از مرکز جرم می‌گذرد و بر خط واصل آنها عمود باشد، برابر است با μr^2 ، که μ جرم کاهش‌دهنده دستگاه است. این رابطه را در مورد مولکول CO ($r = 1.13 \times 10^{-10}\text{ m}$)، و مولکول HCl ($r = 1.27 \times 10^{-10}\text{ m}$)، به کار ببرید.

۵۰۱۰. گشتاور لختی مولکول CO_2 را نسبت به محوری که از مرکز جرم می‌گذرد و بر محور مولکول عمود است پیدا کنید. CO_2 یک مولکول خطی است و اتم C در مرکز قرار دارد. فاصله $\text{C}-\text{O}$ برابر است با $1.13 \times 10^{-10}\text{ m}$.

۶۰۱۰. در مولکول H_2O ، فاصله $\text{H}-\text{O}$ برابر $1.0 \times 10^{-10}\text{ m}$ و زاویه بین دو پیوند $\text{H}-\text{O}$ ، 105° است. گشتاور لختی مولکول را نسبت به سه محور اصلی که در شکل ۲۸۰۱۰ نشان داده شده‌اند و از مرکز جرم می‌گذرند پیدا کنید. هنگامی که مولکول دور یک محور اختیاری بچرخد انرژی جنبشی و اندازه حرکت زاویه‌ای آن را نسبت به محورهای اصلی بنویسید.



شکل ۲۹۰۱۰



شکل ۲۸۰۱۰

۷۰۱۰. مولکول NH_3 (شکل ۲۹۰۱۰) هرمی است که N در رأس و سه H در قاعده آن قرار دارد. طول پیوندهای $\text{N}-\text{H}$ برابر $1.01 \times 10^{-10}\text{ m}$ و زاویه بین این پیوندها 108° است. سه گشتاور لختی اصلی را نسبت به محورهایی که از مرکز جرم می‌گذرند پیدا کنید. (سه محور عبارتند از Z_0 که بر قاعده عمود است، X_0 که در صفحه حاصل از یکی از پیوندهای $\text{N}-\text{H}$ و محور Z_0 قرار دارد، و Y_0 که موازی خط واصل دو اتم دیگر H است).

۸۰۱۰. دو بچه، هرکدام به جرم 25 kg ، در دوسر الواری به طول 2.6 m و جرم 10 kg نشسته‌اند. این الوار دور محور قائمی که از مرکز جرم آن می‌گذرد با سرعت 5 دور در

دقیقه می چرخد. اگر هر بچه بدون تماس با زمین 60cm به مرکز جرم نزدیک شود سرعت زاویه‌ای چقدر می شود؟ تغییر انرژی جنبشی چرخشی تمام دستگاه چقدر است؟

۹۰۱۰. با داده‌های مسئله پیش، فرض کنید هنگامی که بچه‌ها در وضع ابتدایی خود قرار دارند یک نیروی افقی 120N به فاصله یک متر از محور در راستای عمود بر الوار بر آن وارد می شود. شتاب زاویه‌ای دستگاه را پیدا کنید.

۱۰۰۱۰. گشتاور لختی چرخشی 50gcm^2 است. در یک لحظه معلوم سرعت زاویه‌ای آن 100rads^{-1} است و بعد از اینکه 100rad چرخید، سرعت زاویه‌ای آن 100rads^{-1} می شود. گشتاور نیروی وارد بر چرخ و افزایش انرژی جنبشی را حساب کنید.

۱۱۰۱۰. به چرخ در حال چرخشی یک گشتاور نیروی 10Nm ناشی از مالش روی محور، اثر می کند. شعاع چرخ 6cm و جرم آن 10kg است و با سرعت 175rads^{-1} می چرخد. چقدر طول می کشد تا چرخ از حرکت باز ایستد؟ قبل از ایستادن چند دور می چرخد؟

۱۲۰۱۰. استوانه‌ای به جرم 20kg و شعاع 25cm با سرعت 1200 دور در دقیقه دور محوری که از مرکز جرم آن می گذرد می چرخد. چه نیروی مماسی ثابت لازم است تا پس از 1800 دور استوانه را از چرخش باز دارد؟

۱۳۰۱۰. دیسکی به جرم 50kg و شعاع 180cm می تواند دور محور خودش بچرخد. به لبه دیسک یک نیروی ثابت 196N اثر می کند. حساب کنید (الف) شتاب زاویه‌ای آن را؛ (ب) زاویه‌ای را که طی می کند؛ (ج) اندازه حرکت زاویه‌ای آن را؛ و (د) انرژی جنبشی آن را بعد از 5s .

۱۴۰۱۰. سرعت اتموبیلی در مدت 8s از 5kmhr^{-1} به 50kmhr^{-1} افزایش می یابد. شعاع چرخهای آن 45cm است. شتاب زاویه‌ای چرخها چقدر است؟ جرم هر چرخ 30kg و شعاع ژیراسیون آن 3m است. اندازه حرکت زاویه‌ای اولیه و نهایی هر چرخ چقدر است؟

۱۵۰۱۰. جرم چرخ طیار یک ماشین بخار 200kg و شعاع ژیراسیون آن 2m است. هنگامی که چرخ با سرعت 120 دور در دقیقه می چرخد، رسیدن بخار قطع می شود. به فرض اینکه چرخ پس از 5 دقیقه متوقف شود، گشتاور نیروی ناشی از مالش روی محور چرخ چقدر است؟ در این مدت چقدر کار به وسیله گشتاور انجام می گیرد؟

۱۶۰۱۰. یک چرخ دستی به جرم 2000g دارای چهار چرخ است که هر چرخ 6cm شعاع و 150g جرم دارد. شتاب چرخ دستی را هنگامی که یک نیروی 6N بر آن وارد می شود حساب کنید.

۱۷۰۱۰. جرم قطعات چرخان یک ماشین 15kg و شعاع ژیراسیون آنها 15cm است. اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی جنبشی آنها را هنگامی که با سرعت 1800 دور در دقیقه می چرخند حساب کنید. گشتاور نیرو و توان لازم برای اینکه در طول 5s به این سرعت زاویه‌ای برسند چقدر است؟

۱۸۰۱۰. شعاع سکه‌ای 1cm و جرم آن 5g است. این سکه با سرعت 6 دور در دقیقه

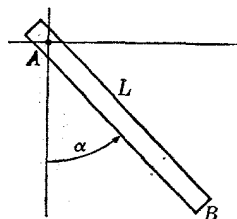
روی یک سطح شیب دار به پایین می‌غلند. (الف) انرژی جنبشی چرخشی، (ب) انرژی جنبشی انتقالی، (ج) انرژی جنبشی کل آن را پیدا کنید. برای رسیدن به این انرژی جنبشی، چه ارتفاعی باید پایین بیاید؟

۱۹۰۱۰. مثال ۹.۸ را، به فرض اینکه گوی دارای شعاع r باشد و به جای لغزیدن روی مسیر خود بغلند از نو حل کنید.

۲۰۰۱۰. جرم اتومبیل مسئله ۱۴.۱۰، ۱۶۰۰kg است و سرعت آن در s به همان اندازه‌ای که داده شده افزایش می‌یابد. (الف) انرژی جنبشی ابتدایی و نهایی هرچرخ را، (ب) انرژی جنبشی کل ابتدایی و نهایی هرچرخ را، و (ج) انرژی جنبشی کل نهایی اتومبیل را حساب کنید.

۲۱۰۱۰. کامیونی به جرم ۱۰ تن با سرعت $۶۰\text{ms}^{-۱}$ حرکت می‌کند. شعاع هرچرخ ۴۵cm و جرم آن ۱۰۰kg و شعاع ژیراسیون آن ۳۰cm است. انرژی جنبشی کل کامیون را حساب کنید.

۲۲۰۱۰. یک حلقه آهنی به شعاعهای خارجی و داخلی ۰.۰۶m و ۰.۰۵m ، دارای ۱۸kg جرم است. این حلقه از سطح شیب‌داری با غلظیدن پایین می‌آید و در پایین سرعت آن به $۳۶\text{ms}^{-۱}$ می‌رسد. انرژی کل و ارتفاعی را که از آنجا شروع به حرکت کرده است حساب کنید.



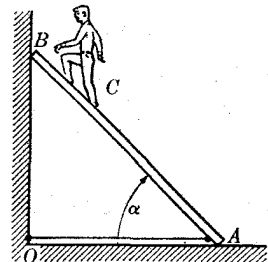
شکل ۳۰.۱۰

۲۳۰۱۰. میله شکل ۳۰.۱۰ دارای طول L و جرم m است و می‌تواند در یک صفحه قائم به دور انتهای خود، A ، آزادانه بچرخد. در آغاز آن را در راستای افقی نگه می‌دارند و سپس رها می‌کنند. در لحظه‌ای که با راستای قائم زاویه α می‌سازد، (الف) شتاب زاویه‌ای میله، (ب) سرعت زاویه‌ای، و (ج) نیروهایی را که در تکیه‌گاه بر میله وارد می‌شوند حساب کنید.

۲۴۰۱۰. یک میله یکنواخت، به طول ۱.۰m و جرم ۲۵kg در راستای قائم آویزان است و می‌تواند دور انتهای بالایی خود بچرخد. انتهای دیگر میله به مدت ۰.۲s با یک نیروی افقی ۱۰۰N برخورد می‌کند. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای را که به وسیله میله دریافت می‌شود پیدا کنید. (ب) آیا میله می‌تواند به وضع قائم در سمت بالا برسد؟

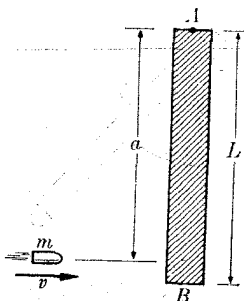
۲۵۰۱۰. نردبام AB به طول ۳m و جرم ۲۰kg به دیوار بدون مالشی تکیه دارد (شکل

۳۱.۱۰. روی زمین نیز مالش وجود ندارد. برای جلوگیری از لیز خوردن نردبام بند OA به آن متصل شده است. مردی به جرم 60 kg در $2/3$ طول نردبام در قسمت بالا قرار دارد و بند ناگهان پاره می‌شود. حساب کنید (الف) شتاب اولیه مرکز جرم دستگاه نردبام به اضافه مرد را، و (ب) شتاب زاویه‌ای اولیه مرکز جرم را. [دانه‌مایی: توجه داشته باشید که سرعت زاویه‌ای اولیه نردبام برابر صفر است.]

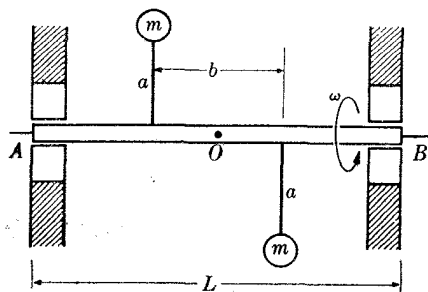


شکل ۳۱.۱۰

۲۶.۱۰. میله افقی AB در شکل ۳۲.۱۰، که در دو انتهای خود توسط یاتاقانهای بدون مالش نگهداری می‌شود، می‌تواند آزادانه دور محور افقی خود بچرخد. مطابق شکل، دو جرم برابر توسط میله‌های سختی با جرم ناچیز، به طور متقارن نسبت به مرکز میله به آن متصل‌اند. پیدا کنید (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه را نسبت به مرکز جرم هنگامی که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، و (ب) نیروهایی را که روی یاتاقانها اثر می‌کنند.



شکل ۳۳.۱۰

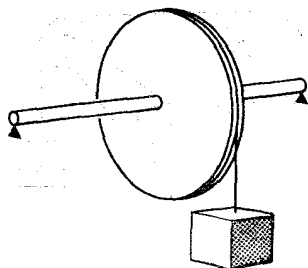


شکل ۳۲.۱۰

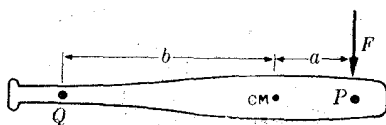
۲۷.۱۰. میله‌ای به طول L و جرم M (شکل ۳۳.۱۰) می‌تواند آزادانه دور نقطه A بچرخد. گلوله‌ای به جرم m و سرعت v در نقطه‌ای به فاصله a از A به میله می‌خورد و در آن فرو می‌رود. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه را نسبت به A بلافاصله قبل و بعد از برخورد تعیین کنید. (ب) اندازه حرکت دستگاه را بلافاصله قبل و بعد از برخورد تعیین کنید. پاسخ خود را دقیقاً توضیح دهید. (ج) درچه شرایطی اندازه حرکت ثابت باقی می‌ماند؟ (د) Q برخورد چقدر است؟

۲۸.۱۰. میله‌ای به طول L و جرم m روی یک سطح افقی بدون مالش قرار دارد (شکل ۳۴.۱۰). در مدت زمان خیلی کوتاه Δt این میله تحت تأثیر نیروی F قرار می‌گیرد و تکان I را پیدایم کند. نیرو

در نقطه‌ای مانند P به فاصله a از مرکز جرم وارد می‌شود. (الف) سرعت مرکز جرم، و (ب) سرعت زاویه‌ای حول مرکز جرم را پیدا کنید. (ج) با نشان دادن $b = K^2/a$ ، که در آن K شعاع ژیراسیون دور مرکز جرم است، نقطه Q را پیدا کنید که در آغاز در چارچوب L بیحرکت باقی می‌ماند. نقطه Q مرکز ضربه نامیده می‌شود. (به عنوان مثال یک بازیکن بیس بال برای پیشگیری از احساس یک ضربه خشک در لحظه زدن گوی، باید چوگان را در مرکز ضربه‌اش بگیرد.) همچنین ثابت کنید که اگر نیرو در نقطه Q وارد شود مرکز ضربه در نقطه P خواهد بود.



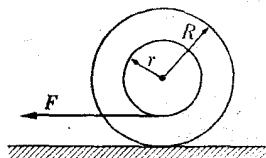
شکل ۳۵.۱۰



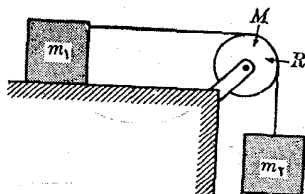
شکل ۳۶.۱۰

۲۹.۱۰. چرخ شکل ۳۵.۱۰، که دارای شعاع 5m و جرم 25kg است می‌تواند دور محور افقی خود بچرخد. به انتهای آزاد نخ که دور چرخ پیچیده است یک جرم 1kg آویزان است. (الف) شتاب زاویه‌ای چرخ، (ب) شتاب خطی جسم، و (ج) کشش نخ را حساب کنید.

۳۰.۱۰. شتاب دستگاه شکل ۳۶.۱۰ را حساب کنید، شعاع چرخ R و جرم آن M است و به دلیل مالش نخ می‌چرخد. در این حالت $m_1 = 50\text{kg}$ ، $m_2 = 200\text{kg}$ ، $m_3 = 15\text{kg}$ و $R = 10\text{cm}$ است.



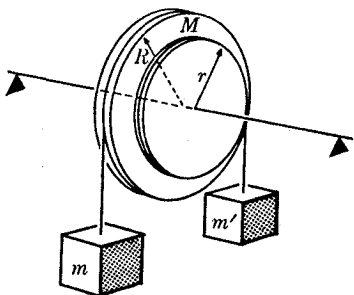
شکل ۳۷.۱۰



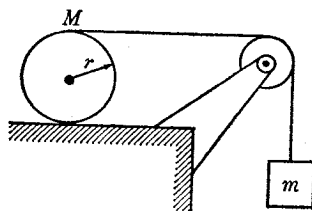
شکل ۳۸.۱۰

۳۱.۱۰. نخ به دور استوانه کوچک شکل ۳۷.۱۰ پیچیده شده است. اگر نخ را با

نیروی F بکشیم، شتاب استوانه را حساب کنید. سوی حرکت را تعیین کنید. داریم $r = 3\text{ cm}$ ، $m = 1\text{ kg}$ و $F = 1\text{ N}$ ، $R = 5\text{ cm}$.
 ۳۲.۱۰ درد دستگاه نمایش داده شده در شکل ۳۸.۱۰، $m = 0.2\text{ kg}$ ، $M = 1.0\text{ kg}$ ، شتاب زاویه‌ای استوانه M و کشش نخ را حساب کنید. از اثر قرقره کوچک صرف نظر کنید.



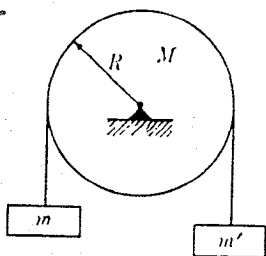
شکل ۳۹.۱۰



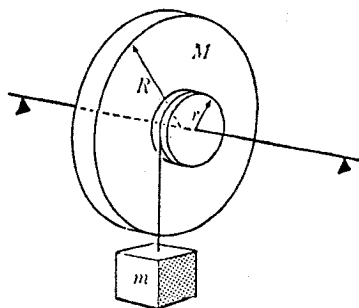
شکل ۳۸.۱۰

۳۳.۱۰ در دستگاه شکل ۳۹.۱۰، سرعت زاویه‌ای دیسک و سرعت خطی m و m' را تعیین کنید. کشش هر یک از نخها را حساب کنید. فرض کنید $m = 600\text{ g}$ ، $m' = 500\text{ g}$ ، $R = 8\text{ cm}$ و $r = 6\text{ cm}$ است.

۳۴.۱۰ در دستگاه شکل ۴۰.۱۰، شتاب m و کشش نخ را حساب کنید. گشتاور لختی دیسک کوچک به شعاع r را ناچیز بگیرید. در این حالت $r = 4\text{ cm}$ ، $R = 12\text{ cm}$ ، $M = 2\text{ kg}$ و $m = 2\text{ kg}$ است.



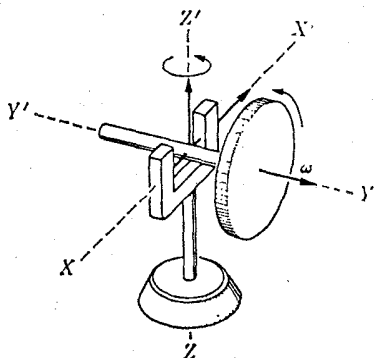
شکل ۴۱.۱۰



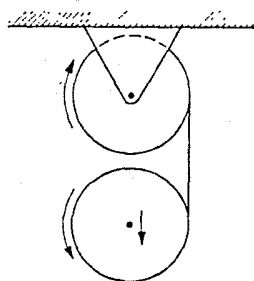
شکل ۴۰.۱۰

۳۵.۱۰ در شکل ۴۱.۱۰، $m = 4\text{ kg}$ ، $m' = 3\text{ kg}$ ، $M = 6\text{ kg}$ ، $R = 0.40\text{ m}$ است. (الف) انرژی جنبشی کل دستگاه را پس از 0.5 s ، (ب) کشش نخ را حساب کنید.
 ۳۶.۱۰ دو دیسک شکل ۴۲.۱۰ دارای جرم برابر m و شعاع یکسان R می‌باشند. دیسک

بالایی می‌تواند آزادانه دور یک محور افقی که از مرکزش می‌گذرد بچرخد. نخ دور دو دیسک پیچیده شده است. دیسک پایین را رها می‌کنند تا بیفتد. (الف) شتاب مرکز جرم دیسک پایینی، (ب) کشش نخ، و (ج) شتاب زاویه‌ای هر دیسک را دور مرکز جرمش پیدا کنید.



شکل ۴۳.۱۰



شکل ۴۲.۱۰

۳۷.۱۰. جرم ژيروسکوپ شکل ۴۳.۱۰ برابر 10 kg است. دیسک در 10 سانتیمتری محور ZZ' قرار دارد و شعاع آن 5 cm است و با سرعت زاویه 100 rad s^{-1} دور محور YY' می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی چقدر است؟

۳۸.۱۰. یک ژيروسکوپ نمایشی، تشکیل شده است از یک حلقه فلزی به شعاع 35 m و جرم 5 kg که توسط شعاعهای خود به محوری اتصال دارد که از هر طرف 20 cm امتداد پیدا می‌کند. در حالی که حلقه با سرعت 300 دور در دقیقه می‌چرخد، نمایشگر محور را در وضع افقی نگه می‌دارد. بزرگی و سوی نیرویی که هر یک از دستهای نمایشگر روی محور وارد می‌کند در حالتی زیر پیدا کنید: (الف) محور به موازات خودش جابجا می‌شود؛ (ب) محور در صفحه افقی با سرعت 2 دور در دقیقه حول مرکز جرمش می‌چرخد؛ (ج) محور در صفحه قائم دور مرکزش با همان سرعت می‌چرخد. همچنین حساب کنید سرعت زاویه‌ای حلقه چقدر باید باشد تا هنگامی که ژيروسکوپ را تنها با یک دست می‌گیرند محور آن افقی باقی بماند.

۳۹.۱۰. ثابت کنید که در یک جسم سخت $\frac{dE_k}{dt} = \omega \cdot \tau$ است. این معادله نشان می‌دهد که $\omega \cdot \tau$ توان چرخشی است. [دانه‌مایی: توجه داشته باشید که برای یک جسم در حال چرخش $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ است. نخست با به کار بردن معادله (۱۰.۸)، معادله را برای یک ذره تنها به دست آورید و سپس نتایج را با هم جمع کنید تا معادله برای تمام ذرات جسم سخت به دست آید.]

۴۰.۱۰. هنگامی که هیچ گشتاور نیرویی روی یک جسم در حال حرکت اثر نکند، نه تنها

اندازه حرکت زاویه‌ای، بلکه انرژی جنبشی آن نیز تغییر نمی‌کند. معادله قطب‌راه (مثال ۸.۱۰) را با پیدا کردن تقاطع بیضیوارهای مربوط به L^2 و E_k حساب کنید. نتیجه به دست آمده را تجزیه و تحلیل کنید.

۴۱.۱۰ ثابت کنید که گشتاور لختی یک جسم سخت دور محوری که با محورهای اصلی زاویه‌های α ، β و γ می‌سازد برابر است با

$$I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma.$$

۴۲.۱۰ قطعه سختی به ابعاد 0.20 m ، 0.30 m و 0.40 m و جرم 4 kg دور محوری که از بزرگترین قطر آن می‌گذرد با سرعت 120 دور در دقیقه می‌چرخد. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای آن را نسبت به محورهای اصلی پیدا کنید. (ب) زاویه بین اندازه حرکت زاویه‌ای و محور چرخش را تعیین کنید. (ج) انرژی جنبشی چرخشی را به دست آورید. [دانشجوی: برای به دست آوردن گشتاور لختی نتیجه مسئله ۴۱.۱۰ را به کار ببرید.]

۴۳.۱۰ در مورد جسم مسئله پیش، فرض می‌کنیم سرعت زاویه‌ای ثابت است. (الف) گشتاور نیروی وارد به جسم نسبت به محورهای اصلی، و (ب) زاویه بین گشتاور نیرو و محور چرخش را تعیین کنید.

۴۴.۱۰ ذره‌ای به جرم m با سرعت زاویه‌ای ω دور محوری حرکت می‌کند، به گونه‌ای که بنا به معادله (۴۸.۵) سرعت آن برابر است با $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. ثابت کنید که مولفه‌های اندازه حرکت زاویه‌ای آن عبارتند از

$$\begin{aligned} L_x &= m[\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz], \\ L_y &= m[-\omega_x xy + \omega_y(z^2 + x^2) - \omega_z yz], \\ L_z &= m[-\omega_x zx - \omega_y yz + \omega_z(x^2 + y^2)]. \end{aligned}$$

۴۵.۱۰ نتیجه مسئله پیش را در مورد یک جسم سخت تعمیم دهید تا به دست آید

$$\begin{aligned} L_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ L_y &= I_{xy} \omega_x - I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ L_z &= I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y - I_z \omega_z. \end{aligned}$$

در رابطه‌های بالا بنا به معادله (۷.۱۰)،

$$\begin{aligned} I_x &= \sum m(y^2 + z^2), \\ I_y &= \sum m(z^2 + x^2), \\ I_z &= \sum m(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

گشتاورهای لختی نسبت به سه محور مختصات، و

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum mxy, \\ I_{yz} &= \sum myz, \\ I_{zx} &= \sum mzx \end{aligned}$$

حاصل ضربهای لختی^۱ نامیده می‌شوند. با مقایسهٔ این نتیجه با معادلهٔ (۵۰۱۰) دانشجو مشاهده خواهد کرد که محوره‌های اصلی محورهایی هستند که حاصل ضربهای لختی برای آنها برابر صفرند. همچنین توجه کنید که رفتار چرخشی یک جسم سخت با کمیت مشخص می‌شود که عبارتند از: سه گشتاور لختی و سه حاصل ضرب لختی.

۴۶۰۱۰. سه گشتاور لختی و سه حاصل ضرب لختی جسم نشان داده شده در شکل ۱۶۰۱۰ را نسبت به (الف) محوره‌های X_0 ، Y_0 و Z_0 ، (ب) محوره‌های X ، Y و Z ، و (ج) محوره‌های X' ، Y' و Z' تعیین کنید. آیا این کمیتها همیشه ثابت هستند؟

۴۷۰۱۰. حاصل ضربهای لختی مولکولهای H_2O و NH_3 را نسبت به محورهایی که در مسئله‌های ۶۰۱۰ و ۷۰۱۰ نشان داده شده‌اند حساب کنید و تحقیق کنید که این محورها محوره‌های اصلی می‌باشند.

۴۸۰۱۰. درستی رابطهٔ برداری زیر را تحقیق کنید:

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C).$$

از این رابطه استفاده کنید و ثابت کنید که در مورد جسم مسئلهٔ ۴۴۰۱۰ داریم

$$v^2 = (\omega \times r)^2 = \omega^2 r^2 - (\omega \cdot r)^2.$$

سپس انرژی جنبشی آنرا به صورت زیر بنویسید:

$$E_k = \frac{1}{2} m [\omega_x^2 (y^2 + z^2) + \omega_y^2 (z^2 + x^2) + \omega_z^2 (x^2 + y^2) - 2\omega_x \omega_y xy - 2\omega_y \omega_z yz - 2\omega_z \omega_x zx].$$

۴۹۰۱۰. با بسط نتیجهٔ مسئلهٔ پیش، انرژی جنبشی یک جسم سخت در حال چرخش را به صورت زیر بنویسید:

$$E_k = \frac{1}{2} [I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{zx} \omega_z \omega_x].$$

مشاهده می‌شود، هنگامی که حاصل ضربهای لختی برابر صفر باشند رابطهٔ بالا به مقادیری که در بخش ۵۰۱۰ برای محوره‌های اصلی بیان شدند، تبدیل می‌شود.

۵۰۰۱۰. برای حل مثال ۷۰۱۰ نخست مؤلفه‌های L به موازات محوره‌های ثابت XYZ را پیدا کنید و سپس با به کار بردن مستقیم معادلهٔ (۱۱۰۱۰) مؤلفه‌های T را حساب کنید. همچنین حالت چرخشی شتابدار ($d\omega/dt \neq 0$) را نیز بررسی کنید.

دینامیک انرژیهای بالا

مقدمه	۱۰۱۱
اصل کلاسیک نسبیت	۲۰۱۱
اصل خاص نسبیت	۳۰۱۱
اندازه حرکت	۴۰۱۱
نیرو	۵۰۱۱
انرژی	۶۰۱۱
تبدیل انرژی و اندازه حرکت	۷۰۱۱
تبدیل نیرو	۸۰۱۱
دستگاه ذرات	۹۰۱۱
برخورد در انرژیهای بالا	۱۰۰۱۱

در فصلهای پیش به شرح و توضیح نظریهٔ دینامیکی پرداختیم که حرکت اجسام مشهود در اطراف ما را توصیف می‌کرد و مکانیک کلاسیک یا نیوتونی نام داشت. این نظریه برچندین فرض متکی بود. به عنوان مثال، دیدیم که اندازه حرکت را می‌توان به صورت $p = mv$ نشان داد که در آن جرم m ضریب مشخصهٔ ذره یا دستگاه است. m را به طور منطقی یک ضریب ناوردای هرذره یا دستگاه در نظر گرفتیم. تا زمانی که گسترهٔ سرعت‌های مورد بررسی خیلی بزرگ نباشد، فرض ناوردایی جرم معتبر و با تجربه سازگار است. ولی ممکن است در آزمایش‌های مربوط به سرعت‌های خیلی بزرگ این فرض درست نباشد. در واقع، در مطالعهٔ حرکت ذرات بسیار پرانرژی، مانند الکترون‌های لایه‌های داخلی اتمها یا ذرات موجود در پرتوهای کیهانی یا ذرات حاصل ازشتابنده‌های انرژی بالا، تفاوت‌هایی مشاهده می‌شود. هدف این فصل ارائه و تشریح یک نظریهٔ کلی حرکت است که هم برای ذرات کم‌انرژی و هم برای ذرات پرانرژی صادق باشد. اساس توضیح این نظریه برروی تبدیل لورنتس که در بخش ۶.۶ در بارهٔ آن گفتگو شد، و نیز اصل نسبیت^۱ متکی است. به همین دلیل نظریهٔ جدید مکانیک نسبیتی^۲ نامیده می‌شود.

۲.۱۱ اصل کلاسیک نسبیت

در فصل ۶ دربارهٔ ماهیت نسبی حرکت گفتگو کردیم و رابطه‌های سرعت و شتاب اندازه‌گیری شده به وسیلهٔ دو ناظر در حالت‌های مختلف حرکت نسبی را به دست آوردیم. بویژه در بخش ۶.۳ تبدیل گالیله را برای دو ناظر که نسبت به هم حرکت انتقالی یکنواخت دارند پیدا کردیم.

در فصل ۷ تاکید شد که قوانین حرکت باید به یک ناظر لخت مربوط یا نسبت به او در نظر گرفته شوند. اکنون فرض می‌کنیم دو ناظر لخت که با سرعت ثابتی نسبت به هم حرکت می‌کنند، می‌خواهند مشاهدات خود از یک پدیدهٔ واحد را با تبدیل گالیله به هم مربوط کنند. این بار مسئله را باید با دید انتقادی توی نگریست، و بررسی کرد که آیا قوانین دینامیکی که برای یک ناظر لخت معتبر هستند برای هر ناظر لخت دیگری نیز برقرارند یا نه. کافی است این موضوع تنها در مورد اصل بقای اندازه حرکت و تعریف نیرو مورد بررسی قرار گیرد، زیرا سایر قوانین دینامیک از این دو نتیجه می‌شوند. این فرضیه که تمام قوانین دینامیک باید برای تمام ناظرهای لخت که با سرعت ثابتی نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند یکسان باشد، اصل کلاسیک نسبیت^۳ را تشکیل می‌دهد.

دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم v_1 و v_2 سرعت‌هایی هستند که به وسیلهٔ ناظر لخت O برای آنها اندازه‌گیری می‌شود. اگر هیچ‌گونه نیروی

خارجی بر این ذره‌ها وارد نشود، اصل بقای اندازه حرکت لازم می‌دارد که

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const.} \quad (۱۰۱۱)$$

برای ناظر لخت دیگری مانند O' که نسبت به ناظر O با سرعت ثابت v حرکت می‌کند، بنا به معادله (۹.۶) که از تبدیل گالیله به‌دست آمد، سرعت‌های m_1 و m_2 عبارتند از

$$v'_1 = v_1 - v \quad \text{و} \quad v'_2 = v_2 - v$$

با قراردادن این سرعت‌ها در معادله (۱۰۱۱) داریم

$$m_1(v'_1 + v) + m_2(v'_2 + v) = \text{const}$$

یا

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = \text{const} - (m_1 + m_2)v = \text{const.} \quad (۲۰۱۱)$$

توجه داشته باشید که نتیجه جدید ثابت نیست مگر اینکه v ثابت باشد؛ یعنی ناظر O' نیز یک ناظر لخت باشد. معادله (۲۰۱۱) کاملاً مشابه معادله (۱۰۱۱) است، در نتیجه دو ناظر اصل بقای اندازه حرکت یکسانی را تحقیق می‌کنند.

اکنون رابطه بین نیروهای اندازه‌گیری شده به وسیله دو ناظر لخت O و O' را که با سرعت نسبی ثابت v حرکت می‌کنند بررسی می‌کنیم. فرض کنید ناظرهای O و O' هر دو در تمام طول مدت حرکت برای یک ذره جرم یکسانی را اندازه می‌گیرند. این فرض دست‌کم تا موقعی که سرعت نسبی v نسبت به سرعت نور خیلی کوچک باشد با تجربه تأیید شده است. اگر v و v' بترتیب مقدار سرعت‌های ذره نسبت به دو ناظر باشند، بنا به معادله (۹.۶) با رابطه $v = v' + v$ به هم مربوط می‌شوند. چون v ثابت است، یعنی $dv/dt = 0$ داریم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} \quad \text{یا} \quad a = a' \quad (۳۰۱۱)$$

یعنی دو ناظر برای ذره شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند [به معادله (۱۳.۶) مراجعه کنید]. بنا به تعریف نیرو که در معادله (۱۲.۷) بیان شد، نیروی اندازه‌گیری شده به وسیله هر ناظر عبارت است از

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma \quad \text{و} \quad F' = \frac{dp'}{dt} = m \frac{dv'}{dt} = ma'.$$

با توجه به اینکه $a = a'$ است نتیجه می‌گیریم که

$$F = F'. \quad (۴۰۱۱)$$

در نتیجه اگر دو ناظر لخت برای مقایسه اندازه‌گیریهای خود تبدیل گالیله را به کار ببرند، هر دو نیروی مؤثر یکسانی را بر روی ذره اندازه می‌گیرند. به‌دانشجو توصیه می‌کنیم که تحقیق کند اگر انرژی نسبت به ناظر لخت O ثابت بماند،

یعنی اگر داشته باشیم

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + E_{p,12} = \text{const}$$

آنگاه انرژی برای ناظر لخت O' نیز ثابت می ماند:

$$E' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + E'_{p,12} = \text{const}$$

که در این رابطه اگر انرژی پتانسیل فقط به فاصله بین دو ذره بستگی داشته باشد، $E_{p,12} = E'_{p,12}$ است. (برای مطالعه رابطه بین E و E' به مسئله ۱۰.۱۱ مراجعه کنید.) بنابراین، تا آنجا که به قوانین دینامیک مربوط می شود، توصیف حرکت برای هر دو ناظر لخت یکسان است.

مثال ۱۰.۱۱ در شکل معادله حرکتی که به وسیله یک ناظر غیر لخت به کار برده شود، بحث کنید.

حل: اگر ناظری مانند O' لخت نباشد، بدین معنی است که $\mathbf{v}$ سرعت این ناظر نسبت به یک ناظر لخت O تابعی است از زمان. بنابراین $d\mathbf{v}/dt \neq 0$ است. در این صورت، چون $\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{v}$ است، به دست می آید

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{یا} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

نیروی اندازه گیری شده به وسیله ناظر O برابر است با $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. بنابراین اگر هر دو ناظر تعریف یکسانی برای نیرو به کار ببرند، در این صورت ناظر غیر لخت O' می نویسد $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$. در نتیجه از رابطه بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a}'$ به دست می آید

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (5.11)$$

بدین طریق، ناظر لخت و ناظر غیر لخت برای یک نیرو و مقادیر متفاوتی اندازه می گیرند. به گفته دیگر، برای ناظر دوم، علاوه بر نیروی $\mathbf{F}$ که ناظر لخت O اندازه گیری می کند (نیروی که شامل تمام برهم کشهای مؤثر بر روی ذره می باشد)، نیروی دیگری نیز مانند $\mathbf{F}''$ وجود دارد که بر ذره وارد می شود:

$$\mathbf{F}'' = -m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (6.11)$$

به گونه ای که نیروی برآیند وارد بر ذره برابر است با $\mathbf{F} + \mathbf{F}''$. این نیروی مجازی نیروی لختی نامیده می شود.

هنگام توصیف حرکت یک ذره نسبت به زمین (که یک چارچوب مرجع لخت نیست) گاهی این نوع منطق را به کار می بریم. در این صورت، $d\mathbf{v}/dt$ همان شتاب مرکزگرای

$\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ است [به معادله (۲۵.۶) مراجعه کنید]. بنا بر این نیروی لختی برابر می شود با $\mathbf{F}'' = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ ، که متناظر با یک نیروی گریزاز مرکز است که علاوه بر وزن ذره بر آن وارد می شود.

۳.۱۱ اصل خاص نسبیت

در سال ۱۹۰۵ (۱۲۸۴ ه.ش.) آلبرت اینشتین فیزیکدان آلمانی، با بیان اصل خاص نسبیت گام بلند دیگری برداشت. بیان این اصل از این قرار است:

تمام قوانین طبیعت (نه فقط قوانین دینامیک) باید برای تمام ناظرهای لخت که نسبت به هم با سرعت ثابتی حرکت می کنند یکسان باشند.

این اصل خاص یا جدید نسبت معنای عظیمی دربر دارد، زیرا با پذیرش این اصل باید کلیه قوانین فیزیک را به گونه ای بیان کرد که درگذر از چارچوب یک ناظر لخت به چارچوب لخت دیگر تغییر نکنند، واقعیتی که با استفاده از تبدیل گالیله در مورد قوانین دینامیک تحقیق کردیم. از اینجا قیدی در بیان ریاضی این قوانین به وجود می آید. از جمله قوانینی که باید برای تمام ناظرهای لخت ناوردا بمانند، قوانینی هستند که پدیده های الکترومغناطیسی را توصیف می کنند؛ این قوانین در فصلهای آینده بتفصیل مورد گفتگو قرار می گیرند.

ولی از هم اکنون می توان گفت که در بیان این قوانین نسبت به یک ناظر لخت، سرعتی مانند c وارد می شود که همان سرعت نور است. در نتیجه، اصل خاص نسبیت به گونه ای که اینشتین فرمول بندی کرده است، ایجاب می کند سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت یکسان باشد.

بخشی از انگیزه اینشتین در بیان فرضیه خود، نتیجه یک رشته آزمایشهای تاریخی بود که از حدود سال ۱۸۸۰ (۱۱۵۹ ه.ش.) به وسیله مایکلسون و مورلی برای اندازه گیری سرعت نور در راستاهای مختلف، آغاز شده بودند. آنها درصدد بودند که ببینند حرکت زمین چه تغییری در سرعت نور به وجود می آورد. ما آزمایش مایکلسون و مورلی را در فصل ۶ (بویژه در مثال ۷.۶) مورد مطالعه قرار دادیم. چنانکه در آنجا توضیح داده شد، نتیجه آزمایشها همیشه منفی بود و نشان می داد که سرعت نور به حرکت ناظر بستگی ندارد.

ولی، بنا به معادله (۹.۶)، برای دو ناظر متحرک نسبت به هم که مشاهدات خود را بر مبنای تبدیل گالیله به یکدیگر مربوط می کنند، سرعت یک شیء هرگز یکسان نیست. از طرف دیگر، چنانکه در فصل ۶ توضیح داده شد، سرعت نور برای تمام ناظرهای لخت که مشاهداتشان با تبدیل لورنتس به یکدیگر مربوط می شوند یکسان است. بنا بر این بسدی به نظر می رسد برای تحقق اصل جدید باید به جای تبدیل گالیله از تبدیل لورنتس استفاده کرد. با توجه به مراتب فوق، اصل خاص نسبیت را به صورت زیر بیان می کنیم:

ناظرهای لخت برای مربوط ساختن مشاهدات خود باید از تبدیل لورنتس استفاده کنند و تمام کمیت‌های فیزیکی باید بطوری از یک دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگر تبدیل شوند که بیان قوانین فیزیکی برای تمام ناظرهای لخت یکسان باشد.

بقیه این فصل به این بحث اختصاص یافته است که این فرمول‌بندی جدید اصل نسبیت، چگونه در کمیت‌های دینامیکی که پیش از این تعریف شده‌اند تأثیر می‌گذارد. از نقطه نظر عملی، نظریه‌ای که در صدد توضیح آن هستیم تنها در سرعت‌های قابل مقایسه با سرعت نور اهمیت دارد، بنابراین در مواردی به کار می‌رود که ذرات دارای انرژی بسیار بالا باشند. برای ذرات با سرعت‌های کم، تبدیل گالیلئ برای مربوط ساختن کمیت‌های فیزیکی در دو چارچوب لخت از تقریب خوبی برخوردار است و مکانیک نیوتونی برای تشریح این پدیده‌ها بسیار مناسب می‌باشد. به این نظریه نسبیت خاص می‌گویند، زیرا تنها در مورد ناظرهای لخت به کار می‌رود. برای ناظرهای غیر لخت، نظریه نسبیت عام را به کار می‌برند، که در پایان فصل ۱۳ باختصار در مورد آن گفتگو می‌شود.

حتی اگر، در عمل بتوان در بیشتر موارد نظریه نسبیت خاص را نادیده گرفت، با وجود این از نقطه نظر درک مفاهیم، این نظریه دگرگونی عمیقی در دریافتهای نظری و نیز تجزیه و تحلیلهای ما از پدیده‌های فیزیکی ایجاد کرده است.

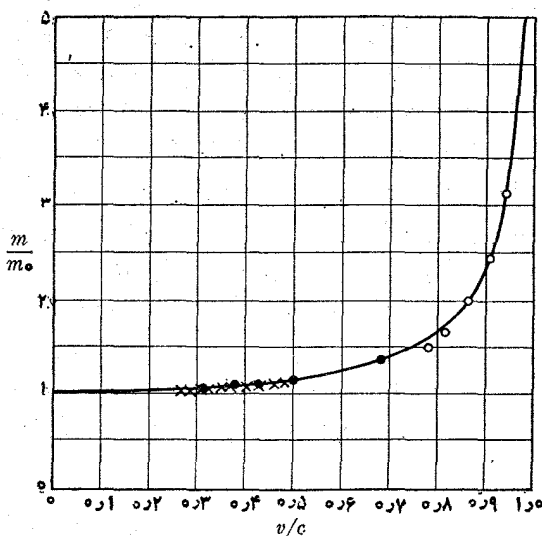
۲.۱۱ اندازه حرکت

در فصل ۷، اندازه حرکت یک ذره را با رابطه $p = mv$ تعریف کردیم، و جرم ذره را مستقل از سرعت آن در نظر گرفتیم. ولی بعد از آزمایش‌های زیاد با ذرات با انرژیهای بالا، مانند الکترون‌ها و پروتون‌های سریعی که توسط شتابدهنده‌های مدرن به وجود می‌آیند، یا ذراتی که در پرتوهای کیهانی یافته می‌شوند، بطلان این فرض ثابت شده است. یادآوری می‌کنیم که نیروی وارد بر یک ذره با رابطه $F = dp/dt$ تعریف می‌شود، و با اعمال نیروهای معلوم روی ذرات سریع می‌توان رابطه مربوط به p را به طور تجربی به دست آورد. [به عنوان مثال، می‌توان حرکت الکترون‌ها (یا سایر ذرات باردار) با انرژیهای مختلف را در میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی معلوم مشاهده کرد.] از این آزمایش‌ها نتیجه می‌شود جرم ذره‌ای که با سرعت v نسبت به ناظر حرکت می‌کند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_0 \quad (۲.۱۱)$$

در اینجا k همان است که در رابطه (۳۲.۶) تعریف شد و m_0 ثابتی است که مشخصه هر ذره است و جرم سکون ذره نامیده می‌شود، زیرا m_0 عبارت است از مقدار m به ازای $v = 0$ ، یعنی هنگامی که ذره نسبت به ناظر ساکن باشد. وجود سازه $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ، که

قبلاً در فصل ۶ هنگام مطالعه تبدیل لورنتس با آن برخورد داشتیم، شگفت آور نیست، زیرا اصل جدید نسبیت که بر تبدیل لورنتس متکی است، استعمال آن را ایجاب می‌کند. شکل ۱۰۱۱ تغییر جرم با سرعت را مطابق رابطه (۷.۱۱) نشان می‌دهد. این شکل اساساً همان شکل ۱۵.۶ است، زیرا هر دو شکل k را بر حسب v/c به دست می‌دهند.



شکل ۱۰۱۱. تأیید تجربی تغییر جرم با سرعت. منحنی با خط پی براساس معادله (۷.۱۱) رسم شده است. داده‌های تجربی کوفمان^۱ (۱۹۰۱ ه.ش.) با دایره‌های توخالی، و بوچرد^۲ (۱۹۰۹ ه.ش.) با دایره‌های سیاه، و گی^۳ و لاوانشی^۴ (۱۹۱۵ و ۱۲۹۴ ه.ش.) با ضربدر نشان داده شده‌اند.

چنانکه ملاحظه می‌کنید تنها درسرعت‌های خیلی بالاست که جرم ذره افزایش قابل ملاحظه‌ای پیدا می‌کند. به عنوان مثال، حتی برای سرعت $v = 0.5c$ ، $m/m_0 = 1/15$ است یعنی افزایش جرم تنها ۱۵ درصد می‌باشد.

بنابراین باید اندازه حرکت پک ذره را که با سرعت v نسبت به ناظری حرکت می‌کند با رابطه زیر بیان کرد:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_0 v. \quad (۸.۱۱)$$

درسرعت‌های کم ($v \ll c$)، می‌توان k را مساوی یک گرفت و دراین صورت رابطه (۸.۱۱) با رابطه‌ای درفصل‌های پیش به دست آوردیم یکسان می‌شود. هنوز باید تحقیق شود که آیا رابطه جدید اندازه حرکت پاسخگوی درباسته‌های اصل

نسبت هست یا نه. به گفته دیگر، باید تحقیق کنیم اگر حرکت ذره را از یک دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگری ارجاع دهیم که ذره نسبت به آن با سرعت v' حرکت می کند، آیا اندازه حرکت p' با قراردادن v' به جای v در معادله (۸.۱۱) به دست می آید، و آیا دو رابطه اندازه حرکت با تبدیل لورنتسی که دوناظر را به هم مربوط می کند مطابقت دارند یا نه. همچنین باید تحقیق کرد که آیا این تعریف جدید اندازه حرکت با اصل ناوردایی بقای اندازه حرکت برای تمام ناظرهای لخت موافق است یا نه. به این سؤال در بخشهای ۷.۱۱ و ۹.۱۱ پاسخ داده خواهد شد.

مثال ۲.۱۱. افزایش نسبی سرعت و افزایش نسبی اندازه حرکت را با هم مقایسه کنید.

حل: افزایش نسبی اندازه حرکت با dp/p و افزایش نسبی سرعت با dv/v تعریف می شود. اندازه حرکت و سرعت با معادله (۸.۱۱) به هم مربوط می شوند که صورت اسکالر آن چنین است:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

بنا به تعریف افزایش نسبی سرعت، ابتدا باید از طرفین رابطه فوق لگاریتم بگیریم. در نتیجه به دست می آید

$$\ln p = \ln m_0 + \ln v - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

با دیفرانسیل گیری از رابطه فوق به دست می آید

$$\frac{dp}{p} = \frac{dv}{v} + \frac{(v/c^2)dv}{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \frac{dv}{v} = k^2 \frac{dv}{v}.$$

بدین طریق مشاهده می شود که برای سرعتهای کم، موقعی که v^2/c^2 قابل اغماض باشد، داریم $dp/p = dv/v$. یعنی افزایش نسبی اندازه حرکت با افزایش نسبی سرعت برابر است و این با تجربه های روزمره ما سازگار است. ولی در سرعتهای بزرگ که v^2/c^2 قابل مقایسه هستند، افزایش نسبی سرعت dv/v ، در سازه بزرگی ضرب می شود، بدین طریق برای افزایش خیلی کم سرعت، امکان دارد افزایش نسبی مهمی برای اندازه حرکت به دست آید. به عنوان مثال، در سرعت $v = 0.7c$ داریم $dp/p \approx 2(dv/v)$ و برای $v = 0.99c$ داریم $dp/p \approx 50(dv/v)$.

۵.۱۱ نیرو

در فصل ۷، نیرو را با معادله (۱۲.۷) تعریف کردیم، که از اصل بقای اندازه حرکت نتیجه می شد. این تعریف را می توان در مکانیک نسبیتی نیز محفوظ نگه داشت. بدین طریق نیرو به صورت جدید زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \quad (9.11)$$

در مورد یک حرکت مستقیم‌الخط می‌توان بزرگیها را در نظر گرفت و نوشت

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{m_0 (dv/dt)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m}{1-v^2/c^2} \frac{dv}{dt}. \quad (10.11)$$

در معادله (۱۰.۱۱)، m مقداری است که از معادله (۷.۱۱) به دست می‌آید. چون dv/dt برابر شتاب است، نتیجه می‌گیریم که برای یک ذره در انرژی بالا که در خط مستقیم حرکت می‌کند معادله $F = ma$ دیگر اعتبار ندارد. از طرف دیگر، در یک حرکت دایره‌ای یکنواخت، بزرگی سرعت ثابت است ولی راستای آن ثابت نیست، و معادله (۹.۱۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

در این حالت $d\mathbf{v}/dt$ شتاب قایم یا مرکزگرایی است که بزرگی آن برابر است با v^2/R که در آن، مطابق معادله (۴.۵)، R شعاع دایره است. بنابراین بزرگی نیروی مرکزگرا یا قایم برابر می‌شود با

$$F_N = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{v^2}{R} = m \frac{v^2}{R} = \frac{pv}{R}. \quad (11.11)$$

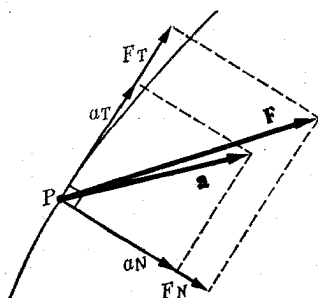
می‌بینیم به شرطی که برای جرم رابطه نسبیتی آن، یعنی معادله (۷.۱۱) را به کار ببریم، رابطه $F = ma$ در حرکت دایره‌ای یکنواخت صادق است. در حالت کلی حرکت منحنی‌الخط، با توجه به اینکه dv/dt شتاب مماسی و v^2/R شتاب قایم است، از معادله‌های (۱۰.۱۱) و (۱۱.۱۱) نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌های نیرو در راستای مماس و قایم بر مسیر، با استفاده از معادله (۷.۱۱) عبارتند از

$$F_T = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} a_T = \frac{m}{1-v^2/c^2} a_T = k^2 m a_T \quad (12.11)$$

$$F_N = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} a_N = m a_N.$$

یک نتیجه مستقیم رابطه‌های (۱۲.۱۱) این است که نیرو با شتاب موازی نیست (شکل ۲.۱۱)، زیرا ضریبهایی که در a_N و a_T ضرب می‌شوند متفاوتند. بدین طریق برای ذره‌ای که در انرژیهای بالاست، یک رابطه برداری از نوع $F = ma$ را نمی‌توان به کار برد، مگر اینکه حرکت ذره دایره‌ای یکنواخت باشد. با وجود این، رابطه اساسی تر $F = dp/dt$ هنوز اعتبار خود را حفظ می‌کند. زیرا این همان تعریف ما از نیرو است. یک نکته مهم دیگر این است که مؤلفه مماسی نیرو، F_T ، به طور نسبی بزرگتر از مؤلفه قایم آن، F_N ،

است. این اختلاف ناشی از آن است که نیروی قایم فقط راستای سرعت را تغییر می‌دهد بدون آنکه بزرگی و در نتیجه جرم آن را تغییر دهد، ولی نیروی مماسی باید نه تنها بزرگی سرعت را تغییر دهد، بلکه در نتیجه این تغییر سرعت، جرم ذره را نیز افزایش دهد.



شکل ۲.۱۱. در سرعت‌های بزرگ، نیرو با شتاب موازی نیست.

مثال ۳.۱۱. حرکت مستقیم‌الخط بر اثر یک نیروی ثابت، در دینامیک نسبیتی.

حل: این حرکت، در مکانیک غیر نسبیتی، حرکتی است با شتاب ثابت. بنا بر این اگر از نقطه‌ای که ذره شروع به حرکت می‌کند زمان و جابجایی را اندازه بگیریم، می‌توانیم از معادله‌های (۱۰.۵) و (۱۱.۵) برای پیدا کردن روابط $v = at$ و $x = at^2/2$ استفاده کنیم که در اینجا $a = F/m_0$ برابر شتاب ثابت می‌باشد. در مکانیک نسبیتی، از معادله (۹.۱۱) به صورت اسکالر آن استفاده می‌کنیم، زیرا حرکت مستقیم‌الخط است و تغییری در راستا به وجود نمی‌آید. بنا بر این

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه، و با توجه به اینکه F ثابت است (و به ازای $t = 0$ ، $v = 0$ است) داریم

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Ft.$$

این رابطه را نسبت به v حل می‌کنیم:

$$v = c \frac{(F/m_0 c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0 c)^2 t^2}}.$$

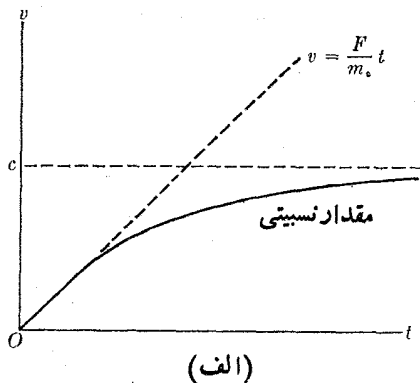
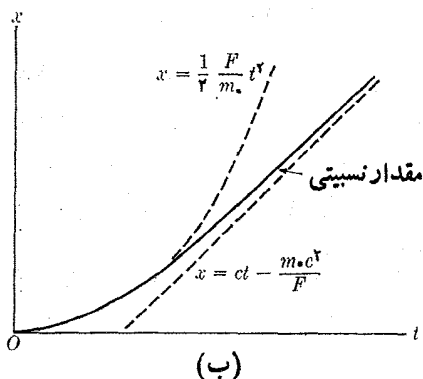
برای زمانهای خیلی کوتاه t (یعنی هنگامی که اندازه‌گیری در آغاز حرکت صورت می‌گیرد) جمله دوم در مخرج کسر قابل اغماض است و $v \approx (F/m_0)t$ می‌شود، که رابطه‌ای است غیرنسبیتی، زیرا در این حالت $a = F/m_0$ است. برای t های بزرگ (یعنی هنگامی که

اندازه‌گیری زمانی انجام می‌شود که پیش از آن ذره مدت شتاب می‌گرفته است) در مخرج، در مقابل جمله دوم می‌توان از یک صرف نظر کرد، و $c \approx v$ می‌شود. بدین طریق به جای اینکه سرعت تا بینهایت افزایش پیدا کند، به سمت یک مقدار معین، یعنی c که همان سرعت نور است میل می‌کند. این تغییر سرعت با زمان در شکل ۳۰۱۱ (الف) با خط پرنشان داده شده است. ولی اندازه حرکت با $p = Ft$ نشان داده می‌شود و تا بینهایت افزایش پیدا می‌کند. برای یافتن جابجایی ذره، یادآور می‌شویم که $v = dx/dt$ است. بنابراین داریم

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{(F/m_0 c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0 c)^2 t^2}}$$

با انتگرال گیری از این رابطه (و با قراردادن $x = 0$ به ازای $t = 0$) داریم

$$x = \frac{m_0 c^2}{F} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{F}{m_0 c} \right)^2 t^2} - 1 \right]$$



شکل ۳۰۱۱. حرکت مستقیم الخط نسبیتی بر اثر یک نیروی ثابت

با استفاده از بسط دو جمله‌ای (پ.۲۸) و به ازای $n = 1/2$ ، برای مقادیر کوچک t ، رابطه فوق به صورت $x = (F/m_0)t^2/2$ درمی‌آید که این مقدار غیرنسبیتی برای جابجایی است. برای t های بزرگ، داریم $x \approx ct - (m_0 c^2)/F$ که مربوط به یک حرکت یکنواخت با سرعت c است. بدین طریق مسافت پیموده شده کوچکتر از مسافتی می‌شود که اگر رابطه‌های غیرنسبیتی برای تمام سرعتها صادق می‌بودند پیموده می‌شد. این نکته را در شکل ۳۰۱۱ (ب) با خط پرنشان داده‌ایم. این مسئله در برخی از حوزه‌ها، به عنوان مثال حرکت یک ذره باردار در یک شتابدهنده خطی، مسئله جالبی است.

۶۰۱۱ انرژی

برای محاسبه انرژی جنبشی یک ذره با توجه به تعریف جدید اندازه حرکت، از همان

شیوه‌ای که در بخش ۵.۸ هنگام مطالعه مکانیک نیوتونی به کار رفت استفاده می‌کنیم. بنا بر این با یادآوری اینکه $v = ds/dt$ است، به دست می‌آید

$$E_k = \int_0^v F_T ds = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv) ds = \int_0^v v d(mv).$$

با محاسبه این انتگرال با استفاده از روش جزء بجزء [به معادله (پ.۴۱) مراجعه کنید] و با به کار بردن رابطه نسبیتی (۷.۱۱) برای جرم، داریم

$$\begin{aligned} E_k &= mv^2 - \int_0^v mvdv = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0 c^2. \end{aligned}$$

و بالاخره از ترکیب دو جمله اول سمت راست، انرژی جنبشی ذره‌ای که با سرعت v نسبت به ناظری حرکت می‌کند به دست می‌آید

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2. \quad (۱۳.۱۱)$$

در اینجا برای نوشتن آخرین قسمت، از معادله (۷.۱۱) استفاده شده است. نتیجه (۱۳.۱۱) بسیار روشن است و نشان می‌دهد که افزایش انرژی جنبشی را می‌توان به عنوان افزایش جرم در نظر گرفت، که خود افزایش جرم بنا به معادله (۷.۱۱) نتیجه وابستگی جرم به سرعت است. می‌توان این تفسیر را تعمیم داد و به هر تغییر ΔE در انرژی دستگاه یک تغییر جرم Δm نسبت داد. این دو تغییر با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\Delta E = (\Delta m) c^2 \quad (۱۴.۱۱)$$

این رابطه تعمیم معادله (۱۳.۱۱) است. به عنوان مثال، بقای انرژی یک دستگاه منزوی لازم می‌دارد که $(E_k + E_p)_\gamma = (E_k + E_p)_\lambda = \text{const}$ ، یا

$$E_{k,\gamma} - E_{k,\lambda} = E_{p,\lambda} - E_{p,\gamma}$$

باشد. اما بنا به معادله (۱۳.۱۱)، $E_{k,\gamma} - E_{k,\lambda} = (m_\gamma - m_\lambda) c^2$ است، در نتیجه

$$(m_\gamma - m_\lambda) c^2 = E_{p,\lambda} - E_{p,\gamma} \quad (۱۵.۱۱)$$

معادله (۱۵.۱۱) بدین معنی است که هرگونه تغییر در انرژی پتانسیل داخلی دستگاه را که از یک تغییر آرایش داخلی ناشی می‌شود، می‌توان با یک تغییر جرم دستگاه بیان کرد که این خود نتیجه تغییر انرژی جنبشی داخلی دستگاه است. این کار به شرطی درست است که انرژی کل پایسته بماند. به سبب وجود سازه c^2 ، تغییر جرم بجز برای تغییرهای خیلی زیاد انرژی، قابل ملاحظه نیست. بدین دلیل، تغییر جرم ناشی از تبدیل انرژیها، جز در برهم‌کنشهای هسته‌ای یا فیزیک انرژیهای بالا قابل توجه نیست و در واکنشهای شیمیایی عملاً قابل اغماض است.

کمیت $m_0 c^2$ را که در معادله (۱۳.۱۱) ظاهر می شود انرژی سکون ذره می نامند، و کمیت

$$E = E_k + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 \quad (16.11)$$

انرژی کل ذره نامیده می شود. انرژی کل ذره، به گونه ای که در اینجا تعریف شد، شامل انرژی جنبشی و انرژی سکون است و انرژی پتانسیل را در بر نمی گیرد.

از ترکیب معادله های (۸.۱۱) و (۱۶.۱۱) به دست می آید $p/E = v/c^2$. این رابطه سرعت را بر حسب اندازه حرکت و انرژی به دست می دهد. چون $\mathbf{p}$ و $\mathbf{v}$ هم راستا هستند، این رابطه به صورت برداری نیز صادق است و می توان نوشت

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E}. \quad (17.11)$$

معادله (۱۶.۱۱) معادل است با

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \quad (18.11)$$

زیرا اگر در این رابطه به جای p مقدار آن را از رابطه (۱۸.۱۱) قرار دهیم معادله (۱۶.۱۱) به دست می آید.

در نخستین نگاه، معادله (۱۳.۱۱) که رابطه انرژی جنبشی نسبی را به دست می دهد با معادله (۱۲.۸)، رابطه انرژی جنبشی در مکانیک نیوتونی (یعنی $E_k = mv^2/2$)، کاملاً متفاوت به نظر می رسد، ولی چنین نیست. هنگامی که v نسبت به c کوچک باشد، می توان مخرج معادله (۱۳.۱۱) را با استفاده از قضیه دو جمله ای (پ.۲۲) بسط داد:

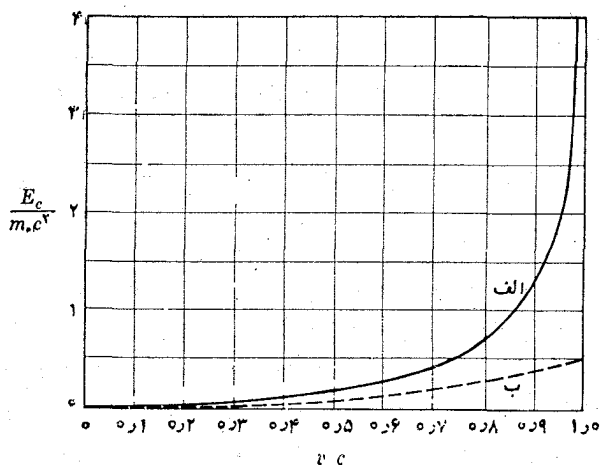
$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right)$$

که با قراردادن آن در معادله (۱۳.۱۱) به دست می آید

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (19.11)$$

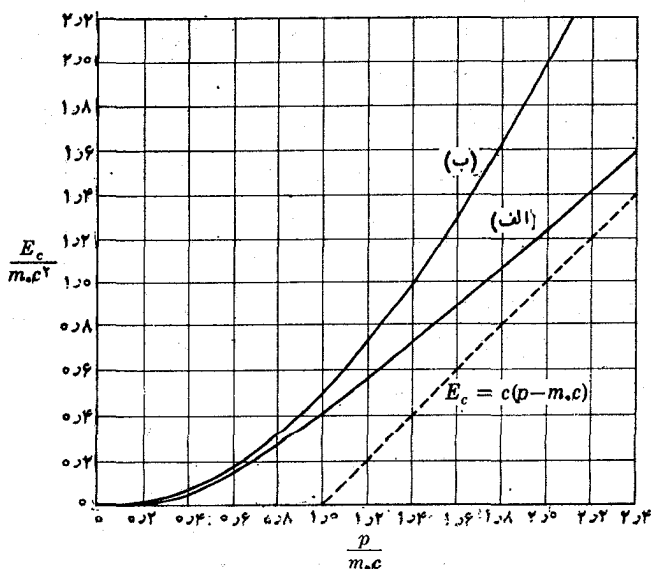
جمله اول همان انرژی جنبشی معادله (۱۲.۸) است که با آن آشنا هستیم. جمله دوم و جمله های بعد، اگر $c \gg v$ باشد قابل چشم پوشی هستند. بدین طریق یک بار دیگر تأیید می شود که مکانیک نیوتونی تقریبی از مکانیک نسبیتی است که برای سرعتها یا انرژیهای کم صادق است و برای جرم، مقدار جرم سکون را به کار می برد. از طرف دیگر، در سرعتهای خیلی بالا، می توان در صورت کسر معادله (۸.۱۱) به جای v ، برابر آن c را قرار داد و اندازه حرکت را به شکل $p = mc$ نوشت. در این صورت انرژی جنبشی داده شده با معادله (۱۳.۱۱) به صورت زیر درمی آید:

$$E_k = pc - m_0 c^2 = c(p - m_0 c). \quad (20.11)$$



شکل ۴.۱۱. تغییر انرژی جنبشی با سرعت؛ (الف) نسبیتی، (ب) نیوتونی

در شکل ۴.۱۱، تغییرات انرژی جنبشی E_k که با معادله (۱۳.۱۱) داده شده است با منحنی الف، و انرژی جنبشی نیوتونی $E_k = m_0 v^2 / 2$ با منحنی ب نشان داده شده است. این شکل بوضوح نشان می‌دهد که در سرعت‌های برابر، انرژی جنبشی نسبیتی بزرگتر از انرژی جنبشی نیوتونی است.



شکل ۵.۱۱. تغییر انرژی جنبشی با اندازه حرکت؛ (الف) نسبیتی، (ب) نیوتونی

در شکل ۵۰.۱۱ انرژی جنبشی برحسب اندازه حرکت رسم شده است. مشاهده می شود که برای اندازه حرکتی برابر، انرژی نسبی (منحنی الف) کوچکتر از انرژی نیوتونی (منحنی ب) است. منحنی نسبیتی مجانب وار به سمت مقدار داده شده در معادله (۲۰.۱۱) میل می کند.

باید توجه داشت که نسبتهای m/m_0 و $E_0/m_0 c^2$ برای تمام ذراتی که دارای سرعت یکسان باشند یکی است. به این ترتیب، چون جرم پروتون در حدود ۱۸۵۰ برابر جرم الکترون است، اثرهای نسبیتی روی پروتونها تنها در انرژیهای ۱۸۵۰ بار بزرگتر قابل ملاحظه خواهند بود. بدین دلیل، حرکت پروتونها و نوترونها را در هسته های اتمی اغلب می توان بدون ملاحظات نسبیتی مورد مطالعه قرار داد، در صورتی که حرکت الکترونها را در بیشتر موارد باید در چارچوب نسبیت مطالعه کرد.

از موارد بسیار جالب، مورد ذره ای است که جرم سکون آن برابر صفر باشد ($m_0 = 0$). در این صورت معادله (۱۸.۱۱) به صورت زیر درمی آید:

$$E = cp \quad \text{یا} \quad p = E/c \quad (21.11)$$

از این رابطه، با توجه به معادله (۱۷.۱۱) نتیجه می شود که سرعت ذره برابر c است. بنابراین ذره ای که جرم سکون آن برابر صفر باشد، فقط می تواند با سرعت نور حرکت کند و در یک چارچوب لخت هرگز در حال سکون نیست. فوتون دارای چنین وضعی است و چنانکه در فصلهای بعد خواهیم دید، به نظر می رسد این وضع در مورد نورینو نیز صادق باشد. حتی برای ذره ای که m_0 جرم سکون آن برابر صفر نباشد، در صورت داشتن سرعتی قابل مقایسه با سرعت نور، به گونه ای که p اندازه حرکت ذره در مقابل $m_0 c$ خیلی بزرگ باشد، باز هم معادله (۲۱.۱۱) اعتبار دارد. در واقع اگر در معادله (۱۸.۱۱) از $m_0 c$ در مقابل p صرف نظر کنیم، معادله (۲۱.۱۱) به دست می آید.

مثال ۴۰.۱۱. افزایش نسبی سرعت و اندازه حرکت را با افزایش نسبی انرژی مقایسه کنید.

حل: از حل معادله (۱۸.۱۱) برحسب v ، به دست می آید

$$v = c \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2} \right)^{1/2}.$$

هنگامی که سرعت یک ذره به اندازه dv و انرژی آن به اندازه dE افزایش پیدا می کند، افزایش نسبی سرعت با dv/v و افزایش نسبی انرژی با dE/E بیان می شود. این امر لازم می دارد که مانند مثال ۲۰.۱۱، قبل از دیفرانسیل گیری، از رابطه فوق لگاریتم بگیریم، یعنی

$$\ln v = \ln c + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2} \right).$$

با دیفرانسیل گیری، به دست می آید

$$\frac{dv}{v} = \frac{m_0^2 c^4}{E^2 - m_0^2 c^4} \frac{dE}{E}.$$

اگر انرژی ذره نسبت به جرم سکون آن خیلی بزرگ باشد، به گونه‌ای که $E \gg m_0 c^2$ باشد، می‌توان درمخرج از $m_0 c^4$ صرف نظر کرد، در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{dv}{v} = \frac{m_0 c^4}{E^2} \frac{dE}{E}$$

ضریب افزایش نسبی انرژی همیشه کوچکتر از واحد است، زیرا در انرژیهای بالا، E خیلی بزرگتر از $m_0 c^2$ است. بنابراین در انرژیهای بالا، dv/v خیلی کوچکتر از dE/E می‌شود. به گفته دیگر، در انرژیهای بالا، امکان دارد انرژی ذره را افزایش داد بدون اینکه سرعت آن افزایش قابل ملاحظه‌ای داشته باشد. این ویژگی در ساختمان شتابدهنده‌های انرژیهای بالا، خواه خطی خواه دایره‌ای، بسیار مهم است.

به دانشجو توصیه می‌شود همین محاسبه را با استفاده از مکانیک نیوتونی انجام دهد و نتایج را با هم مقایسه کند.

از طرف دیگر، تا آنجا که به اندازه حرکت p مربوط می‌شود، با به کار بردن معادله (۱۸.۱۱) داریم

$$\ln E = \ln c + \ln(m_0 c^2 + p^2)^{1/2}$$

و با دیفرانسیل گیری به دست می‌آید

$$\frac{dE}{E} = \frac{p^2}{m_0 c^2 + p^2} \frac{dp}{p}$$

در انرژیهای بالا، هنگامی که p خیلی بزرگتر از $m_0 c$ است، به دست می‌آید

$$dE/E \approx dp/p$$

و اندازه حرکت به نسبت مساوی با انرژی افزایش پیدا می‌کند.

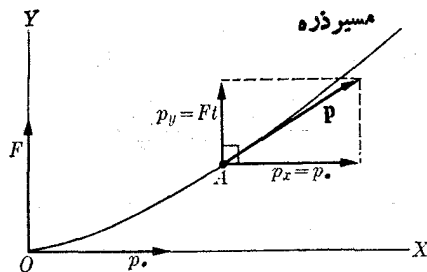
مثال ۵.۱۱. بررسی حرکت منحنی الخط بر اثر یک نیروی ثابت در دینامیک نسبیتی.

حل: در مکانیک غیر نسبیتی، این حرکت متناظر با یک مسیر سهمی است، مانند حرکت یک پرتابه (به بخش ۷.۵ مراجعه کنید). برای حل این مسئله در مکانیک نسبیتی، آسانتر است که از رابطه‌های انرژی و اندازه حرکت استفاده شود. فرض کنیم در لحظه $t = 0$ ذره در نقطه O باشد (شکل ۶.۱)، و وقتی نیروی F به طور عمودی (در راستای محور Y ها) بر ذره وارد شود، ذره با اندازه حرکت p_0 در راستای محور X ها حرکت می‌کند. مؤلفه‌های معادله حرکت $F = dp/dt$ روی محوری OX و OY عبارت می‌شوند از

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dp_y}{dt} = F.$$

با انتگرال گیری از هریک از رابطه‌های فوق به دست می‌آید

$$p_x = p_0 (\text{const}) \quad \text{و} \quad p_y = Ft.$$



شکل ۶.۱۱. حرکت منحنی الخط نسبیتی بر اثر یک نیروی ثابت

بنابراین اندازه حرکت کل در لحظه t ، هنگامی که ذره به نقطه A می‌رسد، برابر است با

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{p_0^2 + F^2 t^2}$$

و انرژی، با استفاده از معادله (۱۸.۱۱)، برابر است با

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_0^2 + F^2 t^2} = \sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2}.$$

در اینجا $E_0 = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_0^2}$ انرژی کل در لحظه $t = 0$ است. بنابراین مؤلفه‌های سرعت، با استفاده از معادله برداری $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / E$ عبارت می‌شوند از

$$v_x = \frac{c^2 p_x}{E} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2}}, \quad v_y = \frac{c^2 p_y}{E} = \frac{c^2 Ft}{\sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2}}.$$

در نتیجه باسانی بزرگی سرعت به دست می‌آید. با انتگرال‌گیری از این روابط، مختصات x و y ذره را می‌توان به صورت توابعی از زمان به دست آورد و از آنجا معادله مسیر را نتیجه گرفت. انجام این مرحله آخر را به عهده دانشجو می‌گذاریم و از او می‌خواهیم که این مسیر را با مسیر سهمی غیرنسبیتی مقایسه کند (به مسئله ۱۱.۱۱ مراجعه کنید).

۷.۱۱ تبدیل انرژی و اندازه حرکت

بنا به اصل نسبیت، معادله (۱۸.۱۱) که انرژی را به اندازه حرکت مربوط می‌کند باید برای تمام ناظرهای لخت یکی باشد. بنابراین خیلی مهم است مقداری را که دوناظر متحرک نسبت به هم برای این کمیتها به دست می‌آورند مقایسه کنیم. برای ناظر O ، معادله (۱۸.۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \quad (22.11)$$

یادآور می‌شویم که $\mathbf{p}$ یک کمیت برداری است و مؤلفه‌های آن عبارتند از p_x و p_y و p_z . در نتیجه $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ، و معادله (۲۲.۱۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \quad (23.11)$$

برای اینکه این رابطه با فرض اصل نسبیت سازگار باشد، باید برای همه ناظرهای لخت ناوردا باقی بماند، یعنی در یک چارچوب مرجع دیگر (ناظر O') که نسبت به چارچوب اول که معادله (۲۳.۱۱) را برای آن نوشتیم با سرعت v حرکت می‌کند، باید داشته باشیم

$$p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2 - \frac{E'^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \quad (24.11)$$

در هر دو رابطه m_0 یکی است، زیرا مربوط به جرم سکون است و تغییر نمی‌کند. به گفته دیگر باید داشته باشیم

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2 - \frac{E'^2}{c^2}. \quad (25.11)$$

اگر همخوانیهای

$$p_x \rightarrow x, \quad p_y \rightarrow y, \quad p_z \rightarrow z \quad \text{و} \quad ct \rightarrow E/c$$

را در نظر بگیریم، ساختار معادله‌های (۲۳.۱۱)، (۲۴.۱۱) و (۲۵.۱۱) مشابه معادله‌های (۳۰.۶) و (۳۱.۶) می‌شود.

بنابراین معادله (۲۳.۱۱) مستلزم یک تبدیل برای عناصر خود می‌باشد نظیر تبدیل لورنتس که برای x, y, z و t به کار می‌رود. از اینجا نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} p_x' &= \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \end{aligned} \quad (26.11)$$

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

این نتیجه، همراه با رابطه مربوط به انرژی، نشان می‌دهد که چگونه تعریف ما از اندازه حرکت در معادله (۱۸.۱۱) با شرط اول اصل خاص نسبیت تطبیق می‌کند؛ یعنی اندازه حرکت دارای تبدیل خاصی تحت اثر تبدیل لورنتس می‌باشد.

توجه داشته باشید که دو گروه کمیت وابسته به دست آوردیم، (x, y, z, t) و $(p_x, p_y, p_z, E/c)$ ، که بین خود مطابق قواعد تبدیل لورنتس تبدیل پیدا می‌کنند. بدون تردید انتظار داریم سایر کمیت‌های فیزیکی نیز تبدیل مشابهی داشته باشند. یکی از مشخصه‌های مشترک همه این کمیتها آن است که هر کدام دارای چهار «مؤلفه» هستند، یعنی با چهار عدد بیان می‌شوند. به همین دلیل، آنها را چهار-بردار می‌نامند. تصور می‌رود آنها را بتوان

در یک فضای نمایشی چهار بعدی نشان داد. یک روش جهت تطبیق قوانین فیزیک با شرایط ناوردایی اصل نسبیت عبارت است از نوشتن آنها به صورت روابط بین کمیتهای اسکالر، چهار-بردارها و سایر کمیتهایی که به آنها مربوط می‌شوند (تانسورها). ما بیش از این وارد عمق این مطلب نمی‌شویم، زیرا این امر ما را به بحث دامنه‌دارتری در نظریه نسبیت می‌کشاند که از حدود موضوع این کتاب فراتر می‌رود.

مثال ۶.۱۱. رابطه‌های عکس بین انرژی و اندازه حرکت مربوط به معادله‌های (۲۶.۱۱) را پیدا کنید. به عبارت دیگر مقادیر اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر O را بر حسب مقادیر اندازه‌گیری شده به وسیله O' پیدا کنید.

حل: برای حل این مسئله کافی است دانشجو به مثال ۴.۶، که درست عین همین مسئله، ولی برای مختصات x, y, z و t می‌باشد مراجعه کند. بدین طریق، می‌توان صرفاً با تعویض علامت v و جابجا کردن کمیتهای پریم‌دار و بدون پریم در معادله (۲۶.۱۱) به نتیجه مورد نظر رسید. بنابراین به دست می‌آید

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p'_{x'} + vE'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p_y &= p'_{y'} \\ p_z &= p'_{z'} \\ E &= \frac{E' + vp'_{x'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (27.11)$$

مثال ۷.۱۱. نتایج حاصل از مثال پیش را در مورد ذره‌ای که نسبت به O' در حال سکون است به کار ببرید.

حل: در این حالت $E' = m_0c^2$ و $p'_{x'} = p'_{y'} = p'_{z'} = 0$ است. بنابراین از معادله‌های تبدیل به دست می‌آید

$$p_x = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = p_z = 0, \quad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

سه معادله اول اندازه حرکت و معادله آخر انرژی را به گونه‌ای که O اندازه‌گیری می‌کند به دست می‌دهند. مقایسه معادله‌های اندازه حرکت با معادله (۸.۱۱) و معادله انرژی با معادله (۱۶.۱۱) نشان می‌دهد که این معادله‌ها مربوط به اندازه حرکت و انرژی ذره‌ای هستند که در راستای محور X با سرعت v حرکت می‌کند. وضع ذره نیز درست همین است، زیرا ذره که نسبت به O' ساکن است باید به نظر برسد که نسبت به O با سرعت v حرکت می‌کند. این مثال با وضوح کامل نشان می‌دهد که روابط (۲۶.۱۱) و روابط عکس آنها (۲۷.۱۱)، که از طریق کم و بیش شهودی با به کار گرفتن اصل ناوردایی نسبیتی به دست آمدند، با رابطه‌های انرژی و اندازه حرکت، که با استفاده از نقطه نظر

متفاوتی به دست آوردیم، هماهنگی دارند. این مثال همچنین سازگاری منطق ما را نشان می‌دهد.

مثال ۸.۱۱. در تبدیل انرژی و اندازه حرکت ذره‌ای که جرم سکون آن برابر صفر است بحث کنید. برای آسانی، حرکت ذره را در راستای حرکت نسبی دوناظر فرض کنید.

حل: چون $m_0 = 0$ است، می‌توان پذیرفت که بنا به معادله (۲۱.۱۱)، رابطه $E = cp$ برای ناظر O معتبر است. پس با به کاربردن معادله‌های (۲۶.۱۱) و با قراردادن $p_x = p$ و $p'_x = p'$ (زیرا حرکت در راستای محور X ها صورت می‌گیرد) و با استفاده از $E = cp$ ، برای ناظر O' داریم

$$p' = \frac{p - v(cp)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = p \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

با استفاده از این نتیجه، برای انرژی به دست می‌آوریم

$$E' = \frac{cp - vp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = cp \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = cp'.$$

بنابراین، رابطه $E' = cp'$ برای O' نیز صادق است. این مثال مانند مثال پیش، باید اعتقاد دانشجو را به انسجام درونی نظریه بیان شده افزایش دهد. به دانشجو توصیه می‌کنیم این مثال را درحالی که ذره در راستای دلخواه دیگری حرکت می‌کند حل کند.

۸.۱۱ تبدیل نیرو

نیروی وارد بر یک ذره به گونه‌ای که ناظرهای O و O' اندازه‌گیری می‌کنند، چنانکه اصل نسبیت ایجاب می‌کند، بترتیب عبارتند از

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} \quad (28.11)$$

زیرا دوناظر باید معادله‌های یکسانی را به کار ببرند. رابطه بین $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ معمولاً پیچیده است، زیرا در اینجا نمی‌توان از استدلال آسانی که در مورد انرژی و اندازه حرکت به کار بردیم استفاده کرد. بنابراین رابطه را برای یک حالت خاص یعنی موقعی که ذره به طور لحظه‌ای در دستگاه O' ساکن است پیدا می‌کنیم. در این صورت $\mathbf{F}'$ را نیروی خاص^۱ می‌نامند.

با استفاده از معادله (۲۶.۱۱) داریم

$$F'_{x'} = \frac{dp'_{x'}}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left(\frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

$$= \frac{dt}{dt'} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt} \right). \quad (29.11)$$

از طرف دیگر، از عکس تبدیل لورنتس (به آخرین معادله مثال ۴.۶ مراجعه کنید) داریم

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

چون $dx/dt = 0$ است، زیرا ذره نسبت به O' در حال سکون می‌باشد، به دست می‌آید

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (30.11)$$

به علاوه، بنا به تعریف نیرو، $dp_x/dt = F_x$ است. از تعریفهای انرژی E و انرژی جنبشی $E_k = E - m_0 c^2$ و همچنین با توجه به اینکه کار $F_x dx$ باید برابر dE_k باشد، داریم

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{F_x dx}{dt} = F_x v \quad (31.11)$$

زیرا در این حالت $dx/dt = v$ است. بالاخره با قراردادن تمام این مقادیر در معادله (29.11)، به دست می‌آید

$$F'_{x'} = F_x. \quad (32.11)$$

برای مؤلفه موازی با محور Y ها، چون $F_y = dp_y/dt$ است به دست می‌آوریم

$$F'_{y'} = \frac{dp'_{y'}}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dp_y}{dt} = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k F_y. \quad (33.11)$$

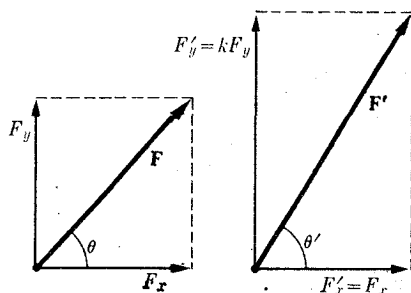
به همین ترتیب، برای مؤلفه Z ، با $F_z = dp_z/dt$ ، داریم

$$F'_{z'} = \frac{dp'_{z'}}{dt'} = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k F_z \quad (34.11)$$

که در آنها k در معادله (32.6) تعریف شده است. معادله‌های (32.11)، (33.11) و (34.11) نیروی F را که ناظری در یک چارچوب مرجع لخت دلخواه اندازه می‌گیرد به F' ، نیروی اندازه‌گیری شده در یک چارچوب مرجع لخت دیگر که ذره در آن به طور لحظه‌ای در حال سکون است، مربوط می‌کنند.

نظر به اینکه قانون تبدیل نیرو با قانون تبدیل برای چهار-بردارهای اندازه حرکت و انرژی یکی نیست، نیرو در گروه کمیتهای متفاوت با این دوکمیته قرار می‌گیرد، زیرا جزو کمیتهای چهار-برداری نیست. بنا بر این در نظریه نسبیت، مفهوم نیرو کم استفاده‌تر از اندازه-حرکت و انرژی است، در نتیجه برای نیرو تعریف کم و بیش متفاوتی پیشنهاد شده است. در اینجا از این تعریف بحثی به میان نخواهیم آورد، جز اینکه بگوییم برای نیرو نیز تبدیلی همانند تبدیل چهار-بردارها منظوری شود. با وجود این، حتی اگر تبدیل نیرو با تبدیلی

اندازه حرکت و انرژی فرق داشته باشد، تضمین می‌کند که معادله حرکت $F = dp/dt$ برای تمام ناظرهای لخت ناوردا خواهد ماند، که این، شرط اصلی ما را تشکیل می‌داد. رابطه بین نیروهای F و F' در شکل ۷.۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۷.۱۱. تبدیل لورنتس مؤلفه‌های نیرو

۹.۱۱ دستگاه ذرات

دستگاه ذراتی را در نظر می‌گیریم که هر ذره آن دارای اندازه حرکت p_i و انرژی E_i می‌باشد. با صرف نظر کردن از برهم‌کنش بین ذرات، می‌توان اندازه حرکت کل دستگاه را به صورت $p = \sum_i p_i$ و انرژی کل را به صورت

$$E = \sum_i E_i = \sum_i m_i c^2 = M c^2.$$

نوشت. بدین طریق، با استفاده از معادله (۱۷.۱۱)، می‌توان سرعتی را به دستگاه وابسته کرد که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$v_c = \frac{c^2 p}{E} = \frac{p}{M}. \quad (35.11)$$

با یادآوری بخش ۲.۹ می‌توان گفت v_c سرعت مرکز جرم دستگاه است و دستگاه را جسمی به جرم M که با سرعت v_c حرکت می‌کند در نظر گرفت. با وجود این باید یادآور شد که (بنا به دلایل مذکور در بخش ۲.۹) هرگاه جرم به سرعت بستگی داشته باشد، نمی‌توان برای دستگاه، مرکز جرم تعریف کرد. بنا بر این سرعت تعریف شده با رابطه (۳۵.۱۱) را سرعت دستگاه می‌نامیم.

فرض کنیم دوناظر لخت مختلف هر کدام دستگاه ذرات را مورد آزمایش قرار می‌دهند. نسبت به ناظر O ، اندازه حرکت و انرژی عبارتند از $p = \sum_i p_i$ و $E = \sum_i E_i$. نسبت به ناظر O' این کمیتها عبارتند از $p' = \sum_i p'_i$ و $E' = \sum_i E'_i$. اگر سرعت O' نسبت به O برابر v باشد، در راستای محور X ها، هر p_i و E_i مطابق معادله‌های (۲۶.۱۱) به p'_i و E'_i تبدیل می‌شود. مجموع آنها نیز به همان گونه تبدیل می‌شوند و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 p'_{x'} &= \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
 p'_{y'} &= p_y \\
 p'_{z'} &= p_z \\
 E' &= \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
 \end{aligned} \quad (۳۶.۱۱)$$

اکنون اگر اندازه حرکت و انرژی نسبت به ناظر O پایسته باشند، یعنی اگر E و p ثابت باشند، معادله‌های تبدیل فوق ایجاب می‌کنند که E' و p' نیز ثابت باشند، یعنی هر دو قانون بقا برای ناظر O' نیز برقرارند. در نتیجه، دومین شرط لازم نظریه‌ما، آنچنانکه در پایان بخش ۴.۱۱ گفته شد، تأیید می‌شود. همچنین باید توجه داشت به سبب ساختار معادله‌های تبدیل، دو قانون باید همزمان برقرار باشند؛ به گفته‌ی دیگر، هیچیک از آنها نمی‌تواند مستقل از دیگری باشد. این وضع با حالت غیر نسبیتی متفاوت است.

اکنون حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن سرعت نسبی دو ناظر با اندازه حرکت کل p موازی است. در این صورت داریم $p_x = p$ ، $p_y = p_z = 0$ ، و اولین معادله از معادله‌های (۳۶.۱۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$p' = \frac{p - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

در قیاس با چهارچوب‌های مرجع L و C که در فصل ۹ تعریف کردیم، در مکانیک نسبیتی، چهارچوب C را چهارچوب مرجعی تعریف می‌کنیم که در آن اندازه حرکت کل دستگاه برابر صفر باشد.

در نتیجه، اگر ناظر O' به چهارچوب مرجع C متصل باشد، اندازه حرکت p' برابر صفر است. اگر در رابطه قبل قرار دهیم $p' = 0$ ، سرعت O' نسبت به O (که چهارچوب مرجع L را به کار می‌برد) برابر می‌شود با $v = c^2 p / E$. مقایسه این رابطه با معادله (۳۵.۱۱) نشان می‌دهد که چهارچوب C با سرعت دستگاه یعنی v_c نسبت به چهارچوب L حرکت می‌کند. این همان نتیجه‌ای است که در فصل ۹ در وضع غیر نسبیتی به دست آوردیم.

در ابتدای این قسمت متذکر شدیم که برهم‌کنشهای بین ذرات را به حساب نخواهیم آورد، زیرا در نظر گرفتن برهم‌کنشهای بین ذرات که به مکان نسبی ذرات بستگی دارد دشواری‌هایی جدی در نظریه نسبیت به وجود می‌آورد. به عنوان مثال، در فصل ۶ دیدیم که مفهوم همزمانی دو ذره در مکان، که برای تعریف یک برهم‌کنش ضروری است، یک مفهوم ناوردا نیست. علاوه، سرعت انتقال برهم‌کنش را نیز باید به حساب آورد. بدین دلیل برای مطالعه برهم‌کنشها به گونه‌ای که با نظریه نسبیت سازگار باشد، تکنیکهای ویژه‌ای لازم‌اند.

مثال ۹.۱۱. چهارچوب C را برای دودزه یکسان که در یک سو حرکت می‌کنند مطالعه کنید.

حل: ویژگیهای چارچوب C را می توان با آسانی در مورد دو ذره مورد بحث قرار داد. دستگاهی از دو ذره مشابه را که به نظر ناظر O در طول محور X های چارچوب L (که ناظر O به کار می برد) با سرعت های v_1 و v_2 حرکت می کنند، در نظر می گیریم. جرم آنها با محاسبه از معادله (۷.۱۱) و با توجه اینکه m_0 جرم سکون هر دو یکی است، بترتیب برابر است با m_1 و m_2 . اندازه حرکت کل در چارچوب L عبارت است از

$$p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (۳۷.۱۱)$$

نسبت به چارچوب C اندازه حرکت کل دستگاه برابر صفر است؛ یعنی

$$p' = p'_1 + p'_2 = 0$$

این امر لازم می دارد که بزرگی اندازه حرکت دو ذره در چارچوب C یکی باشد، ولی دو ذره در دو سوی مختلف حرکت کنند. بنابراین معادله (۸.۱۱) ایجاب می کند که بزرگی سرعت های ذرات در چارچوب C یکسان باشد. در نتیجه به نظر می رسد ذرات با سرعت های v' و $-v'$ حرکت می کنند. اگر سرعت چارچوب C نسبت به چارچوب L را با v_C نشان دهیم و از معادله (۳۸.۶) برای تبدیل سرعت ها استفاده کنیم و در آن v_C را به جای v قرار دهیم، خواهیم داشت

$$v_1 = \frac{v' + v_C}{1 + v'v_C/c^2}, \quad v_2 = \frac{-v' + v_C}{1 - v'v_C/c^2}$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$v_1 = v_C + \frac{v'(1 - v_C^2/c^2)}{1 + v'v_C/c^2}, \quad v_2 = v_C - \frac{v'(1 - v_C^2/c^2)}{1 - v'v_C/c^2}.$$

بنابراین، می توان با قراردادن این مقادیر در معادله های (۳۷.۱۱) اندازه حرکت کل دستگاه را در چارچوب L به دست آورد:

$$p = (m_1 + m_2)v_C + v' \left(1 - \frac{v_C^2}{c^2} \right) \left(\frac{m_1}{1 + v'v_C/c^2} - \frac{m_2}{1 - v'v_C/c^2} \right). \quad (۳۸.۱۱)$$

اگر مقادیر به دست آمده از معادله (۷.۱۱) برای m_1 و m_2 را، در جمله آخر قرار دهیم به دست می آید

$$m_0 v' \left(1 - \frac{v_C^2}{c^2} \right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_C^2/c^2} (1 + v'v_C/c^2)} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_C^2/c^2} (1 - v'v_C/c^2)} \right).$$

با استفاده از همسانیهای مسئله ۳۷.۶، می توان جمله های داخل پرانتز را ساده کرد. مشاهده می شود که هر دو جمله برابرند با $1/\sqrt{(1 - v_C^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}$ و در نتیجه اختلاف آنها برابر صفر است. بدین طریق آخرین جمله معادله (۳۸.۱۱) حذف می شود و رابطه p

به صورت زیر درمی آید:

$$p = (m_1 + m_2)v_c \quad \text{یا} \quad v_c = p/M.$$

این رابطه دقیقاً همان معادله (۳۵.۱۱) است که با حالت ویژه دو ذره ای که در یک سو حرکت می کنند تطبیق می کند. بنا براین ثابت می شود چارچوب C (که نسبت به آن اندازه حرکت کل دستگاه برابر صفر است)، چه در نظریه نسبیت و چه در نظریه کلاسیک، مطابق معادله (۳۵.۱۱)، با سرعت v_c نسبت به چارچوب L حرکت می کند.

۱۰.۱۱ برخورد در انرژیهای بالا

اصل بقای اندازه حرکت و انرژی باید در مورد هر برخوردی، صرف نظر از اینکه انرژی ذرات چقدر است، برقرار باشد. در بخش ۷.۹ این موضوع را در مورد انرژیهای کم (یا غیر نسبیتی) مطالعه کردیم. ولی در مورد انرژیهای بالا باید مفاهیم و روشهایی را که در این فصل توضیح داده شدند به کاربرد. به عنوان مثال، دو ذره به جرمهای سکون m_1 و m_2 را که قبل از برخورد با اندازه حرکتهای p_1 و p_2 نسبت به یک چارچوب مرجع لخت حرکت می کنند در نظر بگیریم. برهم کنش آنها جز در مدت زمان کوتاهی که دوزره خیلی به هم نزدیک هستند (مربوط به ناحیه میانی شکل ۱۱.۹) قابل ملاحظه نیست. یادآوری می کنیم (بخش ۷.۹) که اگر برهم کنش در زمان نسبتاً کوتاه و درفاصله نسبتاً کمی، تغییرات قابل اندازه گیری به وجود آورد می گوئیم برخورد رخ داده است. فرض کنیم بعد از برخورد، یعنی هنگامی که برهم کنش مجدداً قابل اغماض می باشد، ذره ها دارای جرمهای m_3 و m_4 باشند و نسبت به چارچوب مرجع لخت اولیه با اندازه حرکتهای p_3 و p_4 حرکت کنند. اصل بقای اندازه حرکت و انرژی با رابطه های زیر بیان می شوند:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad \text{و} \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad (۳۹.۱۱)$$

یا با استفاده از معادله (۱۸.۱۱)، داریم

$$c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_1^2} + c\sqrt{m_2^2 c^2 + p_2^2} = c\sqrt{m_3^2 c^2 + p_3^2} + c\sqrt{m_4^2 c^2 + p_4^2}. \quad (۴۰.۱۱)$$

برخوردی را که با معادله های (۳۹.۱۱) و (۴۰.۱۱) بیان شده می توان به صورت ساده با رابطه $۱ + ۲ \rightarrow ۳ + ۴$ نشان داد. معمولاً به سبب وجود رادیکال در معادله (۴۰.۱۱) استفاده عملی از معادله های (۳۹.۱۱) و (۴۰.۱۱) از لحاظ جبری بسیار مشکل و پیچیده است. بدین دلیل، با چند مثل ساده ولی مهم، سعی می کنیم کاربرد این فرمولها را روشن کنیم. مثال ۱۰.۱۱. یک برخورد نسبیتی را که در آن جرم سکون ذره ۱ (که ذره فرودی نامیده می شود) برابر صفر و مشابه ذره ۳ است و ذره ۲ در چارچوب آزمایشگاه ساکن و مشابه ذره ۴ است، مورد بحث قرار دهید.

حل: طرحی از این فرایند در شکل ۸.۱۱ نشان داده شده است. با استفاده از معادله‌های (۱۸.۱۱) و (۲۱.۱۱) مقادیر انرژی و اندازه حرکت را نسبت به ناظر O به دست می‌آوریم:

$$p_1 = E/c, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = E^+/c, \quad p_4$$

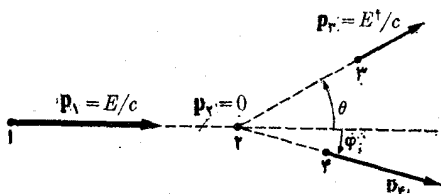
$$E_1 = E, \quad E_2 = m_0 c^2, \quad E_3 = E^+, \quad E_4 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_4^2}.$$

در اینجا اصل بقای اندازه حرکت از این قرار است:

$$p_1 = p_3 + p_4 \quad (۴۱.۱۱)$$

و از اصل بقای انرژی داریم

$$E + m_0 c^2 = E^+ + c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_4^2}. \quad (۴۲.۱۱)$$



شکل ۸.۱۱. برخورد در انرژیهای بالا

فرض کنید بخواهیم E^+ ، انرژی ذره فرودی را بعد از برخورد پیدا کنیم. در این صورت باید p_4 را از معادله‌های بالا حذف کنیم. از حل معادله (۴۱.۱۱) نسبت به p_4 به دست می‌آید $p_4 = p_1 - p_3$. طرفین این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3$$

با استفاده از مقادیر مربوط به اندازه حرکتها به دست می‌آید

$$p_4^2 = \frac{E^2}{c^2} + \frac{E^{+2}}{c^2} - \frac{2EE^+}{c^2} \cos \theta.$$

سپس p_4^2 را از معادله (۴۲.۱۱) پیدا می‌کنیم:

$$p_4^2 = \frac{1}{c^2} (E + m_0 c^2 - E^+)^2 - m_0^2 c^2$$

$$= \frac{E^2}{c^2} + \frac{E^{+2}}{c^2} + \frac{2(E - E^+)m_0 c^2}{c^2} - \frac{2EE^+}{c^2}.$$

با برابر قرار دادن دو مقدار p_4^2 به دست می‌آید

$$\frac{2(E - E^+)m_0 c^2}{c^2} - \frac{2EE^+}{c^2} = -\frac{2EE^+}{c^2} \cos \theta$$

$$E - E^+ = \frac{EE^+}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta).$$

از تقسیم طرفین رابطه فوق بر EE^+ به دست می آید

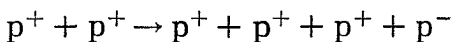
$$\frac{1}{E^+} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta). \quad (۴۳.۱۱)$$

این رابطه E^+ را بر حسب E و θ ، زاویه پراکندگی ذره ۳، به دست می دهد. توجه داشته باشید که همیشه $E^+ < E$ است. یعنی ذره فرودی انرژی از دست می دهد، زیرا ذره دیگر که ابتدا در حالت سکون بوده بعد از برخورد به حرکت درمی آید.

نتیجه (۴۳.۱۱) در بحثهای مربوط به پراکندگی نور (یا فوتونها) به وسیله الکترونها آزاد — که اثر کامپتون^۱ نامیده می شود — بسیار اهمیت دارد و در فصل ۱۹ بتفصیل مورد گفتگو قرار می گیرد. توجه داشته باشید که به ازای هیچ زاویه پراکندگی رابطه $E^+ = 0$ در معادله (۴۳.۱۱) صدق نمی کند. در نتیجه، غیرممکن است یک ذره فرودی به وسیله یک ذره آزاد دیگر کاملاً جذب شود.

مثال ۱۱.۱۱. در بیشتر آزمایشهای مربوط به انرژیهای بالا، برخورد بین یک ذره فرودی با سرعت خیلی زیاد و یک ذره ساکن نسبت به دستگاه آزمایشگاه به وجود می آید. می خواهیم انرژی آستانه^۲، یعنی حداقل انرژی جنبشی ذره را در چارچوب آزمایشگاه که برای انجام یک واکنش خاص لازم است، به دست آوریم. انرژی آستانه لازم در برخورد پروتون - پروتون جهت ایجاد زوج پروتون - پاد پروتون^۳ را پیدا کنید.

حل: فعلاً کافی است بدانیم که یک پاد پروتون ذره ای است که جرم آن برابر با جرم پروتون و بار الکتریکی آن از لحاظ قدرمطلق با بار الکتریکی پروتون برابر ولی علامت آن مخالف است. پروتون را با p^+ و پاد پروتون را با علامت p^- نشان می دهیم. بخشی از انرژی جنبشی پروتون سریع که با یک پروتون ساکن در آزمایشگاه برخورد می کند صرف به وجود آوردن یک زوج پروتون - پاد پروتون یا زوج p^+, p^- می شود. این فرایند را می توان به صورت زیر نشان داد:



دو پروتون سمت چپ و دو پروتون اول سمت راست نمایش پروتون فرودی و پروتون هدف می باشند. دو عنصر آخری مربوط به نتیجه برخورد هستند: زوج پروتون - پاد پروتون. (توجه داشته باشید، هر چند شماره ذره ها تغییر کرده است ولی بار کل ثابت می ماند. چنانکه بعداً خواهد آمد، این نیز مثالی از یک اصل بقای دیگر یعنی بقای بار الکتریکی است.) در ابتدا یکی از پروتونها در چارچوب L در حال سکون است (اندازه حرکتش برابر صفر است) و دیگری با اندازه حرکت p به طرف آن حرکت می کند.

قبل از برخورد اندازه حرکت کل نسبت به ناظر O در چارچوب L برابر p و

انرژی کل برابر $E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} + m_0 c^2$ است. بعد از برخورد بازمم اندازه حرکت کل p و انرژی کل E است. حداقل انرژی لازم برای ذره فرودی برابر انرژی است که لازم است تا فرآورده‌های نهایی نسبت به چارچوب C که با سرعت دستگاه نسبت به چارچوب L حرکت می‌کند در حال سکون باشند. (به بخش ۹.۱۱ مراجعه کنید). بنا به اصل بقای اندازه حرکت، فرآورده‌ها هرگز نمی‌توانند نسبت به چارچوب L ساکن باشند. ولی در این حالت انرژی کل نسبت به چارچوب C برابر $E' = 4m_0 c^2$ و اندازه حرکت کل $p' = 0$ است. این امر بدین معنی است که چهار ذره حاصل در چارچوب L با سرعت یکسانی حرکت می‌کنند و برای تأمین اصل بقای اندازه حرکت، باید اندازه حرکت هریک از آنها $p/4$ باشد. بنابراین انرژی کل آنها نسبت به O برابر است با

$$4c\sqrt{m_0^2 c^2 + (p/4)^2} \text{ یا } c\sqrt{16m_0^2 c^2 + p^2}$$

با برابر قرار دادن انرژیها قبل و بعد از برخورد، می‌توان نوشت

$$c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} + m_0 c^2 = c\sqrt{16m_0^2 c^2 + p^2}.$$

این یک معادله جبری از p است که پاسخ آن عبارت است از $p = 4\sqrt{3}m_0 c$. این مقدار حداقل اندازه حرکتی است که پروتون فرودی باید نسبت به O داشته باشد تا واکنش بتواند اتفاق بیافتد. (سرعت پروتون چقدر است؟) بنا بر این انرژی کل پروتون فرودی نسبت به O برابر با $4c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} = 4\sqrt{3}m_0 c^2$ و انرژی جنبشی آن $6m_0 c^2$ است. بدین طریق، برای اینکه واکنش مورد نظر در آزمایشگاه بتواند رخ دهد، به پروتون فرودی باید آنقدر شتاب داد که انرژی جنبشی آن در چارچوب L برابر $6m_0 c^2$ شود. مقدار جرم سکون پروتون برابر است با $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ، بنابراین انرژی $6m_0 c^2$ معادل $10^{-10} \times 900$ یا $10^9 \times 56$ eV می‌شود.

یکی از اساسیترین کاربردهای شتابدهنده‌های انرژیهای بالا به وجود آوردن ذرات سریع است که در چارچوب L انرژی آنها بالاتر از انرژی جنبشی آستانه باشد تا دانشمندان بتوانند در آزمایشگاه و تحت شرایط کنترل شده، بعضی از فرایندهایی را که در پرتوهای کیهانی مشاهده می‌کنند به وجود آورند.

مثال ۱۲.۱۱. انرژی آستانه مربوط به واکنش $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ را که در آن چهار ذره مختلف می‌باشند پیدا کنید.

حل: چون ذرات دارای جرمهای متفاوت می‌باشند، نمی‌توان اصل تقارن را که در مثال پیش به‌طور ضمنی از آن استفاده کردیم به کار برد. فرض کنیم که ذره ۲ در آزمایشگاه ساکن باشد، به گونه‌ای که $p_2 = 0$ است. در این صورت انرژی هر ذره در چارچوب L قبل از برخورد عبارت است از

$$E_1 = c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_1^2} \quad \text{و} \quad E_2 = m_2 c^2. \quad (44.11)$$

انرژی و اندازه حرکت کل دستگاه در آزمایشگاه عبارتند از

$$E = E_1 + m_\gamma c^2, \quad p = p_1 \quad (۴۵.۱۱)$$

کمیت‌های E و p باید مطابق معادله‌های (۴۶.۱۱) از یک چارچوب مرجع لخت به چارچوب دیگر تبدیل پیدا کنند. این امر ایجاب می‌کند که عبارت $p^2 - E^2/c^2$ ناوردای باقی بماند. بنا بر این

$$p^2 - E^2/c^2 = p'^2 - E'^2/c^2.$$

اگر آنها را نسبت به چارچوب C تبدیل کنیم، باید داشته باشیم $p' = 0$ ، زیرا اندازه حرکت کل در این چارچوب برابر صفر است. در این صورت $-E'^2/c^2 = p^2 - E^2/c^2$ ، در نتیجه بنا به معادله (۴۵.۱۱) انرژی کل E' در چارچوب C برابر است با

$$E' = \sqrt{E^2 - c^2 p^2} = \sqrt{(E_1 + m_\gamma c^2)^2 - c^2 p_1^2}.$$

با قراردادن مقدار E_1 از معادله (۴۴.۱۱) داریم

$$E' = c \sqrt{(m_1^2 + m_\gamma^2) c^2 + 2 m_\gamma E_1}. \quad (۴۶.۱۱)$$

با یادآوری اینکه بنا به معادله (۱۶.۱۱)، $E_1 = E_{k,1} + m_1 c^2$ ، که در آن $E_{k,1}$ انرژی جنبشی ذره ۱ در آزمایشگاه است، داریم

$$\begin{aligned} E' &= c \sqrt{(m_1^2 + m_\gamma^2) c^2 + 2(E_{k,1} + m_1 c^2) m_\gamma} \\ &= c \sqrt{(m_1 + m_\gamma)^2 c^2 + 2 E_{k,1} m_\gamma} \end{aligned} \quad (۴۷.۱۱)$$

حداقل انرژی لازم برای آنکه پس از واکنش ذره‌های m_γ و m_π به وجود آیند انرژی است که به ازای آن، ذره‌های حاصل در دستگاه مختصات C ساکن باشند. در دستگاه L به دلیل اصل بقای اندازه حرکت غیرممکن است دو ذره در یک زمان در حال سکون باشند. در این حالت $E'_\pi = m_\pi c^2$ و $E'_\gamma = m_\gamma c^2$ و انرژی بعد از برخورد برابر است با $E' = (m_\pi + m_\gamma) c^2$. با برابر قراردادن این رابطه با معادله (۴۷.۱۱)، که انرژی کل را در چارچوب C قبل از برخورد به دست می‌دهد، داریم

$$c \sqrt{(m_1 + m_\gamma)^2 c^2 + 2 E_{k,1} m_\gamma} = (m_\pi + m_\gamma) c^2$$

یا، با حل آن نسبت به $E_{k,1}$

$$\begin{aligned} E_{k,1} &= \frac{c^2}{2 m_\gamma} [(m_\pi + m_\gamma)^2 - (m_1 + m_\gamma)^2] \\ &= \frac{c^2}{2 m_\gamma} [(m_\pi + m_\gamma) - (m_1 + m_\gamma)][(m_\pi + m_\gamma) + (m_1 + m_\gamma)]. \end{aligned}$$

مقدار Q برای این واکنش [به معادله (۴۱.۹) در مورد برخورد های نیوتونی مراجعه کنید] با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$Q = [(m_1 + m_\gamma) - (m_\pi + m_\gamma)] c^2 \quad (۴۸.۱۱)$$

و برابر اختلاف بین انرژی سکون ابتدایی و نهایی است. در این صورت رابطه $E_{k,1}$ به صورت زیر درمی آید:

$$E_{k,1} = -\frac{Q}{2m_p}(m_1 + m_p + m_p + m_p) \quad (49.11)$$

که انرژی آستانه را برای ذره ۱ (ذره فرودی) در چارچوب L به دست می دهد. اگر Q مثبت باشد، $E_{k,1}$ منفی است و انرژی جنبشی ذره فرودی هرچه باشد واکنش صورت می گیرد. این امر از اینجا ناشی می شود که انرژی سکون ذره های اولیه بزرگتر از انرژی لازم برای ایجاد ذره های نهایی در حال سکون می باشد. ولی اگر Q منفی باشد، $E_{k,1}$ مثبت است، در این صورت ذره فرودی باید دارای حداقل معینی انرژی جنبشی باشد، زیرا انرژی سکون ذرات ابتدایی برای ایجاد ذرات نهایی کافی نیست.

فهرست منابع

1. «On the Origins of the Special Theory of Relativity», G. Holton. *Am. J. Phys.* 28, 627 (1960).
2. «Henri Poincare and the Principle of Relativity», C. Scribner. *Am. J. Phys.* 32, 672 (1964).
3. «Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons», W. Bertozzi. *Am. J. Phys.* 32, 551 (1964).
4. «Massless Particles», R. Good. *Am. J. Phys.* 28, 679 (1960).
5. *An Introduction to the Special Theory of Relativity*, R. Katz. Princeton, N. J.: Momentum Books, D. Van Nostrand Co., 1964.
6. *The Special Theory of Relativity*, D. Bohm. New York: W. A. Benjamin, 1964.
7. *Introductory Mechanics*, E. Taylor. New York. John Wiley & Sons, 1960, Chapters 11, 12, and 13.
8. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison - Wesley 1963, Chapters 15, 16, and 17.

مسئله ها

۱۰۱۱. فرض کنید E و E' مقادیر انرژی کل دستگاهی متشکل از دو ذره باشند که با یکدیگر برهم کنش می کنند، و توسط دوناظر لخت O و O' که با سرعت نسبی v حرکت می کنند، اندازه گیری شده اند. ثابت کنید که

$$E = E' + (m_1 + m_2) \left(\mathbf{v}'_{CM} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} v^2 \right).$$

این رابطه را با نتیجه های داده شده در فصل ۹ مقایسه کنید. فرض کنید انرژیها آن قدر کم هستند که بتوان از دینامیک نیوتونی استفاده کرد.

۲.۱۱. معادله‌های غیر نسبیتی حرکت یک ذره را به گونه‌ای که توسط یک ناظر لخت O و ناظر دیگر O' که با سرعت زاویه‌ای ثابتی نسبت به اولی در حال چرخش است مشخص می‌شوند با یکدیگر مقایسه کنید. در نیروهای لختی که O' مشاهده می‌کند بحث کنید. [دانهایی: بخش ۴.۶ را مرور کنید.]

۳.۱۱. به ازای چه سرعتی اندازه حرکت یک ذره برابر با $m_0 c$ می‌شود؟ در این حالت انرژی کل و انرژی جنبشی چقدر است؟

۴.۱۱. الکترونی روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع $m \times 10^{-2} \times 2$ حرکت می‌کند، به گونه‌ای که سرعت آن برابر است با $c(0.95 + 0.01t)$. هنگامی که $t = 108$ است زاویه بین نیرو و شتاب را پیدا کنید.

۵.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون m_0 و سرعت $0.8c$ تحت تأثیر نیرویی (الف) موازی سرعت، (ب) عمود بر سرعت قرار می‌گیرد. نسبت نیرو به شتاب را در هر حالت حساب کنید. در حالت دوم، شعاع انحنا را نیز پیدا کنید و آن را با مقادیر غیرنسبیتی مقایسه کنید.

۶.۱۱. جرم سکون یک الکترون برابر $9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و جرم سکون پروتون $1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است. انرژی سکون آنها را بر حسب ژول و الکترون ولت (eV) حساب کنید.

۷.۱۱. اندازه حرکت و سرعت یک پروتون را هنگام خروج از شتابدهنده بروک هیون پیدا کنید. می‌دانیم این شتابدهنده به پروتون $10^8 \text{ eV} \times 3$ انرژی جنبشی می‌دهد.

۸.۱۱. شعاع مسیر حرکت پروتون در شتابدهنده بروک هیون 114 m است. نیروی مرکزگرای لازم برای نگهداری پروتون روی مدار را هنگامی که به انرژی جنبشی نهایی خود می‌رسد پیدا کنید.

۹.۱۱. سرعت الکترونی $0.8c$ است. سرعت پروتونی را که دارای (الف) اندازه حرکتی برابر با این الکترون، (ب) انرژی جنبشی برابر با این الکترون باشد، پیدا کنید.

۱۰.۱۱. مقدار جمله تصحیحی $3m_0 v^4 / 8c^2$ را نسبت به جمله اول معادله (۱۹.۱۱) برای (الف) الکترون اتم هیدروژن که دارای سرعت $10^6 \text{ ms}^{-1} \times 2.2$ است، (ب) پروتونی که با انرژی جنبشی 30 MeV از یک سیکلوترون خارج می‌شود، (ج) پروتونهایی که با انرژی جنبشی $10^8 \text{ eV} \times 3$ از شتابدهنده بروک هیون خارج می‌شوند، به دست آورید.

۱۱.۱۱. مثال ۵.۱۱ را به دست آوردن مختصات ذره به صورت تابعی از زمان و مقایسه آنها با مقادیر غیرنسبیتی تکمیل کنید. همچنین ثابت کنید که معادله مسیر عبارت است از

$$y = \frac{E_0}{F} \cosh \frac{Fx}{p_0 c}.$$

۱۲.۱۱. یک شتابدهنده پروتونهایی با سرعت $0.9c$ به میزان $10^{18} \times 3$ ذره در ثانیه،

در دسته‌هایی که $10^{-5}g$ عمر می‌کنند تولید می‌کند. انرژی لازم برای شتاب دادن به تمام ذرات موجود در یک دسته را پیدا کنید. اگر در هر ثانیه 10^5 دسته به وجود آیند، توان لازم برای شتاب دادن به ذرات را به دست آورید.

۱۳.۱۱. انرژی لازم برای تغییر سرعت یک الکترون و یک پروتون را، بر حسب eV، در حالات زیر حساب کنید: (الف) از سکون به $5000eV$ ، (ب) از $5000eV$ به $9000eV$ ، (ج) از $9000eV$ به $9500eV$ ، (د) از $9500eV$ به $9900eV$. به چه نتیجه کلی می‌توان رسید؟

۱۴.۱۱. انرژی جنبشی ذره‌ای را با خطای ۱٪ روی انرژی کل داخلی، می‌توان به صورت pc نوشت. کمینه سرعت آن چقدر است؟ انرژی جنبشی یک الکترون و یک پروتون که با چنین سرعتی حرکت می‌کنند بر حسب eV چقدر است؟

۱۵.۱۱. بیشینه سرعت یک ذره چقدر باید باشد تا بتوان انرژی جنبشی آن را، بدون اینکه خطا از ۱٪ تجاوز کند، به صورت $m_0 v^2/2$ نوشت؟ انرژی جنبشی یک الکترون و یک پروتون که با چنین سرعتی حرکت کنند بر حسب eV چقدر است؟

۱۶.۱۱. نشان دهید $\gamma = [1 - (m_0 c^2/E)^2]^{-1/2}$. از این رابطه سرعت ذره‌ای را پیدا کنید که برای آن E برابر است با (الف) انرژی سکون آن، (ب) دو برابر انرژی سکون آن، (ج) ده برابر انرژی سکون آن، و (د) هزار برابر انرژی سکون آن. انرژیهای مربوط را برای یک الکترون و یک پروتون بر حسب eV حساب کنید. منحنی نمایش v/c را بر حسب $E/m_0 c^2$ رسم کنید.

۱۷.۱۱. ثابت کنید که اندازه حرکت ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p = (E_k^2 + 2m_0 c^2 E_k)^{1/2} / c.$$

منحنی نمایش $p/m_0 c$ را بر حسب $E_k/m_0 c^2$ رسم کنید.

۱۸.۱۱. الکترونهایی تا انرژی جنبشی $10^9 eV$ شتاب داده شده‌اند. پیدا کنید (الف) نسبت جرم آنها را به جرم سکون، (ب) نسبت سرعت آنها را به سرعت نور، (ج) نسبت انرژی کل آنها را به انرژی جرم سکونشان. این مسئله را در مورد پروتونهایی با همین انرژی حل کنید.

۱۹.۱۱. نظر به اینکه نسبت انرژی بر سرعت دارای بعد اندازه حرکت می‌باشد، یکای MeV/c به عنوان یکای مناسبی در اندازه‌گیریهای اندازه حرکت ذره‌های بنیادی به کار می‌رود. مقدار این یکا را بر حسب $mkgs^{-1}$ بنویسید. اندازه حرکت الکترونی را که دارای انرژی کل $5 MeV$ می‌باشد بر حسب این یکا پیدا کنید. همین کار را در مورد پروتونی که انرژی کل آن $10^3 MeV \times 2$ است انجام دهید.

۲۰.۱۱. انرژی کل و سرعت الکترونی را که دارای اندازه حرکت $60 MeV/c$ عره است معین کنید. همین کار را در مورد یک پروتون نیز انجام دهید.

۲۱.۱۱. الکترونی با سرعت c و e نسبت به ناظر O حرکت می‌کند. در راستای این سرعت نسبی نیرویی برابر با $10^{-10} \times 9.109$ ، که در چارچوب مرجع متصل به الکترون اندازه‌گیری شده است، به آن وارد می‌شود. شتاب الکترون را نسبت به هر دو چارچوب مرجع پیدا کنید.

۲۲.۱۱. مسئله ۲۱.۱۱ را در حالتی که نیرو در راستای عمود بر سرعت نسبی وارد می‌شود حل کنید.

۲۳.۱۱. مسئله‌های ۲۱.۱۱ و ۲۲.۱۱ را در حالتی که نیرو نسبت به ناظر O اندازه‌گیری شده باشد حل کنید.

۲۴.۱۱. اندازه حرکت، انرژی کل و انرژی جنبشی یک پروتون را که با سرعت $v = 0.99c$ نسبت به آزمایشگاه حرکت می‌کند در حالت‌های زیر حساب کنید: (الف) در چارچوب L ، (ب) در چارچوبی که توسط پروتون تعریف می‌شود؛ (ج) در چارچوب C که توسط پروتون و یک اتم هلیوم ساکن در آزمایشگاه تعریف می‌شود.

۲۵.۱۱. بین یک پروتون با انرژی جنبشی 10^6 eV و یک پروتون ساکن برخوردی صورت می‌گیرد. (الف) سرعت دستگاه، (ب) اندازه حرکت کل و انرژی کل را در چارچوب L و (ج) انرژی جنبشی دو ذره را در چارچوب C پیدا کنید.

۲۶.۱۱. الکترونی با انرژی کل E_0 با یک پروتون ساکن به صورت رودررو برخورد می‌کند. اگر انرژی الکترون در مقایسه با انرژی سکون آن خیلی زیاد باشد، الکترون را باید به طور نسبیتی مورد مطالعه قرار داد، بعلاوه، اگر انرژی الکترون نسبت به انرژی سکون پروتون کوچک باشد، پروتون را می‌توان به طور غیر نسبیتی مطالعه کرد. در این صورت ثابت کنید که (الف) پروتون با سرعتی تقریباً برابر با c ($2E_0/m_0c^2$) پس زده می‌شود، (ب) انرژی که از الکترون به پروتون انتقال می‌یابد برابر است با $2E_0/m_0c^2$. حالتی را مورد نظر قرار دهید که انرژی الکترون برابر 100 MeV است. [دانهایی: برای الکترون $E = cp$ است، در صورتی که برای پروتون $E_k = p^2/2m$ می‌باشد. همچنین توجه کنید که اگر پروتون به سمت جلو حرکت کند الکترون به عقب برمی‌گردد، به گونه‌ای که سوی اندازه حرکت آن وارونه می‌شود.]

۲۷.۱۱. یک روش برای به دست آوردن انرژی لازم برای یک واکنش هسته‌ای فرستادن یک ذره در مقابل ذره دیگر است. هنگامی که ذره‌ها مشابه و انرژی آنها یکسان باشد، چارچوب C و چارچوب آزمایشگاه برهم منطبق می‌شوند. این روش در مرکز پژوهش‌های هسته‌ای اروپا (CERN) به کار گرفته می‌شود. در آنجا پروتون‌هایی را که تا انرژی 28 GeV شتاب داده شده‌اند در دو «حلقهٔ انبارنده» در دوسوی مخالف به گردش درمی‌آورند؛ در یک لحظه مناسب بین دو باریکهٔ پروتون برخورد به وجود می‌آید. (الف) انرژی کل حاصل برای انجام یک واکنش چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی یک پروتون در چارچوب مرجعی که پروتون دیگر در آن ساکن چقدر است؟ انرژی است که باید به یک پروتون داده شود تا هنگام برخورد با یک هدف ساکن در آزمایشگاه همان واکنش را به وجود

آورد. آیا در ایده «حلقه‌های انبارنده» امتیازی مشاهده می‌کنید؟

۲۸.۱۱. قانون نسبیتی (۲۶.۱۱) را برای تبدیل اندازه حرکت و انرژی به دست آورید. برای این کار روابط $E' = m_0 c^2 / \sqrt{1 - V'^2/c^2}$ و $p' = mV' / \sqrt{1 - V'^2/c^2}$ را بنویسید و با استفاده از معادله (۳۶.۶)، سرعت V' را بر حسب سرعت V (که توسط O اندازه‌گیری می‌شود) و v (سرعت نسبی آنها) بیان کنید. [دانهمایی: از روابطی که به دست آمده در مسئله ۳۸.۶ استفاده کنید.]

۲۹.۱۱. ثابت کنید که اگر ذره نسبت به O' ساکن نباشد قانون کلی تبدیل نیرو عبارت است از

$$F'_x = F_x - \left(\frac{vV_y/c^2}{1 - vV_x/c^2} \right) F_y - \left(\frac{vV_z/c^2}{1 - vV_x/c^2} \right) F_z$$

$$F'_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2} F_y$$

$$F'_z = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vV_x/c^2} F_z.$$

V سرعت ذره نسبت به O است. تحقیق کنید که اگر ذره نسبت به O ساکن باشد، این روابطها به روابط (۳۲.۱۱)، (۳۳.۱۱) و (۳۴.۱۱) تبدیل می‌شوند.

۳۰.۱۱. نشان دهید که تبدیل انرژی و اندازه حرکت را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$E' = k(E - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} + k \left[\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{v}E}{c^2} \right].$$

۳۱.۱۱. ذره‌ای که جرم سکون آن m_1 است و با سرعت v_1 در چارچوب L حرکت می‌کند، با ذره‌ای که جرم سکون m_2 در چارچوب L ساکن است برخورد می‌کند. (الف) ثابت کنید که سرعت چارچوب C دستگاه دو ذره برابر است با

$$v_c = \frac{v_1}{1 + A\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

که در آن $A = m_2/m_1$ است. (ب) ثابت کنید که در چارچوب C سرعت m_1 برابر است با

$$v'_1 = \frac{v_1 A \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - v_1^2/c^2 + A\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

و سرعت m_2 مساوی v_c — است. (ج) مقدار کمیت‌های پیش را هنگامی که v_1 در مقابل c

کوچک باشد حساب کنید و نتایج را با نتایج مثال ۱۳.۹ مقایسه کنید.

۳۲.۱۱. با به کار بردن قوانین تبدیل لورنتس برای انرژی و اندازه حرکت، ثابت کنید که اگر سرعت دستگاه نسبت به ناظر O برابر $v_c = c^2 p / E$ ، و نسبت به ناظر دیگر O' که با سرعت v نسبت به ناظر O در راستای محور X حرکت می‌کند برابر $v'_c = c^2 p' / E'$ باشد، در این صورت سرعت‌های v_c و v'_c با معادله‌های تبدیل (۳۶.۶) به یکدیگر مربوط می‌شوند. همچنین ثابت کنید اگر $v'_c = 0$ (یا $p = 0$) باشد، داریم $v_c = v$. این موضوع یکی از فرض‌های اساسی ما، در بخش ۹.۱۱ هنگام تعریف سرعت دستگاه بود. این امر نشان می‌دهد که نظریه‌ای که توضیح داده‌ایم با تبدیل لورنتس مطابقت دارد.

۳۳.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون m_1 و اندازه حرکت p_1 به طور ناکشسان با ذره‌ای به جرم m_2 که در آزمایشگاه ساکن است برخورد می‌کند. دو ذره بدون آنکه جرم سکونشان تغییر کند به یکدیگر می‌چسبند. (الف) سرعت ذره حاصل را نسبت به چارچوب L پیدا کنید. (ب) Q برخورد را به دست آورید.

۳۴.۱۱. در مسئله ۳۳.۱۱ در حالتی که جرم سکون ذره حاصل m_3 باشد که با ترکیب جرم‌های سکون دو ذره، $m_1 + m_2$ فرق کند، بحث کنید.

۳۵.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون m_1 و اندازه حرکت p_1 به طور ناکشسان با ذره‌ای به جرم سکون m_2 که در آزمایشگاه ساکن است برخورد می‌کند. حاصل این برخورد ذره‌ای به جرم سکون m_3 و ذره دیگری به جرم سکون صفر می‌باشد. انرژی ذره اخیر را (الف) در چارچوب C ، و (ب) در چارچوب L پیدا کنید.

۳۶.۱۱. زاویه پس‌زنی ذره به جرم m_0 را در مثال ۱۵.۱۱، φ فرض کنید. ثابت کنید که انرژی جنبشی ذره بعد از برخورد برابر است با

$$E_k = \frac{2E(E/E_0 c^2) \cos^2 \varphi}{1 + 2(E/m_0 c^2) + (E/m_0 c^2)^2 \sin^2 \varphi}.$$

۳۷.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون m_1 و اندازه حرکت p_1 با ذره‌ای به جرم m_2 که در چارچوب L ساکن است برخورد می‌کند و به اندازه زاویه θ منحرف می‌شود. ثابت کنید که اندازه حرکت و انرژی m_1 بعد از برخورد عبارتند از

$$p_3 = p_1 \frac{(m_1^2 c^2 + m_2 E_1) \cos \theta + (E_1 + m_2 c^2) \sqrt{m_1^2 - m_2^2} \sin^2 \theta}{(E_1/c + m_2 c)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta}$$

$$E_3 = \frac{(E_1 + m_2 c^2)(m_1^2 c^2 + m_2 E_1) + c^2 p_1^2 \cos \theta \sqrt{m_1^2 - m_2^2} \sin^2 \theta}{(E_1/c + m_2 c)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta}.$$

۳۸.۱۱. با مراجعه به مسئله ۳۷.۱۱، ثابت کنید که اگر ذره m_2 با زاویه φ نسبت به راستای حرکت ذره فرودی پس زده شود، در این صورت اندازه حرکت و انرژی آن برابر می‌شود با

$$p_{\varphi} = p_1 \frac{\gamma m_{\gamma} (E_1 + m_{\gamma} c^2) \cos \varphi}{(E_1/c + m_{\gamma} c)^2 - p_1^2 \cos^2 \varphi}$$

$$E_{\varphi} = m_{\gamma} c^2 \left[1 + \frac{\gamma p_1^2 \cos^2 \varphi}{(E_1/c + m_{\gamma} c)^2 - p_1^2 \cos^2 \varphi} \right].$$

۳۹۰۱۱. بازم با مراجعه به مسئله‌های ۳۷۰۱۱ و ۳۸۰۱۱، فرض کنید جرم سکون دو ذره یکسان باشد. ذره فرودی بعد از برخورد، در چارچوب C با زاویه φ نسبت به راستای ابتدایی خود، و ذره دیگر در سوی مخالف آن حرکت می‌کند. نشان دهید زاویه‌های θ و θ' که این ذره‌ها در حرکت خود با چارچوب L می‌سازند، از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{1 - v^2/c^2} \operatorname{tg} \frac{1}{\gamma} \varphi$$

$$\operatorname{tg} \theta' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \operatorname{cotg} \frac{1}{\gamma} \varphi.$$

از آن نتیجه بگیرید که $\theta + \theta' \leq \pi/2$ است، و هر چه v به c نزدیکتر باشد، زاویه $\theta + \theta'$ بین دو ذره در چارچوب L کوچکتر است. آن را با نتایج داده شده در مثال ۱۱۰۹ برای یک برخورد غیرنسبتی مقایسه کنید.

[دانه‌مایی: توجه داشته باشید که قبل از برخورد دو ذره در چارچوب C با سرعت‌های v و $-v$ حرکت می‌کنند و بعد از برخورد در سوی مخالف و با همان سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهند].

۴۰۰۱۱. با مراجعه به مسئله ۳۷۰۱۱، تحقیق کنید که اگر جرم سکون ذره ۱ برابر صفر باشد، مقادیر p_3 و E_3 به مقادیر مثال ۱۰۰۱۱ تبدیل می‌شوند.

۴۱۰۱۱. ثابت کنید که معادله حرکت موشکی که با سرعت نسبتی حرکت می‌کند و هیچگونه نیروی خارجی به آن وارد نمی‌شود عبارت است از $(1 - v^2/c^2) + v'_e = 0$ ، $m(dv/dm) + v'_e = 0$. در این رابطه m جرم سکون لحظه‌ای موشک، v سرعت آن نسبت به ناظر و v'_e سرعت خروج گاز نسبت به موشک است. همچنین، با انتگرال‌گیری ثابت کنید که سرعت نهایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v = \frac{c[1 - (m/m_0)2v'_e/c]}{1 + (m/m_0)2v'_e/c}.$$

[دانه‌مایی: معادله‌های بقای اندازه حرکت و انرژی را نسبت به ناظر بنویسید. توجه داشته باشید که جرم سکون گازهای خروجی با تغییر جرم سکون موشک برابر نیست].

۴۲۰۱۱. ذره‌ای با جرم سکون m_0 ، به دوزره به جرم‌های سکون m_1 و m_2 تقسیم (واپاشیده) می‌شود. نشان دهید که در چارچوب C انرژی ذره‌های به دست آمده برابر است با

$$E'_1 = (m_0^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2/2m_0.$$

$$E'_2 = (m_0^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2/2m_0.$$

اندازه حرکت آنها را نیز به دست آورید.

۴۳.۱۱. مسئله ۴۲.۱۱ را درحالتی که ذره‌ها درچارچوب L قرار دارند و اندازه حرکت ذره m_0 دراین دستگاه برابر p است حل کنید. همچنین ثابت کنید که اگر p_1 و p_2 اندازه حرکت ذره‌های حاصل و θ زاویه بین این دو باشد، داریم

$$m_0^2 c^4 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2E_1 E_2 - 2m_1 m_2 c^4 - 2p_1 p_2 c^2 \cos \theta.$$

۴۴.۱۱. دربرخورد بین دو ذره m_1 و m_2 ، ذره m_1 با اندازه حرکت p_1 حرکت می‌کند و m_2 درچارچوب L ساکن است. بعداز برخورد، علاوه برذره‌های m_1 و m_2 ذره‌های دیگر $m_3, m_4, \dots$ نیز ظاهر می‌شوند. ثابت کنید که برای این فرایند انرژی آستانه درچارچوب L برابر است با

$$E_{k,1} = (\Delta m) c^2 [1 + m_1/m_2 + \Delta m/2m_2].$$

در اینجا $\Delta m = m_3 + m_4 + \dots$ است. این معادله را در مورد فرایند ایجاد یک جفت پروتون - پاد پروتون، چنانکه در مثال ۱۱.۱۱ بحث کردیم، به کار ببرید.

۴۵.۱۱. ذره‌ای به جرم سکون m_1 با انرژی کل خیلی بزرگ E و با سرعتی تقریباً برابر c با ذره ساکنی به جرم سکون m_2 برخورد می‌کند. ثابت کنید که سرعت دستگاه برابر است با $c(1 - m_2 c^2/E_1)$ و انرژی قابل حصول در چارچوب C برابر است با $(2E_1 m_2 c^2)^{1/2}$.

۴۶.۱۱. واکنشی را در نظر بگیرید که درآن ذره‌ای به جرم سکون صفر و انرژی E_1 با ذره‌ای به جرم سکون m_2 که درآزمایشگاه ساکن است برخورد می‌کند. حاصل این واکنش دو ذره به جرمهای سکون m_3 و m_4 می‌باشد. ثابت که انرژی آستانه E_1 برای این واکنش برابر است با

$$E_1 = m_2 (1 + m_2/2m_1) c^2.$$

۴۷.۱۱. مقدار Q و انرژی جنبشی آستانه ذره فرودی (ذره π^-) را در چارچوب L ، برای واکنشهای (الف) $\pi^- + p^+ \rightarrow n + \pi^0$ ، (ب) $\pi^- + p^+ \rightarrow \Sigma^- + K^+$ تعیین کنید. جرم سکون این ذره‌ها عبارت است از

ذره	جرم سکون، برحسب kg
π^-	0.24889×10^{-27}
π^0	0.24057×10^{-27}
p^+	1.6726×10^{-27}
n	1.6748×10^{-27}
Σ^-	1.69702×10^{-27}
K^+	0.8805×10^{-27}

[داهنمایی: از نتایج مثال ۱۲.۱۱ استفاده کنید.]

۴۸۰۱۱. یک ذره بنیادی به جرم سکون m_0 ، با تقسیم شدن به چند ذره بنیادی دیگر فروپاشیده می‌شود. واکنش دارای Q مخالف صفر است. (الف) ثابت کنید که اگر ذره به دو قطعه برابر تقسیم شود این قطعه‌ها در چارچوب C باید در دو سوی مخالف با اندازه حرکت $\frac{1}{2}(2m_0Q - Q^2/c^2)^{1/2}$ حرکت کنند. (ب) اگر ذره به سه قطعه برابر تقسیم شود و این قطعات به طور متقارن در چارچوب C گسیل شوند، اندازه حرکت هر قطعه برابر است با

$$\frac{1}{3}(2m_0Q - Q^2/c^2)^{1/2}.$$

(ج) تحقیق کنید هنگامی که Q خیلی کوچکتر از m_0c^2 است، نتایج (الف) و (ب) بترتیب به رابطه‌های غیرنسبیتی که در سؤال‌های (د) و (ه) در مسئله ۱۳۰۹ آمده بودند، تبدیل می‌شوند. (د) نتیجه قسمت (ب) را در مورد ذره‌ای به نام مزون π^0 ($m_0 = 133 \times 10^{-28} \text{ kg}$)، که به سه قطعه به نام مزون π^+ ($m_0 = 273 \times 10^{-28} \text{ kg}$) فروپاشیده می‌شود به کار ببرید. مقدار Q واکنش را به دست آورید و بزرگی سرعت قطعه‌ها را در چارچوب C تعیین کنید. اگر رابطه‌های غیرنسبیتی مسئله ۱۳۰۹ را به کار ببریم درصد خطای محاسبه چقدر خواهد بود؟

حرکت نوسانی

مقدمه	۱۰۱۲
سینماتیک حرکت هماهنگ ساده	۲۰۱۲
نیرو و انرژی در حرکت هماهنگ ساده	۳۰۱۲
دینامیک حرکت هماهنگ ساده	۴۰۱۲
آونگ ساده	۵۰۱۲
آونگ مرکب	۶۰۱۲
برهم نهش دو حرکت هماهنگ ساده: همراستا و هم بسامد	۷۰۱۲
برهم نهش دو حرکت هماهنگ ساده: همراستا و با بسامدهای مختلف	۸۰۱۲
برهم نهش دو حرکت هماهنگ ساده: در راستاهای عمود برهم	۹۰۱۲
نوسانگرهای جفت شده	۱۰۰۱۲
نوسانهای ناهماهنگ	۱۱۰۱۲
نوسانهای میرا	۱۲۰۱۲
نوسانهای واداشته	۱۳۰۱۲
پاگیری یک نوسانگر	۱۴۰۱۲
تحلیل فوریه حرکت دوره ای	۱۵۰۱۲

یکی از مهمترین حرکت‌هایی که در طبیعت به آن برخورد می‌کنیم حرکت نوسانی (یا ارتعاشی) است. یک ذره هنگامی نوسان می‌کند که به طور تناوبی اطراف یک وضع تعادل جابجا شود. حرکت یک آونگ نوسانی است. هرگاه یک وزنه آویزان از فنری را رها کنند شروع به نوسان می‌کند. اتمها در یک جسم جامد در حال ارتعاش هستند. همچنین در مولکولها، اتمها نسبت به هم در حرکت ارتعاشی می‌باشند. در یک آنتن گیرنده یا فرستنده الکترونها بتندی در حال نوسان هستند. در بحث پدیده‌های موجی نیز، که در قسمت سوم این دوره به آن خواهیم پرداخت، آشنایی با حرکت ارتعاشی ضروری است.

مهمترین حرکت نوسانی حرکت هماهنگ ساده^۱ است، زیرا نه تنها ساده‌ترین بیان ریاضی را دارد، بلکه نمایش نسبتاً درستی از بسیاری از پدیده‌های نوسانی است که در طبیعت دیده می‌شوند. گفتگوی ما در این فصل به این نوع حرکت اختصاص دارد.

۲۰۱۲ سینماتیک حرکت هماهنگ ساده

مطابق تعریف، ذره‌ای که در طول محور X ها حرکت می‌کند دارای حرکت هماهنگ ساده است هرگاه x ، جابجایی آن نسبت به مبدأ مختصات، به صورت تابعی از زمان با رابطه زیر داده شود:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1012)$$

کمیت $(\omega t + \alpha)$ فاز^۲ نام دارد، بنابراین α فاز اولیه، یعنی فاز مربوط به $t = 0$ است. هرچند حرکت هماهنگ ساده را به صورت یک تابع سینوسی تعریف کردیم، می‌توان آن را با یک تابع کسینوسی نیز بیان کرد، در این صورت تنها تفاوت آن عبارت می‌شود از یک اختلاف فاز اولیه $\pi/2$. زیرا تابع سینوس (یا کسینوس) بین $+1$ و -1 و جابجایی ذره بین $x = +A$ و $x = -A$ تغییر می‌کند. A ، بیشینه جابجایی از مبدأ، به عنوان دامنه^۳ حرکت هماهنگ ساده تعریف می‌شود. هر بار که افزایش زاویه به 2π برسد تابع سینوسی تکرار می‌شود، در نتیجه پس از فاصله زمانی $2\pi/\omega$ جابجایی ذره نیز تکرار می‌شود. از این رو حرکت هماهنگ ساده حرکتی است دوره‌ای، و دوره آن برابر است با $P = 2\pi/\omega$. تعداد نوسانهای کامل انجام یافته در واحد زمان را بسامد می‌نامند و با ν نشان می‌دهند؛ بنابراین $\nu = 1/P$ است. کمیت ω ، بسامد زاویه‌ای ذره نوسانگر نامیده می‌شود و با رابطه‌ای مشابه معادله (۵۱۰۵) در حرکت دایره‌ای، به بسامد مربوط می‌شود، یعنی

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu. \quad (2012)$$

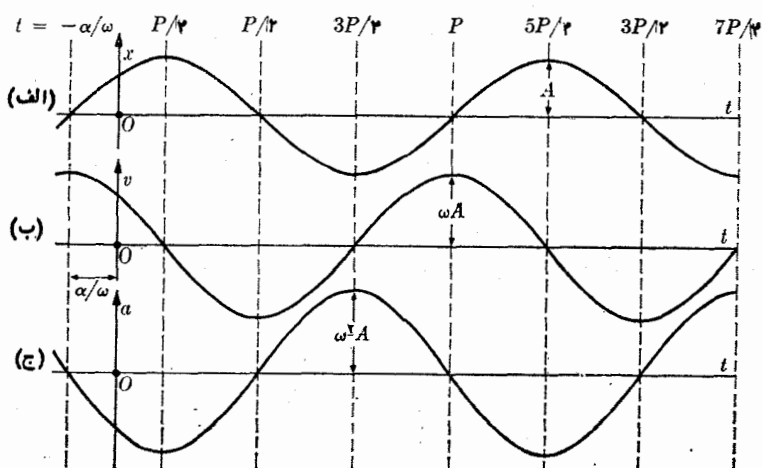
سرعت ذره که با استفاده از معادله (۲۰۵) تعیین می‌شود، برابر است با

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha). \quad (3.12)$$

همچنین، شتاب با رابطه زیر داده می‌شود:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x. \quad (4.12)$$

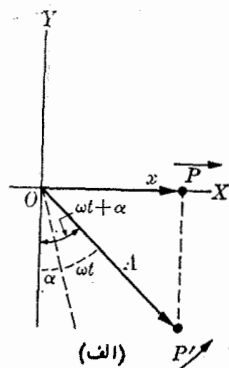
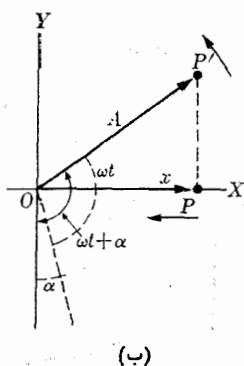
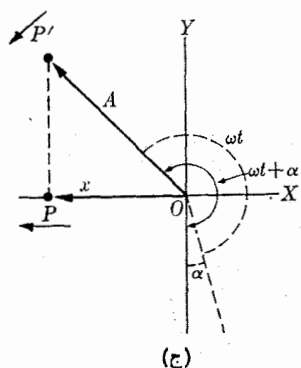
این رابطه نشان می‌دهد که در یک حرکت هماهنگ ساده همیشه شتاب متناسب است با جابجایی با علامت مخالف. در شکل ۱.۱۲، x ، v و a به صورت توابعی از زمان نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱.۱۲. نمودار (الف) جابجایی، (ب) سرعت، (ج) شتاب بر حسب زمان، در حرکت هماهنگ ساده

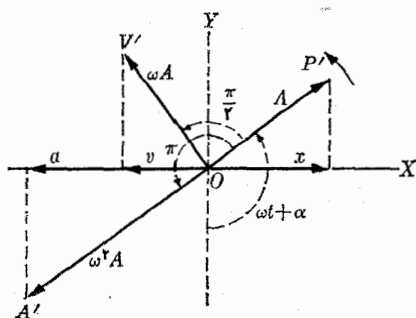
جابجایی ذره‌ای را که دارای حرکت هماهنگ ساده است می‌توان تصویر برداری مانند $\vec{OP}'$ ، که $OP' = A$ ، در راستای محور X ‌ها در نظر گرفت که در سوی پاد ساعتگرد با سرعت زاویه‌ای ω دور نقطه O می‌چرخد و در هر لحظه با سوی منفی محور Y ‌ها زاویه $\omega t + \alpha$ می‌سازد، که این زاویه نیز در سوی پاد ساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. در شکل ۲.۱۲ بردار $\vec{OP}'$ را در چند وضع مختلف نشان داده‌ایم. می‌توان بررسی کرد که در هر لحظه مؤلفه بردار $\vec{OP}'$ روی محور X ‌ها از رابطه $x = OP = OP' \sin(\omega t + \alpha)$ به دست می‌آید که با معادله (۱.۱۲) تطبیق می‌کند.

سرعت و شتاب ذره را نیز می‌توان با بردارهای چرخان $\vec{OA}'$ و $\vec{OV}'$ نشان داد که طول آنها بترتیب برابر ωA و $\omega^2 A$ است و تصویر این بردارها روی محور X ‌ها بترتیب



شکل ۲.۱۲. بردار چرخان برای نمایش جابجایی در حرکت هماهنگ ساده

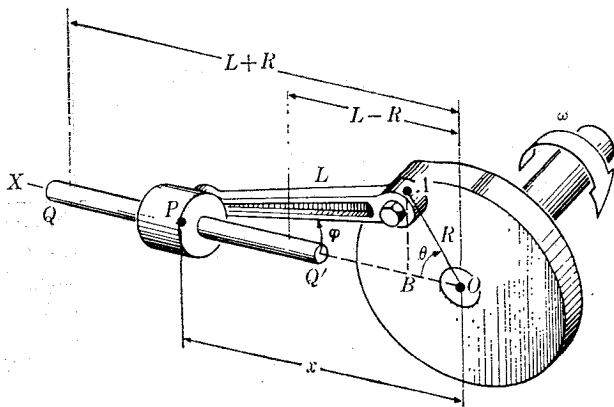
سرعت و شتاب ذره‌ای را که حرکت هماهنگ ساده دارد نشان می‌دهند. راستا و سوی نسبی این دو بردار در شکل ۳.۱۲ نشان داده شده است. توجه کنید که بردار $\vec{OP'}$ به اندازه $\pi/2$ و $\vec{OA'}$ به اندازه π نسبت به بردار چرخان $\vec{OP}$ تقدم دارند.



شکل ۳.۱۲. بردارهای چرخان برای جابجایی، سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده

مثال ۱.۱۲. در سازوکار نشان داده شده در شکل ۴.۱۲، آیا حرکت P هماهنگ ساده است؟ در این سازوکار QQ' میله‌ای است که استوانه P می‌تواند روی آن بلغزد. به وسیله میله L به چرخشی به شعاع R مربوط می‌شود که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد (این سازوکار در بسیاری از ماشینهای بخار یافت می‌شود و حرکت رفت و برگشتی یک پیستون را به حرکت چرخشی یک چرخ تبدیل می‌کند).

حل: از شکل پیداست که P بین نقطه‌ای به فاصله $L + R$ و نقطه‌ای به فاصله $L - R$ از نقطه O نوسان می‌کند. برای اینکه تعیین شود حرکت P هماهنگ ساده است باید جستجو کرد که آیا جابجایی P در معادله (۱.۱۲) صدق می‌کند یا نه. با توجه به وضع هندسی



شکل ۴.۱۲. حرکت P نوسانی است ولی هماهنگ ساده نیست.

شکل می‌توان نوشت

$$x = R \cos \theta + L \cos \varphi$$

و

$$L \sin \varphi = R \sin \theta$$

به گونه‌ای که

$$\sin \varphi = (R/L) \sin \theta$$

و

$$\cos \varphi = (1 - \sin^2 \varphi)^{1/2} = \frac{1}{L} (L^2 - R^2 \sin^2 \theta)^{1/2}.$$

بنابراین

$$x = R \cos \theta + (L^2 - R^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$$

و در نتیجه، چون $\theta = \omega t$ است، به دست می‌آید

$$x = R \cos \omega t + (L^2 - R^2 \sin^2 \omega t)^{1/2}.$$

این رابطه جابجایی P را بر حسب زمان به دست می‌دهد. هرگاه این رابطه را با معادله (۱.۱۲) مقایسه کنیم، می‌بینیم جمله اول، $R \cos \omega t$ ، مربوط به یک حرکت هماهنگ ساده با $\alpha = \pi/2$ است ولی جمله دوم چنین نیست. از این رو هرچند حرکت P یک حرکت نوسانی است، ولی هماهنگ ساده نیست.

یک مهندس مکانیک که سازوکاری نظیر شکل ۴.۱۲ را طرح می‌کند، باید محاسبه کند که چگونه یک نیروی خاص بر P وارد شود تا جابجایی x مطابق رابطه فوق باشد و حرکت چرخ دایره‌ای یکنواخت شود. هرگاه P به پیستون یک ماشین بخار متصل شده باشد، می‌توان این کار را با تنظیم مقدار بخار ورودی انجام داد.

مثال ۲.۱۲. بر ذره‌ای به جرم m نیروی نوسانی $F = F_0 \sin \omega t$ وارد می‌شود. حرکت ذره را مطالعه کنید.

حل: معادله حرکت ذره عبارت است از $ma = F_0 \sin \omega t$ ، یا چون $a = dv/dt$ است،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}_0}{m} \sin \omega t.$$

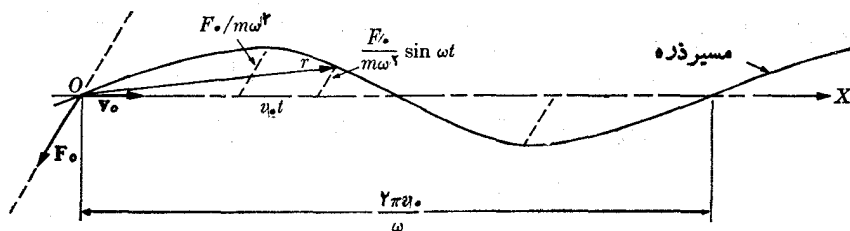
با انتگرال گیری از این رابطه به دست می آید

$$v = -\frac{F_0}{m\omega} \cos \omega t + v_0.$$

که در آن v_0 یک ثابت انتگرال است، نه سرعت اولیه که از قراردادن $t = 0$ به دست می‌آید. همچنانکه می‌توان ثابت کرد، سرعت اولیه برابر است با $v_0 = F_0/m\omega$. اگر به یاد داشته باشیم که $v = dr/dt$ است و بار دیگر از رابطه فوق انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم

$$\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega^2} \sin \omega t + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

این رابطه مکان ذره را به صورت تابعی از زمان به دست می دهد. در اینجا $\mathbf{r}$ مکان اولیه ذره است. اگر $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ فرض شود، مسیر ذره با شکل ۵.۱۲ نشان داده می شود. چنانکه مشاهده می شود، ذره به سمت راست پیش می رود، ولی در راستای $\mathbf{F}$ در اطراف محور نوسان می کند. این شکل را نباید با شکل ۱۰.۱۲ الف که در یک حرکت هماهنگ ساده، جابجایی ذره را به صورت تابعی از زمان به دست می دهد اشتباه کرد. وضع فیزیکی که در این مثال نشان داده شده است هنگامی رخ می دهد که مثلاً، الکترون (یا هر ذره باردار دیگر) در یک میدان الکتریکی نوسانی حرکت کند.



شکل ۵.۱۲. حرکت در صفحه بر اثر یک نیروی هماهنگ

از دانشجو می‌خواهیم حالت خاصی را در نظر بگیرد که در آن $\mathbf{F}_0$ و $\mathbf{v}_0$ موازی هستند و در این صورت نمودار جابجایی را بر حسب زمان رسم کند.

۳.۱۲ نیرو و انرژی در حرکت هماهنگ ساده

از معادله (۴.۱۲) می‌توان نیروی را که باید بر ذره‌ای به جرم m وارد شود تا آن را به حرکت هماهنگ ساده وادار حساب کرد. با استفاده از معادله حرکت $F = ma$ و با قرار دادن مقدار شتاب در آن از معادله (۴.۱۲)، به دست می‌آید

$$F = -m\omega^2 x = -kx \quad (۵.۱۲)$$

که در آن قرار داده‌ایم

$$k = m\omega^2 \quad \text{یا} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (۶.۱۲)$$

رابطه (۵.۱۲) نشان می‌دهد که، در حرکت هماهنگ ساده، نیرو متناسب با جابجایی و دسوی مخالف آن است. بنابراین نیرو همیشه به سوی مبدأ O است. نقطه O وضع ترازمندی است، یعنی در این نقطه $F = 0$ می‌باشد، زیرا $x = 0$ است. همچنین می‌توان گفت نیروی F جاذبه و نقطه O مرکز جذب است. نیروی داده شده با معادله (۵.۱۲) از نوع نیروهای است که هنگام تغییر شکل دادن یک جسم کشسان مانند فنر ظاهر می‌شوند. در فصل ۸ مثالهای متعددی از این گونه نیروها آمده است. ثابت $k = m\omega^2$ را گاهی ثابت کشسانی می‌نامند، و آن نیروی لازم برای جابجایی ذره به اندازه واحد مسافت می‌باشد. از ترکیب معادله‌های (۲.۱۲) و (۶.۱۲) می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۷.۱۲)$$

که دوره و بسامد را در یک حرکت هماهنگ ساده بر حسب جرم ذره و ثابت کشسانی نیروی وارد شده بیان می‌کنند. انرژی جنبشی ذره برابر است با

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \quad (۸.۱۲)$$

یا چون $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ است، با استفاده از معادله (۱۰.۱۲) برای جابجایی، می‌توان انرژی جنبشی را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [1 - \sin^2(\omega t + \alpha)] \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 (A^2 - x^2). \end{aligned} \quad (۹.۱۲)$$

توجه کنید، که انرژی جنبشی در مرکز ($x = 0$) بیشینه و در دو انتهای مسیر نوسان ($x = \pm A$) برابر صفر است.

برای به دست آوردن انرژی پتانسیل، به معادله (۲۴.۸) یعنی $F = -dE_p/dx$ باز می‌گردیم. با به کار بردن معادله (۵.۱۲) برای نیرو، می‌توان نوشت

$$dE_p/dx = kx$$

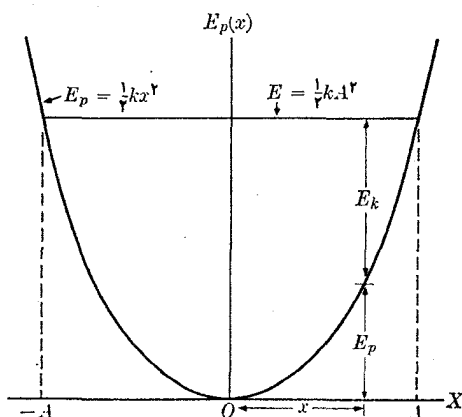
با انتگرال گیری (و انتخاب انرژی پتانسیل صفر برای مبدأ یا مکان ترازمندی)، به دست می آید

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x kx dx \quad \text{یا} \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \quad (10.12)$$

بدین طریق انرژی پتانسیل در مبدأ ($x = 0$) کمینه (صفر) است و با نزدیک شدن به دو انتهای مسیر ($x = \pm A$) افزایش می یابد. با جمع معادله های (۹.۱۲) و (۱۰.۱۲)، انرژی کل یک نوسانگر هماهنگ ساده به دست می آید:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2 \quad (11.12)$$

که کمیت ثابتی است. این امر را باید از معادله (۲۹.۸) پیش بینی می کردیم، زیرا نیرو پایستار است. بنابراین می توانیم بگوییم که در طول یک نوسان، تبادل دائم انرژی جنبشی و پتانسیل وجود دارد. هنگامی که ذره از مکان ترازمندی دور می شود انرژی پتانسیل با صرف انرژی جنبشی افزایش می یابد؛ زمانی که ذره به مکان ترازمندی نزدیک می شود حالت عکس پیش می آید.



شکل ۶.۱۲. رابطه های انرژی در حرکت هماهنگ ساده

شکل ۶.۱۲ نشان می دهد که نمودار انرژی پتانسیل $E_p = kx^2/2$ به صورت یک سهمی است. برای یک انرژی معلوم E ، که با خط افقی نشان داده شده است، حدود نوسان، چنانکه در بخش ۱۱.۸ توضیح داده شد، از نقاط تلاقی این خط افقی با منحنی انرژی پتانسیل تعیین می شوند. چون سهمی E_p متقارن است، بنابراین انتهای نوسانها در فاصله های برابر $\pm A$ از نقطه O قرار گرفته اند. برای هر نقطه x ، انرژی جنبشی E_k از فاصله بین منحنی $E_p(x)$ و خط E به دست می آید.

۴.۱۲ دینامیک حرکت هماهنگ ساده

در بخش ۲.۱۲ با نوشتن معادله (۱.۱۲)، حرکت هماهنگ ساده را با ویژگیهای سینماتیکی آن تعریف کردیم. نوع نیرویی که لازم است تا چنین حرکتی را ایجاد کند در مرحله بعدی مورد بررسی قرار گرفت [که با معادله (۵.۱۲) داده شد]. با این حال، خیلی جالب است که مسئله را از جهت عکس مطالعه کنیم: می‌خواهیم ثابت کنیم که از هر نیروی جاذبه متناسب با جابجایی (یعنی $F = -kx$) حرکت هماهنگ ساده حاصل می‌شود.

یک روش آن است که از معادله حرکت $F = ma$ یا $F = -kx$ شروع کنیم و با توجه به اینکه در یک حرکت مستقیم الخط $a = d^2x/dt^2$ است، معادله زیر را بنویسیم:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{یا} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

با قراردادن $\omega^2 = k/m$ ، می‌توان نوشت

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (12.12)$$

این رابطه یک معادله دیفرانسیل است که پاسخهای آن تابعهایی سینوسی یا کسینوسی از ωt می‌باشند. با قراردادن $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ به جای x ، می‌توان مستقیماً بررسی کرد که این بیان برای x ، که مربوط به یک حرکت هماهنگ ساده است، در معادله (۱۲.۱۲) صدق می‌کند. همچنین می‌گوییم $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ پاسخ عمومی معادله (۱۲.۱۲) است زیرا دارای دو ثابت اختیاری، دامنه A و فاز اولیه α می‌باشد. در نتیجه، ثابت می‌شود که یک نیروی متناسب با جابجایی، یک حرکت هماهنگ ساده به وجود می‌آورد.

در اینجا خاطر نشان می‌سازیم که معادله دیفرانسیل (۱۲.۱۲)، در موارد گوناگون زیادی در فیزیک ظاهر می‌شود. هر موقع که با آن برخورد کنیم، حاکی از آن است که پدیده مربوطه نوسانی و مطابق با قانون $A \sin(\omega t + \alpha)$ می‌باشد، چه این معادله بیانگر جابجایی خطی یا زاویه‌ای یک ذره باشد، چه جریان در یک مدار الکتریکی، یا چگالش یونی در پلاسما، دمای یک جسم یا موارد متعدد دیگری در فیزیک.

مثال ۳.۱۱. پاسخ معادله (۱۲.۱۲) برای یک حرکت هماهنگ ساده را بر حسب جابجایی اولیه x_0 و سرعت اولیه v_0 مورد مطالعه قرار دهید.

حل: گفتیم که پاسخ عمومی معادله (۱۲.۱۲) عبارت است از

$$x = A \sin(\omega t + \alpha).$$

☆ پاسخ عمومی معادله (۱۲.۱۲) را می‌توان به صورت $x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ نیز نوشت، که در آن a و b دو ثابت اختیاری هستند. اگر a را برابر $A \cos \alpha$ و b را برابر $A \sin \alpha$ بگیریم، این پاسخ هم‌ارز پاسخ $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ است.

بنا بر این سرعت برابر می‌شود با

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha).$$

در نتیجه با قراردادن $t = 0$ ، داریم

$$x_0 = A \sin \alpha, \quad v_0 = \omega A \cos \alpha.$$

از این رابطه‌ها به دست می‌آید

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{v_0} \quad \text{و} \quad A = \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2}.$$

به عنوان مثال، اگر ذره‌ای در آغاز دروضع ترازمندی $x_0 = 0$ باشد و بر اثر یک نیروی رانشی سرعتی برابر v_0 پیدا کند، داریم $\alpha = 0$ و $A = v_0/\omega$. در این صورت جابجایی با رابطه $x = (v_0/\omega) \sin \omega t$ داده می‌شود. بنا به معادله (۱۱.۱۲) انرژی کل ذره برابر می‌شود با

$$E = \frac{1}{2} k \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

که برابر انرژی جنبشی اولیه ذره است.

از طرف دیگر، اگر ذره در فاصله x_0 از وضع ترازمندی قرار گیرد و سپس رها شود، $v_0 = 0$ خواهد بود. در این صورت، $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ یا $\alpha = \pi/2$ و $A = x_0$ است. بنا بر این جابجایی با رابطه $x = x_0 \cos \omega t$ بیان می‌شود. با استفاده از معادله (۱۱.۱۲)، انرژی کل ذره برابر می‌شود $E = k x_0^2/2$ که مساوی انرژی پتانسیل اولیه ذره می‌باشد. مثال ۴.۱۲. با استفاده از اصل بقای انرژی، یک رابطه کلی برای دوره حرکت نوسانی پیدا کنید.

حل: با برگشت به بحث بخش ۹.۸ در مورد حرکت مستقیم الخط بر اثر نیروهای پایستار، پیداست که باید از معادله (۳۴.۸)، یعنی

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{[(\gamma/m)(E - E_p(x))]} = t$$

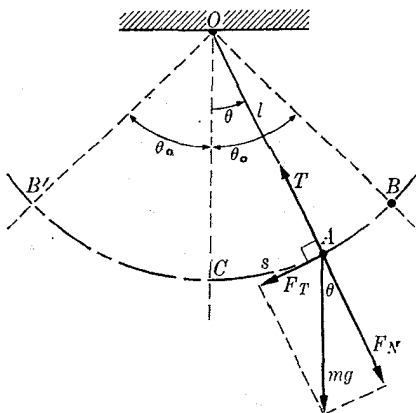
استفاده کنیم، که در آن $E_p(x)$ انرژی پتانسیل حرکت و E انرژی کل است. بنا به توضیحات بخش ۱۱.۸، ذره بین مکانهای داده شده با مقادیر x_1 و x_2 ، که از حل معادله $E_p(x) = E$ به دست می‌آیند (به شکل ۱۸.۸ مراجعه کنید)، نوسان می‌کند. اگر در معادله فوق x_0 را برابر x_1 و x را برابر x_2 قرار دهیم، زمان t مربوط به نصف نوسان و در نتیجه برابر نصف دوره می‌شود: $t = P/2$. بنا بر این معادله قبلی به معادله زیر منجر می‌شود:

$$P = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(\gamma/m)(E - E_p)}}. \quad (۱۳.۱۲)$$

رابطه (۱۳.۱۲) یک رابطه کلی است که دوره هر حرکت نوسانی را، چه هماهنگ ساده چه غیر آن، به دست می‌دهد. توجه کنید حتی اگر معادله حرکت حل نشده باشد تا x به صورت تابعی از t به دست آید، با دانستن انرژی پتانسیل $E(x)$ می‌توان دوره را حساب کرد. به دانشجو توصیه می‌کنیم با استفاده از $E_p(x) = kx^2/2$ (که مربوط به یک حرکت هماهنگ ساده است) ثابت کنند به ازای $x_1 = -A$ و $x_2 = +A$ داریم $P = \pi A \sqrt{2m/E}$ ، و بدین طریق معلوم می‌شود که این نتیجه با معادله (۱۱.۱۲) یکی است.

۵.۱۲ آونگ ساده

حرکت یک آونگ مثالی از حرکت هماهنگ ساده است. بنا به تعریف، یک آونگ ساده ذره‌ای است به جرم m که توسط نخ به جرم ناچیز و طول l از نقطه O آویزان است (شکل ۷.۱۲). اگر ذره را تا نقطه B ببرند، به گونه‌ای که نخ با راستای قائم OC زاویه θ بسازد، و سپس آن را رها کنند، آونگ بین دو نقطه متقارن B و B' نوسان می‌کند.



شکل ۷.۱۲. حرکت نوسانی یک آونگ

برای تعیین ماهیت نوسانها، باید معادله حرکت ذره را نوشت. ذره روی کمائی از دایره به شعاع $l = OA$ حرکت می‌کند. نیروهای وارد بر ذره عبارتند از وزن آن، mg ، و کشش نخ، T . بنا به شکل، مؤلفه مماسی نیروی برآیند برابر است با

$$F_T = -mg \sin \theta$$

که در آن علامت منفی نشان می‌دهد که سوی نیرو در سوی مخالف جابجایی $s = CA$ است. معادله حرکت مماسی ذره عبارت است از $F_T = ma_T$ ، و چون ذره روی دایره‌ای به شعاع l حرکت می‌کند، برای نمایش شتاب مماسی می‌توان معادله (۵۶.۵) را به کاربرد (که در آن به جای شعاع R باید l را قرارداد)، یعنی $a_T = l d^2\theta/dt^2$ ، به این ترتیب معادله

حرکت در راستای مماس بر دایره چنین می‌شود:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta \quad \text{یا} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (۱۴.۱۲)$$

این معادله از نوع معادله (۱۲.۱۲) نیست، زیرا جمله $\sin\theta$ در آن وجود دارد. با این همه اگر زاویه θ کوچک باشد، چیزی که برای دامنه‌های کوچک نوسان درست است، می‌توان با استفاده از معادله (پ. ۳۰)، نوشت $\sin\theta \approx \theta$ ، و آن را در معادله (۱۴.۱۲) قرار داد و معادله حرکت آونگ را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

این رابطه یک معادله دیفرانسیل مشابه با معادله (۱۲.۱۲) است که در آن θ به جای x قرار گرفته و این بار حرکت زاویه‌ای است نه خطی. بدین طریق، می‌توان نتیجه گرفت که با تقریب به کار رفته، حرکت آونگ، هماهنگ ساده است و در آن $\omega = g/l$ می‌باشد. زاویه θ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

در این صورت، با استفاده از معادله (۲.۱۲) یا $P = 2\pi/\omega$ ، رابطه دوره نوسان چنین نوشته می‌شود:

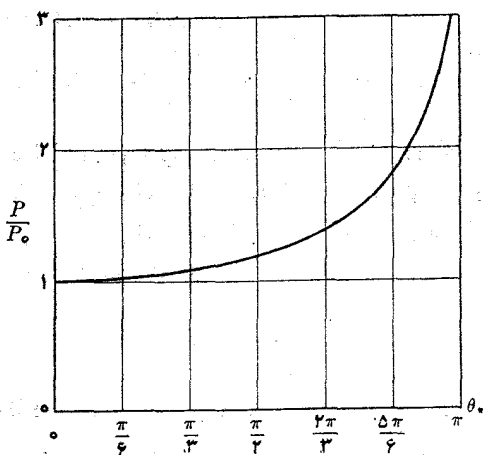
$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (۱۵.۱۲)$$

توجه داشته باشید که دوره آونگ مستقل از جرم آن است. برای دامنه‌های بزرگتر تقریب $\sin\theta \approx \theta$ معتبر نیست. در آن صورت دوره به دامنه θ_0 بستگی دارد. اگر بخواهیم فرمول کلی دوره را به دست آوریم، ابتدا انرژی پتانسیل را بر حسب زاویه می‌نویسیم (مثال ۷.۸)، و آن را در رابطه P که با معادله (۱۳.۱۲) داده شد قرار می‌دهیم. در اینجا از جزئیات محاسبه صرف نظر می‌کنیم ولی خاطر نشان می‌کنیم که نتیجه را می‌توان به صورت رشته زیر نوشت:

$$P = 2\pi \sqrt{l/g} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \theta_0 + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{1}{2} \theta_0 + \dots \right).$$

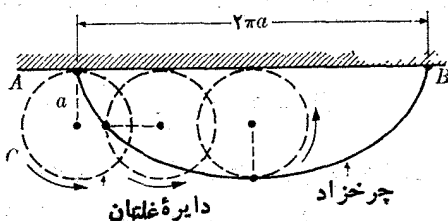
تغییرات P با دامنه θ_0 ، که بر حسب $2\pi \sqrt{l/g}$ ، $P_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$ (مربوط به دامنه‌های خیلی کوچک) بیان می‌شود، در شکل ۸.۱۲ نشان داده شده است. توجه کنید که دوره اختلاف قابل ملاحظه‌ای با P_0 ندارد مگر برای دامنه‌های خیلی بزرگ. برای دامنه‌های کوچک، کافی است اولین جمله تصحیحی اختیار شود و سپس حتی می‌توان به جای $\sin(\theta_0/2)$ مقدار $\theta_0/2$ را قرار داد، که به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$P = P_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) = 2\pi \sqrt{l/g} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) \quad (۱۶.۱۲)$$



شکل ۸.۱۲. تغییرات دورهٔ یک آونگ با دامنه

که در آن θ باید برحسب رادیان باشد. این تقریب برای اغلب کاربردهای عملی کافی است. در واقع، جملهٔ تصحیحی $\theta^2/16$ برای دامنه‌های کمتر از 23° حتی به ۱٪ نیز نمی‌رسد.

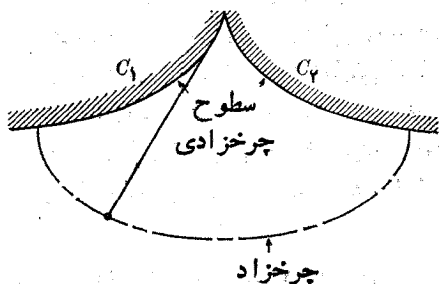


شکل ۹.۱۲. تعریف یک چرخزاد

با وجود این یک حالت خاص وجود دارد که در آن دورهٔ آونگ مستقل از دامنه می‌باشد، و آن آونگ چرخزادی^۱ است. چنانکه شکل ۹.۱۲ نشان می‌دهد چرخزاد منحنیی است که یک نقطه از کنار دیسکی که روی یک صفحه می‌غلطد رسم می‌کند. اگر در یک صفحهٔ قایم مسیری به شکل چرخزاد بسازیم و بگذاریم جرم m در طول آن بر اثر نیروی گرانی نوسان کند، دامنهٔ حرکت به نقطه‌ای که ذره رها می‌شود بستگی دارد، ولی دورهٔ آن همیشه برابر است با $P = 2\pi\sqrt{a/g}$ که در آن a شعاع دایره‌ای است که چرخزاد را ایجاد کرده است.

شکل ۱۰.۱۲ یک راه عملی برای ساختن آونگ چرخزادی را نشان می‌دهد. C_1 و C_2 دو صفحهٔ چرخزادی می‌باشند. در این صورت با یک استدلالات هندسی می‌توان ثابت کرد هنگامی که آونگ بین دو این صفحه آویزان شود انتهای آن نیز یک چرخزاد رسم می‌کند،

در نتیجه دوره نوسان مستقل از دامنه است.*



شکل ۱۰.۱۲. آونگ چرخزادی

مثال ۵.۱۲. کشش نخ یک آونگ را برحسب زاویه‌ای که این نخ با راستای قائم می‌سازد حساب کنید.

حل: برای محاسبه کشش T ، ابتدا نیروی مرکزگرای وارد بر ذره را پیدا می‌کنیم:

$$F_c = T - F_N = T - mg \cos \theta$$

زیرا بنا به شکل ۷.۱۲، F_N برابر است با $mg \cos \theta$. سپس مطابق رابطه (۲۸.۷) آن را با mv^2/l ، حاصل ضرب جرم در شتاب مرکزگرا (l شعاع است) برابر قرار می‌دهیم. در نتیجه به دست می‌آید

$$T - mg \cos \theta = mv^2/l.$$

سرعت، با استفاده از نتیجه مثال ۷.۸، برابر است با

$$v^2 = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

بنابراین

$$T = mg(3\cos \theta - 2\cos \theta_0).$$

این رابطه برای تمام دامنه‌ها صادق است، زیرا هیچگونه تقریبی روی زاویه θ انجام نگرفته است.

۶.۱۲ آونگ مرکب

آونگ مرکب (یا فیزیکی) جسم صلبی است که می‌تواند بر اثر نیروی گرانی آزادانه دور

* برای تفصیل بیشتر درباره چرخزاد، رجوع کنید به: توماس، جرج، ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۲.۱۲.

یک محور افقی نوسان کند. فرض کنیم ZZ' محور افقی و C مرکز جرم جسم باشد (شکل ۱۱.۱۲). وقتی که خط OC با راستای قائم زاویه θ بسازد، مؤلفه گشتاور نیروی وارد بر روی جسم در راستای Z برابر است با $\tau_z = -mgb \sin \theta$ که در آن b $OC =$ فاصله بین محور Z ها و مرکز جرم می باشد. اگر I نمایش گشتاور لختی جسم دور محور Z ها و $\alpha = d^2\theta/dt^2$ شتاب زاویه ای باشد، از معادله (۱۴.۱۰) یا $I\alpha = \tau_z$ به دست می آید $I(d^2\theta/dt^2) = -mgb \sin \theta$. به فرض اینکه دامنه کوچک باشد، باز هم می توان تقریب $\sin \theta \approx \theta$ را به کار برد، به گونه ای که معادله حرکت به صورت زیر نوشته می شود:

$$d^2\theta/dt^2 = -mgb\theta/I$$

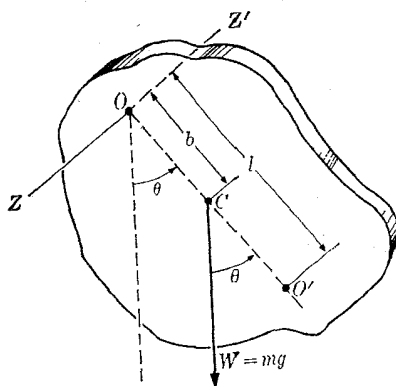
یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gb}{K^2} \theta = 0$$

در اینجا $I = mK^2$ را به کار برده ایم که در آن K شعاع ژیراسیون است که با رابطه (۱۰.۱۰) تعریف شد. مقایسه این رابطه با معادله (۱۲.۱۲) نشان می دهد که حرکت نوسانی زاویه ای یک حرکت هماهنگ ساده، با $\omega^2 = gb/K^2$ ، است. دوره نوسان برابر است با

$$P = 2\pi\sqrt{K^2/gb}. \quad (17.12)$$

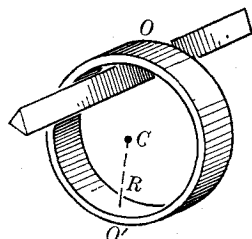
کمیت $l = K^2/b$ طول آونگ ساده هم ارز (همزمان) نامیده می شود، زیرا دوره



شکل ۱۱.۱۲. آونگ مرکب

یک آونگ ساده به طول K^2/b با دوره این آونگ مرکب برابر خواهد بود. دقت کنید تا وقتی شعاع ژیراسیون K و جای مرکز جرم آونگ که با b مشخص می شود ثابت باقی بماند، دوره آونگ مستقل از جرم و شکل هندسی آن می باشد.

مثال ۶.۱۲. حلقه‌ای به شعاع 0.10 m ، مطابق شکل ۱۲.۱۲ از تیغه‌ای آویزان است. دوره نوسان آن را حساب کنید.



شکل ۱۲.۱۲

حل: فرض کنیم R شعاع حلقه باشد. گشتاور لختی آن نسبت به محوری که از مرکز حلقه می‌گذرد برابر است با $I_C = mR^2$ (به جدول ۱۰.۱۰ مراجعه کنید). در این صورت اگر قضیه اشتاینر، یعنی معادله (۸.۱۰) را با $a = R$ به کار ببریم، گشتاور لختی نسبت به محوری که از نقطه آویز O می‌گذرد برابر می‌شود با

$$I = I_C + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

از اینجا شعاع ژیراسیون برابر $K^2 = 2R^2$ به دست می‌آید. در این مورد $b = R$ است. در نتیجه با استفاده از معادله (۱۷.۱۲) به دست می‌آید

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{2R^2}{gR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که طول آونگ ساده هم‌ارز برابر است با $OO' = 2R$ ، که مساوی قطر حلقه است. با وارد کردن مقادیر عددی $R = 0.10\text{ m}$ و $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$ ، به دست می‌آید $P = 0.88\text{ s}$.

مثال ۷.۱۲. کره‌ای به شعاع R به وسیله نخ‌ی از نقطه ثابتی آویزان است، به طوری که فاصله نقطه آویز تا مرکز کره برابر l می‌باشد. دوره آونگ را به دست آورید.

حل: اگر شعاع R در مقابل l کوچک نباشد، نمی‌توان آونگ را ساده در نظر گرفت، و باید رابطه‌هایی را که در این بخش مطالعه شدند به کار ببریم. از جدول ۱۰.۱۰ پیداست که گشتاور لختی یک کره نسبت به محوری که از مرکز آن می‌گذرد برابر است با $2mR^2/5$. بدین طریق، هنگامی که قضیه اشتاینر را با $a = l$ ، به کار ببریم گشتاور لختی نسبت به نقطه آویز برابر می‌شود با

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + ml^2 = m\left(l^2 + \frac{2}{5}R^2\right).$$

از اینجا شعاع ژیراسیون برابر $K^2 = l^2 + 2R^2/5 = l^2(1 + 2R^2/5l^2)$ به دست می‌آید. بدین طریق، با به کار بردن معادله (۱۷.۱۲) و با توجه به اینکه در این مورد $b = l$

است، داریم

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{I(1 + 0.4R^2/I^2)}{g}} = 2\pi \sqrt{I/g} \left(1 + 0.4 \frac{R^2}{I^2}\right)^{1/2}.$$

چون معمولاً R درمقابل I کوچک است، می‌توان به جای $(1 + 0.4R^2/I^2)^{1/2}$ ، با استفاده از تقریب دو جمله‌ای (پ.۲۸)، $1 + 0.2R^2/I^2$ را قرار داد. بنابراین داریم

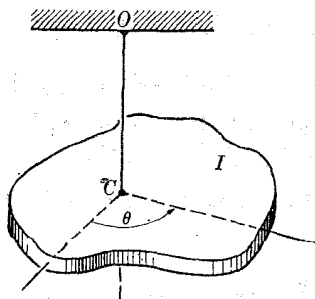
$$P = 2\pi \sqrt{I/g} \left(1 + 0.2 \frac{R^2}{I^2}\right).$$

جمله اول، دوره را در صورتی که از ابعاد کره صرف نظر کنیم به دست می‌دهد. به عنوان مثال، اگر $l = 1\text{m}$ و $R = 0.10\text{m}$ باشد، داریم $R^2/I^2 = 10^{-4}$ و جمله تصحیحی برابر می‌شود با 0.00002 . بدین طریق ابعاد معین آونگ، دوره آونگ را 0.0002% افزایش می‌دهد که در بیشتر موارد قابل اغماض است.

مثال ۸.۱۲. آونگ پیچشی^۱ را مطالعه کنید.

حل: آونگ پیچشی مثال دیگری از حرکت هماهنگ ساده است. این آونگ از جسمی تشکیل شده که از یک سیم یا رشته آویزان است (شکل ۱۳.۱۲)، به گونه‌ای که خط OC از مرکز جرم جسم می‌گذرد. اگر جسم به اندازه زاویه θ از وضع ترازمندی خود بچرخد، سیم می‌پیچد و یک گشتاور نیروی τ دور OC بر جسم اثر می‌دهد. این گشتاور با چرخش جسم مخالفت می‌کند و بزرگی آن با θ متناسب است، $\tau = -\kappa\theta$ ، که در آن κ ضریب پیچشی سیم است. اگر گشتاور لختی جسم دور محور OC را I بنامیم، با به کار بردن معادله (۱۴.۱۰) به ازای $\alpha = d^2\theta/dt^2$ عبارت می‌شود از

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \quad \text{یا} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0.$$



شکل ۱۳.۱۲. آونگ پیچشی. مرکز جرم در نقطه C است.

معادله دیفرانسیل (۱۲.۱۲) یک بار دیگر به دست می آید. بنا بر این حرکت جسم، هماهنگ ساده است با $\omega^2 = \kappa/I$ ؛ و دوره نوسان برابر است با

$$P = 2\pi\sqrt{I/\kappa} \quad (12.18)$$

این نتیجه بسیار مهم است، زیرا با آویزان کردن هر جسمی به یک سیم یا ضریب پیچشی معلوم و اندازه گیری P ، دوره نوسان، می توان گشتاور لختی جسم را به طور تجربی به دست آورد.

۲.۱۲ برهم نهش دو حرکت هماهنگ ساده: همراستا و هم بسامد

اکنون برهم نهش^۱ یا تداخل^۲ دو حرکت هماهنگ ساده را که موجب جابجایی ذره در طول یک خط مشترک می شوند در نظر می گیریم. ابتدا حالتی را مورد بررسی قرار می دهیم که در آن دو حرکت هم بسامد هستند (شکل ۱۴.۱۲). جابجایی ذره به وسیله هر یک از حرکت های هماهنگ ساده با روابط زیر بیان می شود:

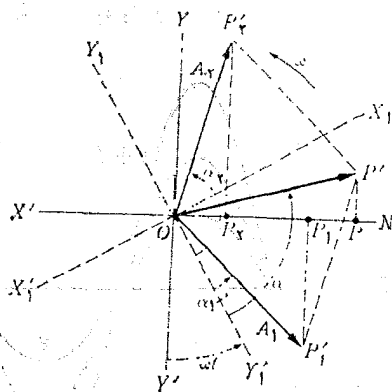
$$x_1 = OP_1 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

و

$$x_2 = OP_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

جابجایی برآیند ذره با رابطه زیر داده می شود:

$$x = OP = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$



شکل ۱۴.۱۲. ترکیب دو حرکت هماهنگ ساده با بسامدهای یکسان

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که x نیز مربوط به یک حرکت هماهنگ ساده با همان بسامد است. با پیدا کردن $\vec{OP}'$ جمع برداری دو بردار چرخان $\vec{OP}_1'$ و $\vec{OP}_2'$ ، ملاحظه می‌شود که تصویر $\vec{OP}'$ روی محور X ‌ها درست برابر مجموع تصویرهای $\vec{OP}_1'$ و $\vec{OP}_2'$ روی این محور (یعنی $x_1 + x_2$)، بنابراین برابر x است. همچنین چون زاویه بین $\vec{OP}_1'$ و $\vec{OP}_2'$ دارای مقدار ثابت $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ است، بردار $\vec{OP}'$ دارای بزرگی ثابت A است و دور نقطه O با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. بنابراین بردار چرخان $\vec{OP}'$ یک حرکت هماهنگ ساده با بسامد زاویه‌ای ω را ایجاد می‌کند، و برای $x = OP$ می‌توان نوشت

$$x = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (19.12)$$

دامنه A را با به‌کاربردن معادله (۳.۳) که بر آیند دو بردار را به دست می‌دهد، حساب می‌کنیم:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta}. \quad (20.12)$$

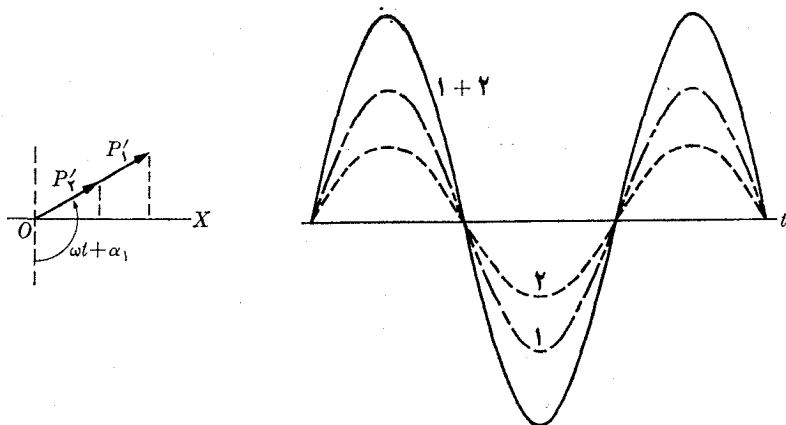
فاز اولیه α را می‌توان با تصویر سه بردار روی محورهای OX_1 و OY_1 که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخند و چارچوب مرجعی را تشکیل می‌دهند که $\vec{OP}_1'$ ، $\vec{OP}_2'$ و $\vec{OP}'$ نسبت به آن ساکن‌اند به دست آورد. در این صورت بنا به قانون جمع بردارها داریم

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2$$

و

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2$$

از تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر به دست می‌آید



شکل ۱۵.۱۲. ترکیب دو حرکت هماهنگ ساده همفاز

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (21.12)$$

اکنون چند مورد ویژه و مهم را در نظر می‌گیریم. اگر $\alpha_1 = \alpha_2$ باشد، داریم $\delta = 0$ و می‌گوییم دو حرکت هم‌فاز^۱ هستند. بردارهای چرخان آنها موازی اند، و از معادله‌های (20.12) و (21.12) به دست می‌آید

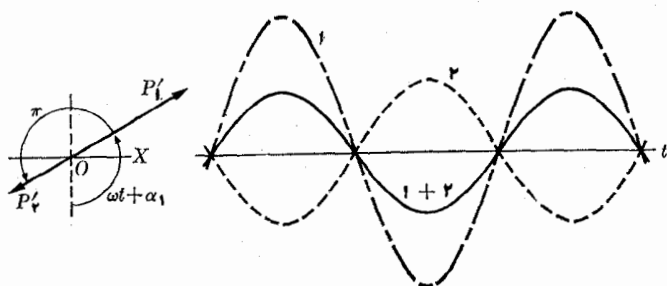
$$A = A_1 + A_2 \quad \text{و} \quad \alpha = \alpha_1 \quad (22.12)$$

در نتیجه، دو حرکت هماهنگ ساده تداخل و اثر هم را تقویت می‌کنند، زیرا دامنه‌ها با هم جمع می‌شوند (شکل 15.12).

اگر $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ باشد، در این صورت $\delta = \pi$ است و می‌گوییم دو حرکت هماهنگ ساده در تقابل^۲ هستند. بردارهای چرخان در دوسوی مخالف هم قرار دارند و اگر $A_1 > A_2$ باشد، از معادله‌های (20.12) و (21.12) به دست می‌آید

$$A = A_1 - A_2 \quad \text{و} \quad \alpha = \alpha_1 \quad (23.12)$$

دو حرکت تداخل و اثر یکدیگر را تضعیف می‌کنند، زیرا دامنه‌ها از هم کم می‌شوند (شکل 16.12). بویژه اگر $A_1 = A_2$ باشد، دو حرکت هماهنگ ساده اثر یکدیگر را کاملاً خنثی



شکل 16.12. ترکیب دو حرکت هماهنگ ساده متقابل

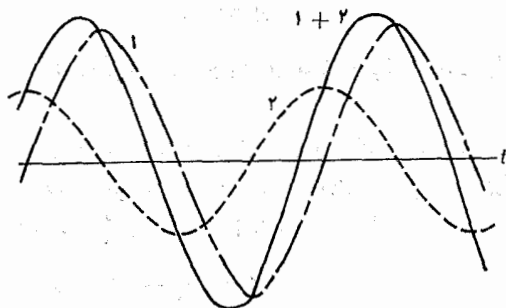
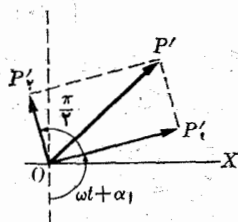
می‌کنند. (اگر $A_1 < A_2$ باشد چه اتفاق می‌افتد؟) اگر $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ باشد، داریم $\delta = \pi/2$ و گفته می‌شود دو حرکت هماهنگ ساده در تقبیع^۳ هستند. در این صورت با استفاده از معادله (20.12) به دست می‌آوریم

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (24.12)$$

با استفاده از معادله (21.12) دانشجو می‌تواند تحقیق کند که α از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = \alpha_1 + \operatorname{Arctg} \frac{A_2}{A_1} \quad (25.12)$$

در این حالت، دوبردار چرخان بریکدیگر عمودند. شکل ۱۷.۱۲ حالتی را نشان می‌دهد که در آن $A_1 = \sqrt{3} A_2$ است به گونه‌ای که $\alpha = \alpha_1 + \pi/6$ و $A = 2A_2$ می‌شود. به دانشجو توصیه می‌کنیم حالتی را که در آن $\alpha_2 = \alpha_1 + 3\pi/2$ است بررسی کند.



شکل ۱۷.۱۲. ترکیب دو حرکت هماهنگ ساده در تریج

مثال ۹.۱۲. به ذره‌ای همزمان دو حرکت هماهنگ ساده هم بسامد و هم راستا به معادله‌های $x_1 = 10 \sin(2t + \pi/4)$ و $x_2 = 6 \sin(2t + 2\pi/3)$ اثر می‌کند. حرکت برآیند را پیدا کنید.

حل: اختلاف فاز برابر است با $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi/3 - \pi/4 = 5\pi/12$ با $A_1 = 10$ و $A_2 = 6$ ، دامنه برآیند برابر می‌شود با

$$A = \sqrt{10^2 + 6^2 + 2 \times 10 \times 6 \times \cos(5\pi/12)} = 12.92$$

فاز اولیه با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \sin(\pi/4) + 6 \sin(2\pi/3)}{10 \cos(\pi/4) + 6 \cos(2\pi/3)} = 6.527$$

در نتیجه، $\alpha = 81.3^\circ = 1.42 \text{ rad}$. بنابراین حرکت برآیند با معادله زیر بیان می‌شود:

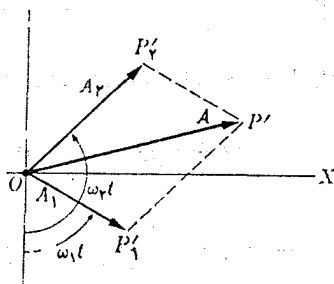
$$x = 12.92 \sin(2t + 1.42).$$

۸.۱۲. برهم‌نesh دو حرکت هماهنگ ساده: هم راستا و با بسامدهای مختلف

حالتی که در آن دو حرکت هماهنگ ساده تداخل‌کننده دارای راستای یکسان ولی بسامدهای مختلف باشند نیز مهم است. برای سهولت، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ باشد. در این صورت معادله‌های حرکت چنین نوشته می‌شوند: $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ و

در اینجا زاویه بین دو بردار چرخان $\vec{OP}'_1$ و $\vec{OP}'_2$ (شکل ۱۸.۱۲) برابر است با $\omega_1 t - \omega_2 t = (\omega_1 - \omega_2)t$ که مقدار آن ثابت نیست. بنابراین طول بردار برآیند $\vec{OP}'$ ثابت نیست و با سرعت زاویه‌ای ثابتی نمی‌چرخد. در نتیجه، حرکت برآیند $x = x_1 + x_2$ هماهنگ ساده نیست. با وجود این، چنانکه از شکل ۱۸.۱۲ پیداست، «دامنه» حرکت برابر است با

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \quad (26.12)$$



شکل ۱۸.۱۲. برهم‌نهی دو حرکت هماهنگ ساده با بسامد مختلف

و این دامنه بین دو مقدار $A = A_1 + A_2$ [هنگامی که $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$ است] و $A = |A_1 - A_2|$ [هنگامی که $(\omega_1 - \omega_2)t = (2n + 1)\pi$ است]، «نوسان» می‌کند. در این صورت می‌گوییم دامنه مدوله شده^۱ است. بسامد نوسانهای دامنه با رابطه زیر داده می‌شود:

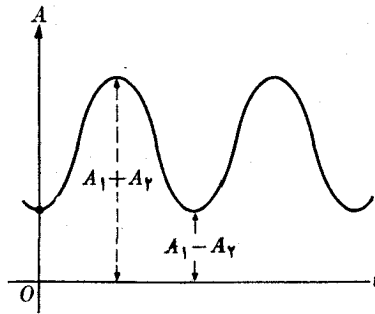
$$\nu = (\omega_1 - \omega_2)/2\pi = \nu_1 - \nu_2 \quad (27.12)$$

یعنی این بسامد برابر است با اختلاف بسامدهای دو حرکت تداخل‌کننده.

شکل ۱۹.۱۲ تغییرات A را با t نشان می‌دهد. به عنوان مثال، حالت شرح داده شده هنگامی به وجود می‌آید که دو دیاپازون با بسامدهای مختلف ولی نزدیک به هم، در یک زمان و در نزدیکی یکدیگر به ارتعاش درآیند. همچنانکه شکل ۱۹.۱۲ نشان می‌دهد، در شدت صوت افت و خیزهایی مشاهده می‌شود که ناشی از تغییرات دامنه است و ذنب^۲ نامیده می‌شوند.

یک وضع بسیار جالب هنگامی است که $A_1 = A_2$ باشد، یعنی دو دامنه برابر باشند. در این صورت با استفاده از معادله (۷.پ) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \\ &= 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t. \end{aligned} \quad (28.12)$$

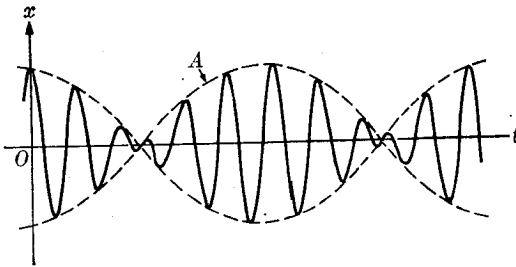


شکل ۱۹.۱۲. افت و خیز دامنه یا زنش

این رابطه نشان می‌دهد که حرکت نوسانی است و بسامد زاویه‌ای آن $(\omega_1 + \omega_2)/2$ می‌باشد و دامنه حرکت برابر است با

$$A = 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (29.12)$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً با قرار دادن $A_1 = A_2$ ، از معادله (۲۶.۱۲) به دست آورد. منحنی x بر حسب t در شکل ۲۰.۱۲ رسم شده است. در این شکل، منحنی خط چین، مدولاسیون دامنه را نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۱۲. زنش هنگامی که دو دامنه یکسانند

۹.۱۲ برهم‌نهی دو حرکت هماهنگ ساده: در راستاهای عمود برهم

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن ذره‌ای در یک صفحه به گونه‌ای حرکت می‌کند که مختصات x و y آن به صورت هماهنگ ساده نوسان می‌کنند. ابتدا حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که بسامد دو حرکت برابر است. اگر مبدأ زمان را به گونه‌ای انتخاب کنیم که فاز اولیه حرکت در راستای محور x ها برابر صفر باشد، برای x داریم

$$x = A \sin \omega t. \quad (30.12)$$

حرکت در راستای محور Y ها با معادله زیر بیان می شود:

$$y = B \sin(\omega t + \delta). \quad (۳۱.۱۲)$$

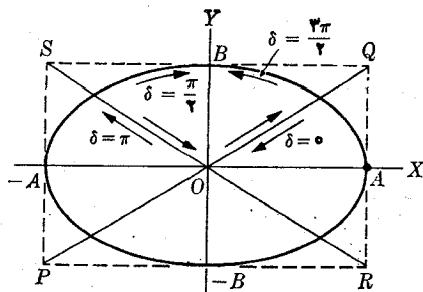
در اینجا δ اختلاف فاز بین نوسانهای x ها و y ها است. دامنه های A و B نیز مختلف فرض شده اند. روشن است که مسیر ذره با خطهای $x = \pm A$ و $y = \pm B$ محدود می شود.

اکنون چند حالت ویژه را مورد بررسی قرار می دهیم. اگر دو حرکت هم فاز باشند $\delta = 0$ و $y = B \sin \omega t$ است. در این صورت از ترکیب این رابطه با معادله (۳۰.۱۲) به دست می آید

$$y = \left(\frac{B}{A}\right)x.$$

این رابطه معادله خط راست PQ در شکل ۲۱.۱۲ می باشد و حرکت حاصل هماهنگ ساده و دامنه آن $\sqrt{A^2 + B^2}$ است، زیرا جابجایی در طول PQ برابر است با

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \omega t. \quad (۳۲.۱۲)$$



شکل ۲۱.۱۲. ترکیب دو حرکت هماهنگ ساده با بسامدهای برابر ولی در راستاهای عمود برهم. مسیر به اختلاف فاز بستگی دارد.

اگر دو حرکت در تقابل باشند، $\delta = \pi$ و $y = -B \sin \omega t$ خواهد بود. در این صورت با ترکیب آن با معادله (۳۰.۱۲) به دست می آید

$$y = -(B/A)x.$$

این رابطه معادله خط راست RS است. حرکت باز هم هماهنگ ساده، با دامنه $\sqrt{A^2 + B^2}$ است. در نتیجه، هنگامی که δ برابر صفر یا π است، می گوئیم تداخل دو حرکت هماهنگ ساده هم بسامد عمود برهم، موجب قطبش خطی^۱ می شود.

هنگامی که $\delta = \pi/2$ باشد، گفته می شود حرکت در طول محورهای X و Y در تربیع است، و داریم

$$y = B \sin(\omega t + \pi/2) = B \cos \omega t.$$

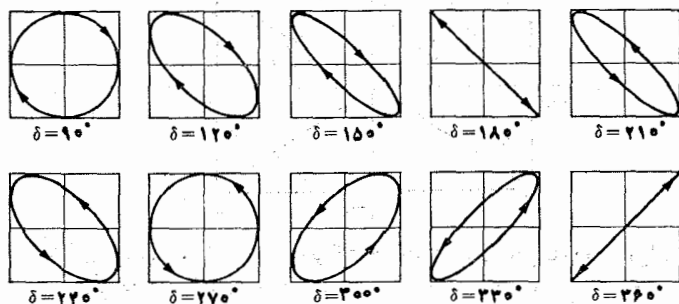
از ترکیب این رابطه با معادله (۳۰.۱۲) به دست می آید

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

این رابطه معادله یک بیضی است که در شکل ۲۱.۱۲ نشان داده شده است. بیضی در سوی ساعتگرد پیموده می شود. این امر را می توان با پیدا کردن سرعت در نقطه $x = +A$ ، جایی که سرعت موازی محور Y هاست تحقیق کرد. در این نقطه، بنا به معادله (۳۰.۱۲)، باید داشته باشیم $\sin \omega t = 1$. مؤلفه سرعت روی محور Y ها برابر است با

$$v_y = dy/dt = -\omega B \sin \omega t = -\omega B.$$

چون این سرعت منفی است ذره از نقطه A به سمت پایین می گذرد، که با سوی ساعتگرد تطبیق می کند. اگر δ برابر $3\pi/2$ یا $-\pi/2$ باشد، باز هم همین بیضی به دست می آید، ولی در این صورت حرکت در سوی پاد ساعتگرد می باشد (آیا دانشجو قادر است این موضوع را تحقیق کند؟). بدین طریق می توان گفت هنگامی که اختلاف فاز δ برابر $\pm \pi/2$ است، تداخل دو حرکت هماهنگ ساده هم بسامد موجب قطبش بیضی می شود و محورهای بیضی با راستای حرکتها موازیند.



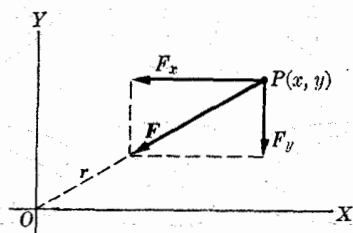
شکل ۲۲.۱۲. مسیرهای مربوط به چند اختلاف فاز خاص

هنگامی که $A = B$ باشد، بیضی به دایره تبدیل می شود و یک قطبش دایره ای به دست می آید. به ازای یک مقدار اختیاری دیگر برای اختلاف فاز δ ، مسیر باز هم بیضی است، ولی محورهای این بیضی نسبت به محورهای مختصات مقداری چرخیده اند. شکل ۲۲.۱۲ مسیرهای مربوط به چند اختلاف فاز خاص را نشان می دهد.

بنا به بخش ۳۰.۱۲، حرکت هایی که با معادله های (۳۰.۱۲) و (۳۱.۱۲) بیان شده اند، در راستای محورهای X و Y به نیروهایی برابر با $F_x = -kx$ و $F_y = -ky$ نیاز دارند. بنابراین نیروی برآیند وارد بر ذره عبارت است از

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}_x F_x + \mathbf{u}_y F_y = -k(\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y) = -k\mathbf{r} \quad (33.12)$$

که در آن $\vec{OP} = \vec{r}$ (شکل ۲۳.۱۲) بردار مکان ذره است. در نتیجه، حرکتی که از نقطه نظر سینماتیک در این فصل توصیف کردیم به وسیله یک نیروی مرکزی جاذبه و متناسب با جابجایی ایجاد می شود.

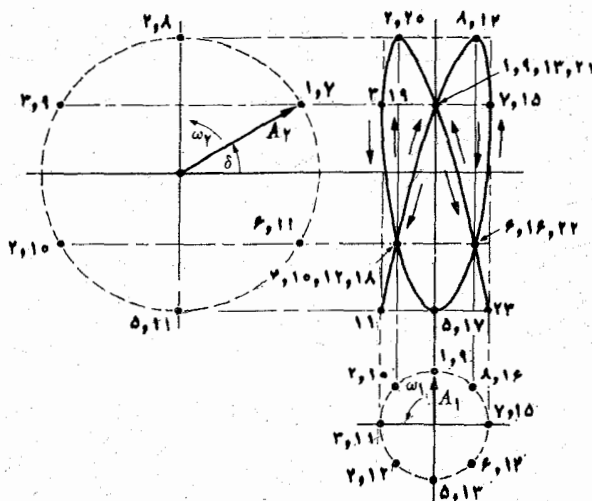


شکل ۲۳.۱۲. نیروی جاذبه متناسب با جابجایی

نیروی داده شده با معادله (۳۳.۱۲) همیشه یک حرکت در صفحه به وجود می آورد، حتی اگر ذره بتواند در فضا حرکت کند، زیرا نیروی مرکزی است و مسیر حاصل از چنین نیرویی در اغلب موارد بیضی می باشد. انرژی پتانسیل مربوط به نیروی معادله (۳۳.۱۲) برابر است با (به مثال ۸.۸ مراجعه کنید)

$$E_p = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} kr^2. \quad (34.12)$$

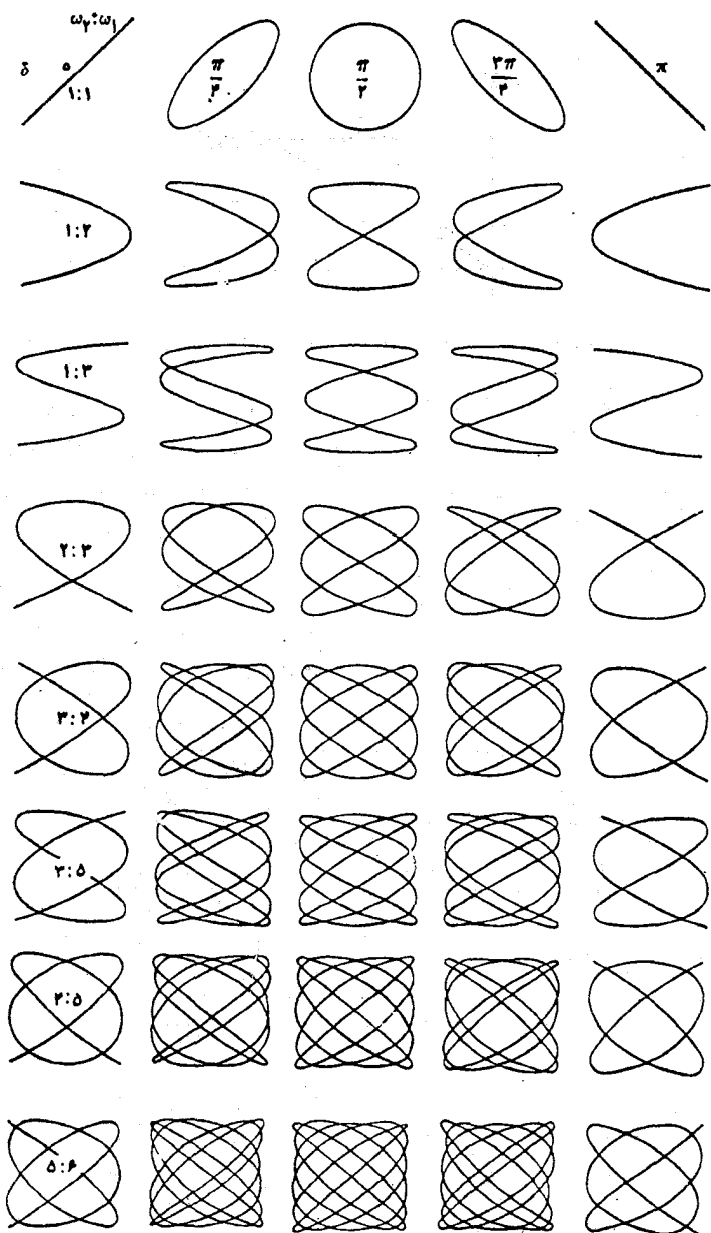
تداخل دو حرکت نوسانی عمود بر هم ولی با بسامدهای مختلف، وضعیت جالب دیگری



شکل ۲۴.۱۲. شکل لیسازو به ازای $\omega_y/\omega_x = 4/3$ و اختلاف فاز $\delta = \pi/6$

را تشکیل می‌دهد. داریم

$$x = A_1 \sin \omega_1 t \quad \text{و} \quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta). \quad (۳۵.۱۲)$$

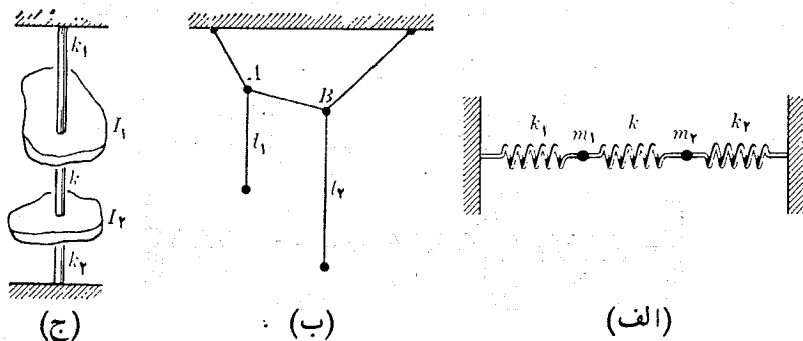


شکل ۲۵.۱۲. شکلهای لیسازو. این شکلهای به نسبت ω_2/ω_1 و اختلاف فاز بستگی دارند.

شکل ۲۴.۱۲ حالتی را نشان می‌دهد که در آن $\omega_1 = 3\omega_2/4$ و $\delta = \pi/6$ است. مسیر برآیند با خط پر رسم شده است. چنین مسیری به نسبت ω_2/ω_1 و اختلاف فاز δ بستگی دارد. این مسیرها شکل‌های لیسازو نامیده می‌شود و برای چند مقدار مختلف اختلاف فاز و نسبت‌های گوناگون ω_2/ω_1 ، در شکل ۲۵.۱۲ رسم شده‌اند.

۱۰.۱۲ نوسانگرهای جفت شده

یکی از مواردی که بسیاری اوقات با آن برخورد می‌شود دونوسانگر جفت شده^۲ است. در شکل ۲۶.۱۲ سه وضع ممکن نشان داده شده‌اند. در (الف) دو جرم m_1 و m_2 که به دو فنر k_1 و k_2 متصل‌اند با فنر k به یکدیگر جفت شده‌اند، به گونه‌ای که حرکت‌های m_1 و m_2 دیگر مستقل نیستند. در (ب) دو آونگ توسط نخ AB به هم جفت شده‌اند. در (ج) اجسام I_1 و I_2 متصل به میله‌های k_1 و k_2 ، با میله k به یکدیگر جفت شده‌اند و یک آونگ پیچشی جفت شده را تشکیل داده‌اند. در بخش ۱۱.۱۷ (جلد دوم کتاب) هنگام مطالعه مدارهای الکتریکی جفت شده با وضع مشابهی برخورد خواهیم داشت. اثر خالص جفت شدن دو نوسانگر را می‌توان به صورت تبادل انرژی بین آن دو توصیف کرد.



شکل ۲۶.۱۲. چند نوسانگر جفت شده

جهت بحث مسئله از دیدگاه دینامیکی، باید معادله حرکت هر نوسانگر را نوشت. حالت ویژه‌ای را که در آن دو جرم m_1 و m_2 به فنرهای اتصال دارند، در نظر بگیرید (شکل ۲۷.۱۲). جابجایی m_1 را از وضع ترازمندی‌شان، از چپ به راست مثبت می‌گیریم و با x_1 و x_2 نشان می‌دهیم. در این صورت فنر k_1 نیرویی برابر $-k_1 x_1$ روی m_1 و به همین طریق، فنر k_2 نیرویی برابر $-k_2 x_2$ روی m_2 وارد می‌کند. به فنر k جابجایی $x_1 - x_2$ تحمیل می‌شود و در نتیجه، موقعی که این فنر سعی می‌کند تا طول اولیه را خود به دست آورد نیروی وارد بر m_1 برابر $k(x_2 - x_1)$ و بر m_2 برابر $k(x_1 - x_2)$ است. بنابراین، معادله حرکت هر ذره [با استفاده از معادله (۱۵.۷)]، یعنی $m(d^2x/dt^2) = F$

عبارت است از

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1)$$

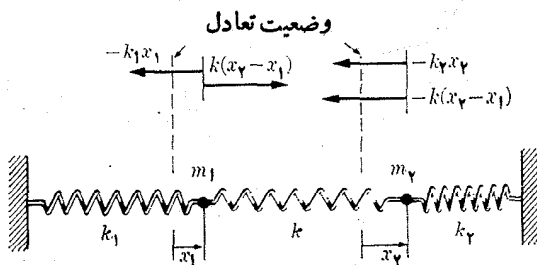
و

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1).$$

با ترکیب جمله‌های مشابه، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 &= \frac{k}{m_1} x_2 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k_2 + k}{m_2} x_2 &= \frac{k}{m_2} x_1 \end{aligned} \quad (۳۶.۱۲)$$

جمله‌های سمت چپ این معادله‌ها شباهت زیادی به معادله (۱۲.۱۲) دارند، به استثنای اینکه ثابت‌کشسانی برای ذره‌ها با $k_1 + k$ و $k_2 + k$ عوض شده است؛ و بنا به معادله (۷.۱۲)، این امر هم‌ارز است با تغییری در بسامد نوسانگرها نسبت به بسامدهای خاصشان هنگامی که جفت شده نیستند. یک اختلاف دیگر نیز بین معادله‌های (۳۶.۱۲) و (۱۲.۱۲) وجود دارد،



شکل ۲۷.۱۲. نوسانگرهای جفت شده

و آن اینکه درست‌تر است به جای صفر، جمله‌ای است که به نوسانگر دیگر مربوط می‌شود. این جمله را می‌توان جمله جفت‌شدگی^۱ نامید. به جای کوشش جهت یافتن پاسخ عمومی معادله (۳۶.۱۲)، نتایج اساسی آن را برای حالت ویژه‌ای که دو نوسانگر مشابه باشند یعنی $m_1 = m_2$ و $k_1 = k_2$ باشد، ذکر می‌کنیم. این حالت، هرچند خیلی ساده است ولی کلیه خصوصیات حالت عمومی در بردارد. پس، معادله‌های (۳۶.۱۲) به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 = \frac{k}{m_1} x_2, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_2 = \frac{k}{m_1} x_1 \quad (۳۷.۱۲)$$

می‌توان ثابت کرد که حرکت عمومی دو نوسانگر جفت شده را که با معادله‌های (۳۷.۱۲)

نمایش داده می‌شوند، می‌توان ترکیب دو مد بهنجار را نوسان در نظر گرفت. در یکی از این مدها، دو نوسانگر همفاز و دامنه‌های آنها برابرند. یعنی داریم

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad \text{و} \quad x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (38.12)$$

که در آنها

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1} \quad (39.12)$$

به‌گفته دیگر، بسامد نوسانگرهای جفت شده برابر است با بسامد نوسان هر جرم، هرگاه این جرم‌ها جفت شده نبوده‌اند. این موضوع با سانی قابل درک است، زیرا همفاز بودن دو نوسانگر و داشتن دامنه‌های یکسان موجب می‌شود به‌قدر مرکزی کششی وارد نشود، در نتیجه این‌قدر نیز نیرویی روی هیچ‌کدام از جرم‌ها وارد نمی‌کند، و جابجایی این دو جرم به‌گونه‌ای صورت می‌گیرد که گویی جفت شده نیستند.

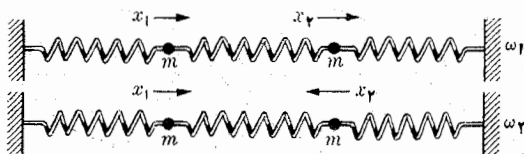
در دومین مد بهنجار، دو نوسانگر با دامنه یکسان در سوی مخالف هم حرکت می‌کنند؛ یعنی

$$x_1 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad \text{و} \quad x_2 = -A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (40.12)$$

که در آن

$$\omega_2 = \sqrt{(k_1 + 2k)/m_1} \quad (41.12)$$

در نتیجه بسامد جفت شدگی از بسامد بدون جفت شدگی بزرگتر است. این امر نیز با سانی قابل درک است، زیرا اکنون قدر مرکزی منبسط و منقبض می‌شود و بدین طریق ثابت کشسانی برای هر نوسانگر افزایش پیدا می‌کند. این دو مد بهنجار در شکل ۲۸.۱۲ نشان داده شده‌اند. مدهای بهنجار (۳۸.۱۲) و (۴۰.۱۲) مربوط به وضعی هستند که در آن جرم‌ها با اختلاف فاز ثابتی حرکت می‌کنند، که در مد (۳۸.۱۲) برابر صفر و در مد (۴۰.۱۲) برابر π است. دو جرم همزمان از وضع ترازمندی می‌گذرند و همزمان به بیشینه جابجایی می‌رسند.



شکل ۲۸.۱۲. ارتعاشهای بهنجار دو نوسانگر جفت شده یکسان

پاسخ عمومی معادله‌های (۳۷.۱۲) شامل یک ترکیب خطی از دو مد بهنجار نوسان است. یعنی داریم

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (42.12)$$

و

$$x_p = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_p \sin(\omega_p t + \alpha_p). \quad (۴۳.۱۲)$$

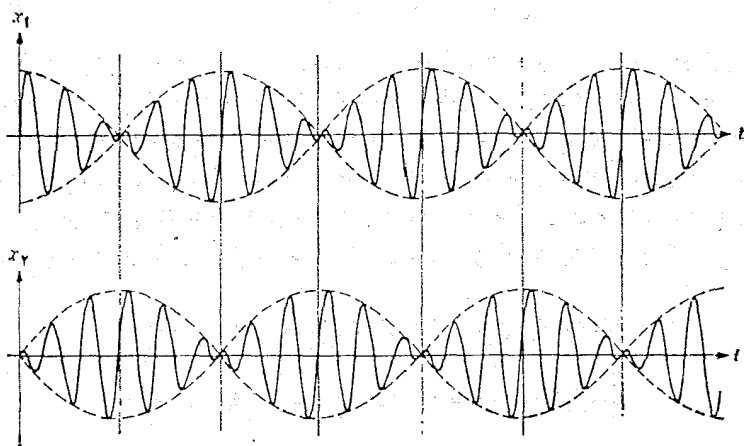
این امر را که این دو معادله پاسخ عمومی معادله‌های (۳۷.۱۲) می‌باشند از اینجا می‌توان دریافت که دارای چهار ثابت اختیاری A_1 ، α_1 ، A_p و α_p هستند، وضعی که مربوط به مجموعه‌ای از دو معادله دیفرانسیل جفت شده مرتبه دوم است. این معادله‌ها نشان می‌دهند که x_1 و x_p بر آینه‌های تداخل دو حرکت هماهنگ ساده همراستا، ولی با بسامد و فاز مختلف هستند، وضعی که قبلاً در بخش ۸.۱۲ مورد گفتگو قرار گرفت. بنا براین، آنچه که در آنجا توضیح داده شد در این مورد نیز به کار می‌رود.

برای اینکه درک فیزیکی بهتری از این مسئله به دست آوریم، حالت ویژه‌ای را که در آن دامنه‌ها برابر، $A_1 = A_p$ ، و فازهای اولیه مساوی صفر باشند ($\alpha_1 = \alpha_p = 0$) در نظر می‌گیریم. بنا براین با استفاده از معادله (پ. ۷) داریم

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin \omega_1 t + A_1 \sin \omega_p t = A_1 (\sin \omega_1 t + \sin \omega_p t) \\ &= \{2A_1 \cos [(\omega_1 - \omega_p)t/2]\} \sin [(\omega_1 + \omega_p)t/2] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} x_p &= A_1 \sin \omega_1 t - A_1 \sin \omega_p t = A_1 (\sin \omega_1 t - \sin \omega_p t) \\ &= \{2A_1 \sin [(\omega_1 - \omega_p)t/2]\} \cos [(\omega_1 + \omega_p)t/2]. \end{aligned}$$



شکل ۲۹.۱۲. نوسانگرهای جفت شده یکسان با دامنه‌های برابر

با مقایسه این رابطه‌ها با معادله (۲۹.۱۲)، مشاهده می‌شود که دامنه مدولاسیون x_1 برابر $2A \cos [(\omega_1 - \omega_p)t/2]$ است، در صورتی که دامنه مدولاسیون x_p برابر $2A \sin [(\omega_1 - \omega_p)t/2] = 2A \cos [(\omega_1 - \omega_p)t/2 - \pi/2]$ است. می‌بینیم که دو دامنه مدولاسیون دارای اختلاف فاز $\pi/2$ ، یعنی ربع دوره مدولاسیون هستند. شکل ۲۹.۱۲ تغییرات x_1 و x_p را بر حسب t نمایش می‌دهد. به سبب اختلاف فاز بین دو دامنه مدولاسیون،

تبادل انرژی بین دو نوسانگر وجود دارد. در مدت ربع دوره مدولاسیون، دامنه مدولاسیون یکی از نوسانگرها کاهش می یابد و دامنه دیگری افزایش پیدا می کند و موجب انتقال انرژی از نوسانگر اولی به نوسانگر دومی می شود. در مدت ربع دوره بعدی، وضع وارونه می شود و تبادل انرژی در سوی مخالف صورت می گیرد. این فرآیند دائماً تکرار می شود. با استفاده از آونگ جفت شده شکل ۲۶.۱۲ (ب)، می توان بسادگی این پدیده را به طور تجربی مشاهده کرد.

توجه به انرژی کل دستگاه نیز جالب است. انرژی جنبشی کل برابر است با $E_k = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$. برای به دست آوردن انرژی پتانسیل، معادله (۱۵.۱۲) را برای هر فنر به کار می بریم که به $E_p = k_1 x_1^2/2 + k_2 x_2^2/2 + k(x_1 - x_2)/2$ منجر می شود، زیرا x_1 ، x_2 و $x_1 - x_2$ تغییر طول فنرها هستند، یا

$$E_p = \frac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2 + \frac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2 - kx_1x_2$$

پس انرژی کل برابر است با

$$E = E_k + E_p = \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} (k_1 + k)x_1^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} (k_2 + k)x_2^2 \right] - kx_1x_2 \quad (۲۴.۱۲)$$

کروشه اول تنها به x_1 بستگی دارد و می توان آن را انرژی m_1 نامید؛ کروشه دوم مربوط به انرژی m_2 است. ولی جمله آخر شامل x_1 و x_2 است و آن را انرژی جفت شدگی یا انرژی برهم کنش می نامند. این جمله است که تبادل انرژی بین دو نوسانگر را توصیف می کند. در غیاب این جمله، انرژی هر نوسانگر ثابت است. هنگامی که جفت شدگی وجود دارد، انرژی کل است که ثابت می ماند. این یک نتیجه کلی است، و چنانکه در فصل ۹ دیدیم، هر گاه که برهم کنشی بین دو دستگاه صورت بگیرد که موجب تبادل انرژی شود، انرژی کل دستگاه به صورت زیر نوشته می شود:

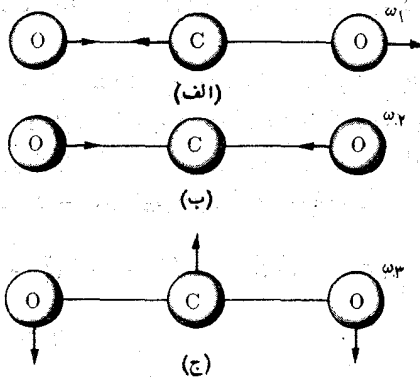
$$E = (E_k + E_p)_1 + (E_k + E_p)_2 + (E_p)_{12} \quad (۲۵.۱۲)$$

در این رابطه جمله آخر معرف برهم کنش است.

چنانکه در بالا متذکر شدیم، نوسانگرهای جفت شده در بسیاری از وضعیتهای فیزیکی یافت می شوند. یکی از موارد بسیار مهم، ارتعاش اتمها در یک مولکول است. مولکول یک ساختار سخت نیست؛ اتمها حول وضع ترازمندی خود در نوسانند. ولی ارتعاش هر اتم روی برهم کنش آن با اتمهای دیگر تأثیر می گذارد و در نتیجه یک دستگاه نوسانگرهای جفت شده تشکیل می شود.

به عنوان مثال، یک مولکول خطی سه اتمی مانند CO_2 را در نظر می گیریم. همچنانکه شکل ۳۵.۱۲ نشان می دهد، آرایش این مولکول عبارت است از $\text{O}=\text{C}=\text{O}$ ، که شبیه نوسانگرهای شکل ۲۷.۱۲ می باشد. حرکت نسبی سه اتم را می توان بر حسب نوسانهای

بهنجار توصیف کرد. در شکل ۳۰.۱۲ (الف)، اتمهای اکسیژن به طور همگاز نوسان می‌کنند و اتم کربن در سوی عکس حرکت می‌کند تا جای مرکز جرم محفوظ بماند. این مد متناظر با نوسان ω_1 در شکل ۲۸.۱۲ است. در شکل ۳۰.۱۲ (ب)، دو اتم اکسیژن، نسبت به اتم کربن که در مرکز جرم ثابت باقی می‌ماند در دوسوی مخالف حرکت می‌کنند. این مد به نوسان ω_2

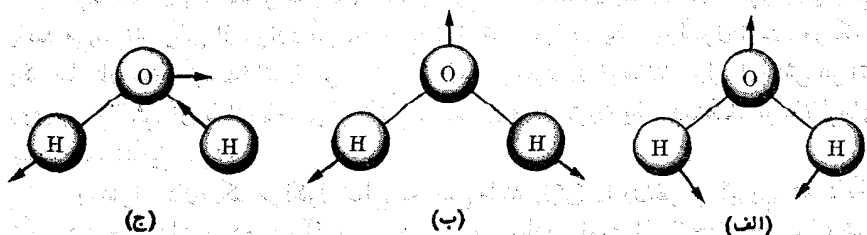


شکل ۳۰.۱۲. نوسانهای بهنجار مولکول CO_2

در شکل ۲۸.۱۲ مربوط می‌شود. وضع شکل ۳۰.۱۲ (ج) قبلاً مورد بررسی قرار نگرفته است و به حرکتی با بسامد زاویه‌ای ω در جهت عمود بر خط واصل اتمها مربوط می‌شود و موجب خمیدگی مولکول می‌شود. برای مولکول CO_2 ، مقدار این سه بسامد زاویه‌ای برابرند با

$$\omega_1 = 4.7423 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 2.529 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}, \\
 \omega_3 = 1.9261 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

اگر مولکول خطی نباشد یا بیش از سه اتم داشته باشد، تجزیه و تحلیل نوسانهای بهنجار آن پیچیده‌تر می‌شود، ولی در اساس یکسان است. به عنوان مثال، برای مولکول آب H_2O ، که در آن اتم اکسیژن در رأس یک زاویه 105° و هریک از اتمهای هیدروژن روی یک ضلع قرار دارند، ارتعاشهای بهنجار در شکل ۳۱.۱۲ نشان داده شده‌اند. بسامد زاویه‌ای این نوسانها عبارتند از $3.017 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ، $6.908 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ و $7.104 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

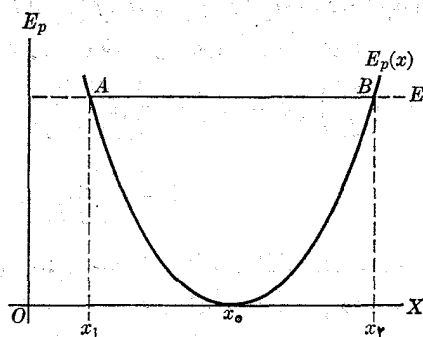


شکل ۳۱.۱۲. نوسانهای بهنجار مولکول H_2O

۱۱.۱۲ نوسانهای ناهماهنگ

وقتی که x از مبدأ O اندازه گیری شود حرکت هماهنگ ساده از نیرویی برابر با $F = -kx$ که مربوط به یک انرژی پتانسیل $E_p = kx^2/2$ است به وجود می آید. هنگامی که جای ترازمندی به جای مبدأ، مانند شکل ۳۲.۱۲ در x_0 باشد، باید نوشت

$$E_p = \frac{1}{2} k(x - x_0)^2.$$

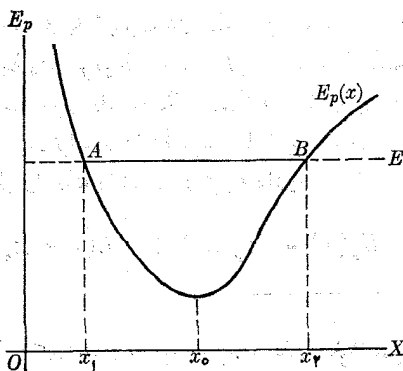


شکل ۳۲.۱۲. نوسانگر هماهنگ که جای ترازمندی آن در x_0 است

منحنی نمایش E_p یک سهمی است که رأس آن در نقطه x_0 است. اگر انرژی کل، E_p را در نقطه‌های A و B قطع کند، ذره بین نقاط x_1 و x_2 که نسبت به x_0 تقارن دارند، نوسان می‌کند. با توجه به اینکه

$$\frac{dE_p}{dx} = k(x - x_0) \text{ و } \frac{d^2 E_p}{dx^2} = k$$

است، برای بسامد زاویه‌ای می‌توان نوشت



شکل ۳۳.۱۲. نوسانگر ناهماهنگ که جای ترازمندی آن در x_0 است

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(d^2 E_p / dx^2) / m}. \quad (۴۶.۱۲)$$

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که منحنی نمایش انرژی پتانسیل سهمی نیست، ولی کمینهٔ کاملاً معینی دارد (شکل ۳۳.۱۲). این وضع در بسیاری موارد در دستگاههای فیزیکی پیش می‌آید و موجب یک حرکت نوسانی ناهماهنگ^۱ می‌شود. اگر انرژی کل برابر E باشد، ذره بین دو نقطهٔ x_1 و x_2 که معمولاً نسبت به نقطهٔ ترازمندی x متقارن نیستند نوسان می‌کند. در این صورت بسامد نوسانها به انرژی بستگی دارد. برای برآورد بسامد، به شیوهٔ زیر عمل می‌کنیم: با داشتن تابعی مانند $f(x)$ ، قضیهٔ تیلور* [به معادلهٔ (پ. ۳۱) مراجعه کنید] امکان می‌دهد این تابع را به صورت یک سری توان^۲ بسط دهیم:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \dots$$

در اینجا شاخص صفر بدین معنی است که مشتقها به ازای $x = x_0$ محاسبه می‌شوند. با استفاده از این قضیه در مورد $E_p(x)$ ، و با توجه به اینکه به ازای $x = x_0$ داریم $(dE_p/dx)_0 = 0$ [زیرا E_p در x_0 کمینه است] به دست می‌آید

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 E_p}{dx^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \dots \\ &= E_p(x_0) + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} k' (x - x_0)^3 + \dots \quad (۴۷.۱۲) \end{aligned}$$

در این رابطه به جای $(d^2 E_p / dx^2)_0$ و $(d^3 E_p / dx^3)_0$ ، و غیره، به ترتیب k ، k' و ... را قرار داده‌ایم.

جملهٔ اول ثابت است و به تغییری در صفر انرژی پتانسیل مربوط می‌شود. جملهٔ دوم چیزی جز یک جملهٔ درجهٔ دوم مربوط به یک نوسانگر هماهنگ با $k = (d^2 E_p / dx^2)_0$ نیست. جمله‌های بعدی پاسخگوی ناهماهنگی هستند و آنها را جمله‌های ناهماهنگی می‌نامند. اگر انرژی خیلی زیاد نباشد، دامنهٔ نوسانها کوچک می‌شوند و با تقریب قابل قبولی می‌توان تنها دو جملهٔ اول را نگه داشت؛ در نتیجه داریم

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2.$$

1. anharmonic

☆ Taylor's theorem. ر. ک. توماس، جورج، ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، ترجمهٔ علی اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۴.۱۸.

2. power series

بدین طریق حرکت عملاً هماهنگ ساده و دارای بسامد ارتعاشی با مقدار تقریبی زیرمی باشد:

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(d^2 E_p / dx^2)_0} / m. \quad (48.12)$$

این تقریب در بسیاری از موارد قابل قبول است. ولی در انرژیهای بالا، این مقدار ω با اندازه واقعی بسامد خیلی اختلاف دارد و دیگر حرکت هماهنگ ساده، تقریب مناسبی نیست. در این صورت باید اثر جمله‌های ناهماهنگی را نیز به حساب آورد.

نیروی که بر ذره مربوط به انرژی پتانسیل داده شده با معادله (47.12) وارد می‌شود برابر است با

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x - x_0) - \frac{1}{2}k'(x - x_0)^2 - \dots \quad (49.12)$$

اولین جمله، نیروی هماهنگ ساده است و بقیه، جمله‌های ناهماهنگی را تشکیل می‌دهند.

مثال ۱۵۰۱۲. بسامد نوسانهای مربوط به پتانسیل بین مولکولی داده شده در مثال ۱۱۰۸ را حساب کنید.

حل: پتانسیل بین مولکولی برابر است با

$$E_p = -E_{p,0} \left[2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} \right]$$

که در آن r_0 فاصله بین مولکولها در وضع ترازمندی است. بنابراین داریم

$$\frac{d^2 E_p}{dr^2} = -E_{p,0} \left(84 \frac{r_0^6}{r^8} - 156 \frac{r_0^{12}}{r^{14}} \right).$$

با قرار دادن $r = r_0$ ، به دست می‌آید

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dr^2} \right)_{r_0} = 72 \frac{E_{p,0}}{r_0^2}.$$

در نتیجه، با به کار بردن معادله (48.12)، بسامد نوسانها را تقریباً $\omega = \sqrt{72 E_{p,0} / m r_0^2}$ به دست می‌آوریم.

در این فرمول m جرم کاهیده است، زیرا در اینجا از حرکت نسبی دو ذره گفتگو می‌شود. اگر r_0 را مستقلاً حساب کنیم و ω را به طور تجربی به دست آوریم، می‌توانیم $E_{p,0}$ ، قدرت برهم‌کنش مولکولی را تعیین کنیم. برای حل این مسئله فرض کردیم که نوسانگر خطی است، از این رو پتانسیل گریز از مرکز (بخش ۱۵۰۸) در بحث وارد نشد.

۱۲۰۱۲ نوسانهای میرا

در بخشهای قبل، بحث حرکت هماهنگ ساده نشان داد که دامنه نوسان ثابت است. ولی

تجربه نشان می‌دهد در یک جسم مرتعش مانند یک فنر یا یک آونگ، دامنه حرکت نوسان بتدریج کاهش می‌یابد و بالاخره حرکت متوقف می‌شود. به گفته دیگر، حرکت میراست. در توضیح دینامیکی میرایی، می‌توان فرض کرد که علاوه بر نیروی کشان $F = -kx$ نیروی دیگری نیز در سوی مخالف سرعت اثر می‌کند. در بخش ۱۰.۷، نیرویی از این گونه را که از وشکسانی محیطی که حرکت در آن صورت می‌گیرد ناشی می‌شد، بررسی کردیم. در پی همان منطق، این نیرو را به صورت $F' = -\lambda v$ می‌نویسیم، که در آن λ یک ثابت و v سرعت متحرک است. علامت منفی روشن می‌کند که F' در سوی مخالف v وارد می‌شود. توجه داشته باشید که در واقع نیروهای میرایی دیگری نیز — متناسب با توانهای بالاتر v ، یا با رابطه‌های فیزیکی دیگر — می‌توانند وجود داشته باشند. نیروی برآیند وارد بر ذره مساوی $F + F'$ است و معادله حرکت عبارت می‌شود از

$$ma = -kx - \lambda v \quad (50.12)$$

یا، با یادآوری اینکه $v = dx/dt$ و $a = d^2x/dt^2$ است، داریم

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (51.12)$$

این معادله معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (52.12)$$

که در آن $\omega_0^2 = k/m$ و $2\gamma = \lambda/m$ بسامد زاویه‌ای طبیعی بدون میرایی است. این رابطه یک معادله دیفرانسیل است که با معادله (۱۲.۱۲) برای حرکت هماهنگ ساده تفاوت دارد، به دلیل اینکه شامل یک جمله اضافی $2\gamma dx/dt$ است. با استفاده از روشهای حل معادلات دیفرانسیل که در دروس ریاضی تدریس می‌شود می‌توان پاسخ این معادله را به دست آورد*. به جای کوشش در حل این معادله با روشهای کلاسیک، پاسخ آن را تنها برای یک میرایی ضعیف، موقعی که $\gamma < \omega_0$ است می‌نویسیم. در این صورت پاسخ آن عبارت است از

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (53.12)$$

در اینجا A و α ثابتهای اختیاری هستند که با توجه به شرایط اولیه تعیین می‌شوند (چنانکه در مثال ۳.۱۲ در مورد یک حرکت هماهنگ ساده توضیح داده شد)، و

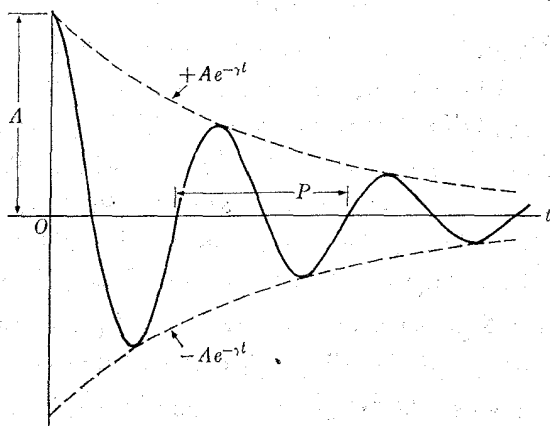
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{k/m - \lambda^2/4m^2}. \quad (54.12)$$

دانشجو با قرار دادن مستقیم معادله (۵۳.۱۲) در معادله (۵۲.۱۲) می‌تواند تحقیق کند که معادله اول پاسخ معادله دوم است. نظر به اینکه این پاسخ شامل دو مقدار ثابت است، پاسخ عمومی برای معادله دیفرانسیل می‌باشد. معادله (۵۴.۱۲) نشان می‌دهد که اثر

* به عنوان مثال، رجوع کنید به حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، بخش ۱۲.۲۰.

میرایی کاستن از بسامد نوسانهاست.

بنابراین دامنه نوسانها دیگر ثابت نیست و اندازه آن برابر است با $Ae^{-\gamma t}$. به دلیل نمای منفی، با افزایش t دامنه کاهش می یابد و یک حرکت میرا به وجود می آورد. شکل ۳۴.۱۲ چگونگی تغییرات x را بر حسب t نشان می دهد.



شکل ۳۴.۱۲. نوسانهای میرا

اگر میرایی بزرگ باشد، γ می تواند از ω_0 و ω بزرگتر شود، در نتیجه معادله (۵۴.۱۲) موهومی می شود. در این صورت، نوسان وجود ندارد. ذره ای که جا بجا و سپس رها شده است، بتدریج به وضع توازنندی نزدیک می شود بدون اینکه از آن بگذرد، یا حداکثر با یک بار گذر از آن به وضع توازنندی برمی گردد. انرژی که ذره در حرکت از دست می دهد جذب محیط اطراف آن می شود.

مثال ۱۱.۱۲. آونگی از کره آلومینومی به شعاع 0.05 m از نخ به طول یک متر آویزان است. مقاومت هوا چگونه دامنه و دوره حرکت را تغییر می دهد؟

حل: در بخش ۱۰.۷ دیدیم که نیروی وشکسان وارد بر کره ای به شعاع R که با سرعت v در شاره ای حرکت می کند برابر است با $F = -6\pi\eta Rv$. بنابراین می توان معادله حرکت مماسی آونگ را با افزودن این نیروی وشکسانی به نیروی

$$F_T = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

که در بخش ۵.۱۲ برای دامنه های کوچک به دست آوردیم پیدا کرد. $v = ds/dt = l d\theta/dt$ است که در آن l طول آونگ می باشد. بنابراین

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta - 6\pi\eta Rl \frac{d\theta}{dt}$$

یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{6\pi\eta R}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

که یک معادلهٔ دیفرانسیل مشابه با معادلهٔ (۵۲.۱۲) است. با قراردادن $m = (4\pi R^3/3)\rho$ در آن $\rho = 265 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ ، چگالی آلومینیم است، نتیجه می‌گیریم که

$$\gamma = \frac{6\pi\eta R}{2(4\pi R^3/3)\rho} = \frac{9\eta}{4R^2\rho}$$

برای هوای 20°C ، و شکسانی برابر است با $1.78 \times 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ بنا براین $\gamma = 6.43 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ می‌شود. بدین طریق، دامنه مطابق قانون $Ae^{-0.000643t}$ کاهش می‌یابد. زمان لازم برای اینکه دامنه به اندازهٔ ۱۰٪ خود کاهش یابد از برابر قرار دادن عبارت نمایی با ۰.۹ یا $\ln 0.9 = -6.43 \times 10^{-4} t$ — به دست می‌آید. در این صورت $t = 1.64 \times 10^3 \text{ s}$ ، یعنی در حدود ۲۷ دقیقه است.

برای اینکه بدانیم چگونه و شکسانی هوا بسامد (یا دوره) نوسانها را تغییر می‌دهد، با توجه اینکه $\omega^2 = g/l$ است، معادلهٔ (۱۲.۵۴) را به کار می‌بریم. بنا براین $\omega = \sqrt{g/l - \gamma^2}$ ولی $g/l = 9.8 \text{ s}^{-2}$ است، در صورتی که در اینجا γ از مرتبهٔ 10^{-7} s^{-2} است و در نتیجه در مقابل g/l قابل اغماض می‌باشد. نتیجه می‌گیریم که و شکسانی هوا هر چند دامنه را تغییر می‌دهد ولی عملاً روی بسامد یا دورهٔ آونگ مورد بحث در این مثال، اثر نمی‌گذارد.

۱۳.۱۲ نوسانهای واداشته

یک مسئلهٔ با اهمیت عملی دیگر، مسئلهٔ ارتعاشهای واداشتهٔ یک نوسانگر است؛ یعنی ارتعاشهای حاصل از اعمال یک نیروی خارجی نوسانی روی ذره‌ای که بر آن یک نیروی کشسان وارد می‌شود. به عنوان مثال، این وضع هنگامی پیش می‌آید که دیاپازونی را روی جعبهٔ باز آوان^۲ (تشدید) قرار دهیم و جدارهای جعبه (وهوای داخل آن) را وادار کنیم تا به ارتعاش درآیند، یا هنگامی که موجهای الکترومغناطیسی در سافتی یک آنتن، روی مدار الکتریکی دستگاه رادیو یا تلویزیون اثر می‌کنند و نوسانهای واداشته تولید می‌کنند.

فرض می‌کنیم $F = F_0 \cos \omega_f t$ نیروی نوسانی اعمال شده و ω بسامد زاویه‌ای آن باشد. اگر فرض کنیم که ذره تحت تأثیر نیروی کشسان $-kx$ و نیروی میرایی $-\lambda v$ نیز قرار دارد، معادلهٔ حرکت آن عبارت خواهد شد از

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \cos \omega_f t$$

که اگر در آن v را برابر dx/dt و a را برابر d^2x/dt^2 قرار دهیم، به دست می‌آید

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_f t \quad (55.12)$$

که با قرار دادن $\gamma = \lambda/m$ و $\omega_0^2 = k/m$ ، رابطهٔ فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega_f t. \quad (56.12)$$

این رابطه یک معادله دیفرانسیل شبیه به معادله (۵۲.۱۲) است، تنها با این تفاوت که جمله سمت راست آن صفر نیست. می‌توان آن را با روشهای کلاسیک حل کرد. ولی در اینجا نیز از شم فیزیکی راهنمایی می‌گیریم. در این مورد منطقی به نظر می‌رسد که ذره، نه با بسامد زاویه‌ای نامیرای ω_0 ، و نه با بسامد زاویه‌ای میرای $\gamma^2 - \omega_0^2$ ، بلکه ناچار با ω_f ، بسامد زاویه‌ای نیروی اعمال شده نوسان کند. از این رو به عنوان یک پاسخ ممکن برای معادله (۵۶.۱۲)، رابطه‌ای به صورت زیر را امتحان می‌کنیم:

$$x = A \sin(\omega_f t - \alpha). \quad (57.12)$$

در اینجا، جهت سهولت، برای فاز اولیه α علامت منفی منظور شده است. با قراردادن مستقیم می‌توان دید که این رابطه در معادله (۵۶.۱۳) صدق می‌کند، مشروط بر اینکه دامنه A بارابطه*

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \quad (58.12)$$

و فاز اولیه جابجایی با رابطه

$$\tan \alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f} \quad (59.12)$$

بیان شوند.

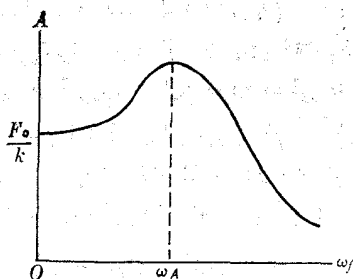
توجه داشته باشید که در اینجا نه دامنه A و نه فاز اولیه α کمیت‌های دلخواه نیستند، بلکه دارای مقادیر معینی هستند که به ω_f ، بسامد نیروی وارد شده بستگی دارند، از لحاظ ریاضی این سخن بدان معناست که یک پاسخ «خصوصی» معادله دیفرانسیل را به دست آورده‌ایم. ** معادله (۵۷.۱۲) نشان می‌دهد که نوسانهای واداشته میرا نیستند، ولی دارای دامنه‌ای ثابت و بسامدی برابر با بسامد نیروی اعمال شده می‌باشند. یعنی نیروی وارده بر نیروی میرایی فایق می‌آید و انرژی لازم برای محفوظ نگه داشتن نوسانها را فراهم می‌کند. در شکل ۳۵.۱۲، به ازای یک مقدار مشخص γ ، دامنه A برحسب بسامد ω_f رسم شده است. هنگامی که در معادله (۵۸.۱۲) مخرج کسر کمینه است، دامنه به بیشینه قابل توجهی

☆ برای اثبات، ابتدا $\sin(\omega_f t - \alpha)$ را بسط و نتیجه را در معادله (۵۶.۱۲) قرار دهید. سپس ضرایب $\sin \omega_f t$ و $\cos \omega_f t$ را بترتیب در دو طرف معادله برابر هم بگیرید. از دو معادله‌ای که بدین طریق به دست می‌آیند، مستقیماً معادله‌های (۵۸.۱۲) و (۵۹.۱۲) نتیجه می‌شوند.

☆☆ در نظریه معادلات دیفرانسیل ثابت می‌کنند که پاسخ عمومی معادله (۵۶.۱۲) از افزودن معادله (۵۳.۱۲) یعنی پاسخ معادله (۵۲.۱۲) به معادله (۵۷.۱۲) به دست می‌آید. با وجود این چون معادله (۵۳.۱۲) به یک حرکت نوسانی میرا مربوط است خیلی زود کوچک می‌شود و می‌توان آن را رانده گرفت. به همین دلیل معمولاً آن را جمله گذرا (transient) می‌نامند.

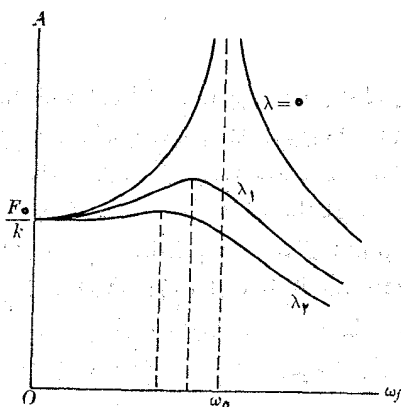
می‌رسد. این حالت به ازای بسامد ω_A که با رابطه زیر داده می‌شود، به وجود می‌آید:

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{k/m - \lambda^2/2m^2}. \quad (60.12)$$



شکل ۳۵.۱۲. تغییرات دامنه با بسامد نیروی وارده

هنگامی که ω_f بسامد نیروی وارده با ω_A برابر باشد، گویند بازآوایی دامنه وجود دارد. هرچه میرایی کوچکتر باشد، بازآوایی قابل ملاحظه‌تر می‌شود. هنگامی که λ برابر صفر است دامنه بازآوایی بینهایت می‌باشد. دامنه بینهایت به ازای $\omega_A = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ به وجود می‌آید. شکل ۳۶.۱۲ تغییرات دامنه A را برحسب بسامد ω_f برای مقادیر مختلف λ نشان می‌دهد.



شکل ۳۶.۱۲. تغییرات دامنه نوسانهای واداشته برحسب میرایی (در شکل، λ_2 بزرگتر از λ_1 است.)

سرعت نوسانهای واداشته برابر است با

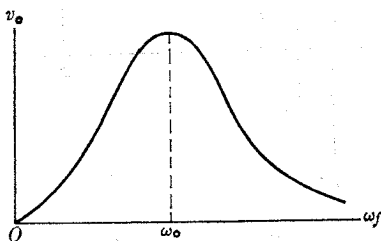
$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f A \cos(\omega_f t - \alpha). \quad (61.12)$$

از مقایسه معادله (۶۱.۱۲) با رابطه $F = F_0 \cos \omega_f t$ برای نیروی وارد شده، مشاهده می‌شود که α اختلاف فاز سرعت را نسبت به نیرو نشان می‌دهد. v_0 دامنه سرعت برابر است با

$$v_0 = \omega_f A = \frac{\omega_f F_0 / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^2 + \lambda^2}} \quad (۶۲.۱۲)$$



شکل ۳۷.۱۲. تغییرات دامنه سرعت نوسانهای واداشته با بسامد نیروی وارده

چنانکه شکل ۳۷.۱۲ نشان می‌دهد، مقدار v_0 با ω_f تغییر می‌کند، و موقعی که جمله داخل پرانتز درمخرج برابر صفر شود، یعنی $m\omega_f - k/\omega_f = 0$ ، یا

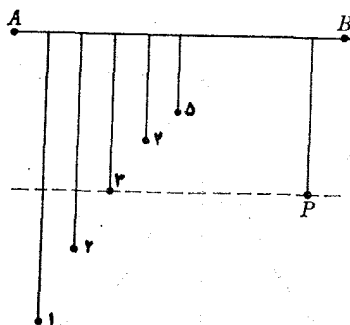
$$\omega_f = \sqrt{k/m} = \omega_0 \quad (۶۳.۱۲)$$

باشد، v_0 به حداکثر مقدار خود می‌رسد. در این بسامد، سرعت و همچنین انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه هستند، و گفته می‌شود با آواپی انرژی وجود دارد. توجه داشته باشید که از قراردادن معادله (۶۳.۱۲) در معادله (۵۹.۱۲)، به دست می‌آید $\alpha = 0$. بنابراین با آواپی انرژی موقعی به وجود می‌آید که بسامد نیروی وارد شده برابر بسامد طبیعی نوسانگر بدون میرایی باشد، که در این صورت سرعت با نیروی وارد شده همفاز است. اینها مناسبترین شرایط برای انتقال انرژی به نوسانگرند، زیرا میزان کاری که نیروی وارده روی نوسانگر انجام می‌دهد برابر Fv است و این کمیت هنگامی که v و F همفاز باشند همیشه مثبت است. در نتیجه

هنگام با آواپی انرژی، انتقال انرژی از نیروی اعمال شده به نوسانگر واداشته بیشینه است.

هنگامی که میرایی ضعیف است، بسامدهای مربوط به با آواپی دامنه و با آواپی انرژی اختلاف چندانی با یکدیگر ندارند.

بازآوایی را می توان با آزمایش بسیار ساده ای نشان داد. اگر، مطابق شکل ۳۸.۱۲، از یک نخ چندین آونگ آویزان کنیم و آونگ P را به نوسان درآوریم، به سبب جفت شدگی، سایر آونگها نیز شروع به نوسان می کنند. ولی ازمیان ۵ آونگ، آونگی که با بزرگترین دامنه به نوسان درمی آید آونگ شماره ۳ است که دارای طول یکسان با P ، در نتیجه دارای بسامد طبیعی برابر با آن است، زیرا دراین حالت میرایی ناچیز است و بین بازآوایی دامنه و بازآوایی انرژی تمایزی وجود ندارد.



شکل ۳۸.۱۲. باز آوایی دامنه در حرکت آونگ

باز آوایی تقریباً در تمام شاخه های فیزیک وجود دارد. هر زمان که دستگاهی زیر تأثیر یک عامل خارجی که به طور متناوب با زمان تغییر می کند قرار گیرد باز آوایی رخ می دهد. به عنوان مثال، اگر گازی در ناحیه ای قرار گیرد که در آنجا یک میدان الکتریکی متناوب وجود دارد (مانند یک موج الکترومغناطیسی)، نوسانهای واداشته در اتمهای تشکیل دهنده مولکولهای گاز القا می شوند. چنانکه در پایان بخش ۱۰.۱۲ شرح دادیم، چون مولکولها دارای بسامدهای طبیعی کاملاً معینی می باشند، موقعی که بسامد میدان الکتریکی اعمال شده بر یکی از بسامدهای طبیعی مولکولها منطبق باشد، جذب انرژی بیشینه خواهد بود. با استفاده از این اصل، می توان پیناپ ادعاشی مولکولها را به دست آورد. همچنین، در یک اتم می توان الکترونها را نوسانگرهایی در نظر گرفت که بسامدهای طبیعی خاصی دارند. هرگاه بسامد میدان الکتریکی نوسانی بر یکی از بسامدهای طبیعی اتم منطبق باشد انرژی که اتم از میدان جذب می کند بیشینه خواهد بود. بعضی از بلورها مثل کلرور سدیم، از ذره های باردار با بار الکتریکی مثبت و منفی (به نام یون^۱) تشکیل شده اند. اگر بلور در یک میدان الکتریکی متناوب خارجی قرار گیرد، یونهای مثبت نسبت به یونهای منفی به ارتعاش در می آیند. جذب انرژی به وسیله بلور وقتی بیشینه است که بسامد میدان الکتریکی بر بسامد طبیعی ارتعاشات نسبی یونها منطبق باشد؛ در مورد کلرور سدیم این بسامد تقریباً برابر $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ است.

شاید آشنا ترین مثال برای باز آوایی، تنظیم یک رادیو روی یک ایستگاه فرستنده

باشد. فرستنده‌ها در تمام اوقات نوسانهای واداشته در مدارهای گیرنده به وجود می‌آورند. در هر تنظیمی، تطبیق روی یکی از بسامدهای طبیعی مدار الکتریکی دستگاه گیرنده صورت می‌گیرد. وقتی که این بسامد با بسامد ایستگاه فرستنده تطبیق می‌کند، جذب انرژی بیشینه است، و تنها آن ایستگاه شنیده می‌شود. اگر بسامدهای دو ایستگاه خیلی به هم نزدیک باشند، گاهی آنها را همزمان می‌شنویم که باعث ایجاد اثر تداخلی می‌شود.

می‌توان مفهوم بازآوایی را به خیلی از پدیده‌های دیگر که در آنها شرایط مناسبی برای انتقال انرژی از یک دستگاه به دستگاه دیگر وجود دارد تعمیم داد، حتی اگر نتوان پدیده را مانند نوسانهای واداشته تشریح کرد. از این لحاظ می‌توان حتی در واکنشهای هسته‌ای و در واکنشهایی که بین ذرات بنیادی صورت می‌گیرند از بازآوایی گفتگو کرد. در این معنای گسترده، مفهوم بازآوایی انرژی نقش عمده‌ای در توضیح بسیاری از پدیده‌ها ایفا می‌کند.

۱۴.۱۲ پاگیری یک نوسانگر

یک نوسانگر با سه کمیت جرم m ، ثابت کشسانی k و ثابت میرایی λ مشخص می‌شود. در فرمولهای بخش ۱۳.۱۲ این کمیتها همیشه به صورت ترکیبهای ویژه‌ای با ω_f ، بسامد نیروی وارده ظاهر می‌شوند.

کمیت ظاهر شده درمخرج فرمول (۶۲.۱۲) را پاگیری^۱ نوسانگر می‌نامند و آن را با Z نشان می‌دهند. بنا براین

$$Z = \sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^2 + \lambda^2}. \quad (۶۴.۱۲)$$

همچنین پاگیری انگاری^۲ X و مقاومت^۳ R با رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$X = m\omega_f - k/\omega_f \quad \text{و} \quad R = \lambda. \quad (۶۵.۱۲)$$

در نتیجه

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2}. \quad (۶۶.۱۲)$$

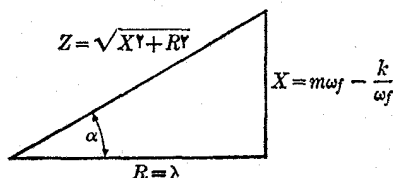
با قرار دادن این رابطه‌ها در معادله (۵۹.۱۲) به دست می‌آید

$$\tan \alpha = X/R. \quad (۶۷.۱۲)$$

رابطه‌های بین Z ، X و R را در شکل ۳۹.۱۲ نشان داده‌ایم، که به خاطر سپردن فرمولهای بالا را آسان می‌کند.

معادله (۶۲.۱۲) نشان می‌دهد که $v_0 = F_0/Z$ است و سرعت در هر لحظه با رابطه

$$v = \frac{F_0}{Z} \cos(\omega_f t - \alpha) \quad (۶۸.۱۲)$$



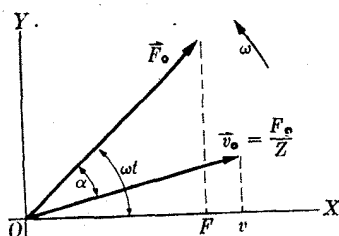
شکل ۳۹.۱۲. رابطه بین پاگیری، مقاومت و پاگیری انگاری در نوسانهای واداشته

داده می شود. این رابطه نشان می دهد که نیرو و سرعت را می توان با بردارهای چرخان، همانند شکل ۴۰.۱۲، نمایش داد. توجه داشته باشید که اگر α مثبت باشد، بردار چرخان $\vec{v}$ نسبت به بردار چرخان $\vec{F}_0$ تأخیر دارد، و اگر α منفی باشد، بردار چرخان $\vec{v}$ نسبت به $\vec{F}_0$ برادر چرخان $\vec{F}_0$ تقدم دارد. اگر $\alpha = 0$ باشد، بازآوایی انرژی وجود دارد و $\vec{F}_0$ و $\vec{v}$ همسو می باشند. توان انتقال یافته به نوسانگر برابر است با

$$P = Fv = \frac{F_0}{Z} \cos \omega_f t \cos (\omega_f t - \alpha).$$

با بسط دومین کسینوس و با ضرب آن در کسینوس اول به دست می آید

$$P = \frac{F_0}{Z} (\cos^2 \omega_f t \cos \alpha - \cos \omega_f t \sin \omega_f t \sin \alpha). \quad (۴۰.۱۲)$$



شکل ۴۰.۱۲. رابطه بین بردارهای چرخان سرعت و نیرو در نوسانهای واداشته

برای ما بیشتر توان میانگین P_{ave} اهمیت دارد، زیرا این توان است که در محاسبه انرژی که در یک زمان معین، به وسیله نوسانگر جذب می شود دخالت دارد. بنا به معادله های (پ.۱۳) و (پ.۱۴) داریم

$$\cos^2 \omega_f t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_f t) \quad \text{و} \quad \cos \omega_f t \sin \omega_f t = \frac{1}{2} \sin 2\omega_f t.$$

همچنین

$$(\cos 2\omega_f t)_{ave} = (\sin 2\omega_f t)_{ave} = 0$$

زیرا منحنیهای سینوس و کسینوس، به مقدار مساوی، درنیمی از مدت مثبت و درنیم دیگر منفی می باشند. بنابراین

$$(\cos^2 \omega_f t)_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad (\cos \omega_f t \sin \omega_f t)_{\text{ave}} = 0$$

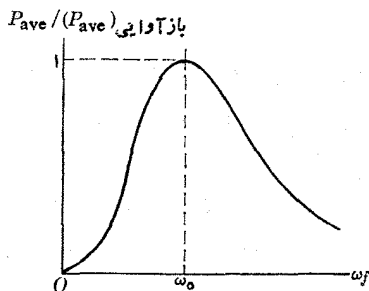
وبالاخره نتیجه می شود

$$P_{\text{ave}} = \frac{F_0^2}{2Z} \cos \alpha = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \alpha = \frac{F_0^2 R}{2Z^2} = \frac{1}{2} R v_0^2 \quad (70.12)$$

این رابطه تأیید می کند که انتقال انرژی هنگامی بیشینه است که v_0 بیشینه باشد، زیرا R ثابت است. هنگام بازآوایی انرژی، $\alpha = 0$ و $Z = R$ است، در نتیجه

$$(P_{\text{ave}})_{\text{بازآوایی}} = \frac{F_0^2}{2R} \quad (71.12)$$

شکل ۷۱.۱۲ نسبت $P_{\text{ave}} / (P_{\text{ave}})_{\text{بازآوایی}}$ را نشان می دهد.



شکل ۷۱.۱۲. رابطه بین P_{ave} و $(P_{\text{ave}})_{\text{بازآوایی}}$

نظریه مربوط به نوسانگرهای میرا و واداشته که درسه بخش اخیر فرمولبندی کردیم، گرچه ظاهراً به یک ذره نوسانگر مربوط می شود، ولی برای هر وضعیت فیزیکی که با معادله هایی مانند (۵۲.۱۲) یا (۵۶.۱۲) توصیف شود به کار می رود. بویژه، چنانکه در فصل ۱۷ (جلد دوم) خواهیم دید، مدارهای الکتریکی دقیقاً این وضع را دارند.

۱۵.۱۲ تحلیل فوریه حرکت دوره ای

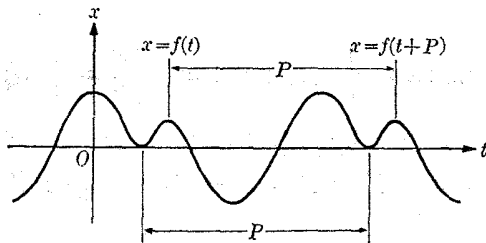
در ابتدای این فصل، گفتیم که حرکت هماهنگ ساده حالت خاصی از حرکت تناوبی یا نوسانی است. ولی یک حرکت دوره ای، با دوره P ، در حالت کلی با رابطه زیر نشان داده می شود:

$$x = f(t) \quad (72.12)$$

که در آن چنانکه شکل ۴۲.۱۲ نشان می‌دهد، $f(x)$ یک تابع دوره‌ای است و این خاصیت را دارد که

$$f(t) = f(t + P).$$

بنابراین منحنی $f(x)$ در فاصله‌های زمانی برابر P تکرار می‌شود. این حرکت نوسانی کلی را می‌توان به صورت ترکیبی از حرکتهای هماهنگ ساده بیان کرد.



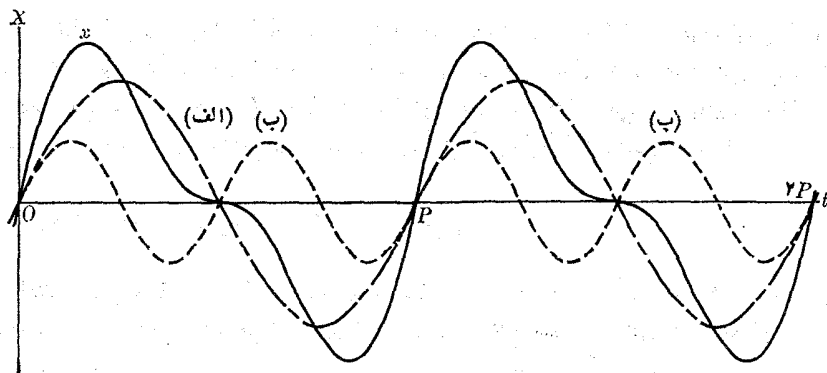
شکل ۴۲.۱۲. یک تابع دوره‌ای از زمان

ابتدا، به عنوان مثال، حرکتی را در نظر می‌گیریم که در آن جابجایی مطابق رابطه زیر صورت می‌گیرد:

$$x = A \sin \omega t + B \sin 2\omega t. \quad (۷۳.۱۲)$$

این رابطه، نمایش ترکیب دو حرکت هماهنگ ساده با بسامدهای ω و 2ω یا دوره‌های P و $P/2$ می‌باشد. بدیهی است x نیز دوره‌ای است و دوره آن نیز برابر P می‌باشد. این مطلب را می‌توان در نمودار شکل ۴۳.۱۲ مشاهده کرد. در این نمودار منحنی (الف) مربوط به $\sin \omega t$ و منحنی (ب) مربوط به $\sin 2\omega t$ است. هرچند x دوره‌ای است ولی هماهنگ ساده نیست.

اگر به معادله (۷۳.۱۲) جمله‌هایی به صورت $\sin \omega t, \sin 2\omega t, \sin 3\omega t, \dots, \sin n\omega t$



شکل ۴۳.۱۲. برهم‌نهی دو حرکت هماهنگ ساده با بسامدهای ω و 2ω

با بسامدهای زاویه‌ای ω ، 3ω ، 4ω ، ...، $n\omega$ ، ... و دوره‌های $P/3$ ، $P/4$ ، P/n ، ...، یا توابعی از کسینوس و با همین بسامدها اضافه کنیم، باز هم جابجایی x دوره‌ای و دوره آن P خواهد بود، و شکل دقیق آن به تعداد تابعهای سینوسی و کسینوسی که اضافه کرده‌ایم و نیز به دامنه نسبی آنها بستگی دارد.

بدین طریق مشاهده می‌شود که از افزودن حرکت‌های هماهنگ ساده که بسامدهای آنها مضاربی از یک بسامد اصلی هستند و دامنه آنها به‌طور مناسبی انتخاب شده است، می‌توان تقریباً هر تابع دوره‌ای را به دست آورد. عکس این مطلب که قضیه فوریه^۱ نامیده می‌شود نیز درست است، و در درس ریاضی آن را اثبات می‌کنند. قضیه فوریه ادعا می‌کند که یک تابع دوره‌ای $f(t)$ با دوره $P = 2\pi/\omega$ را می‌توان به صورت جمع توابع زیر نوشت:

$$x = f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t \\ + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots \quad (74.13)$$

که به نام دشته فوریه معروف است. ω را بسامد اصلی و بسامدهای 2ω ، 3ω ، ...، $n\omega$ ، ... را هماهنگهای آن می‌نامند.

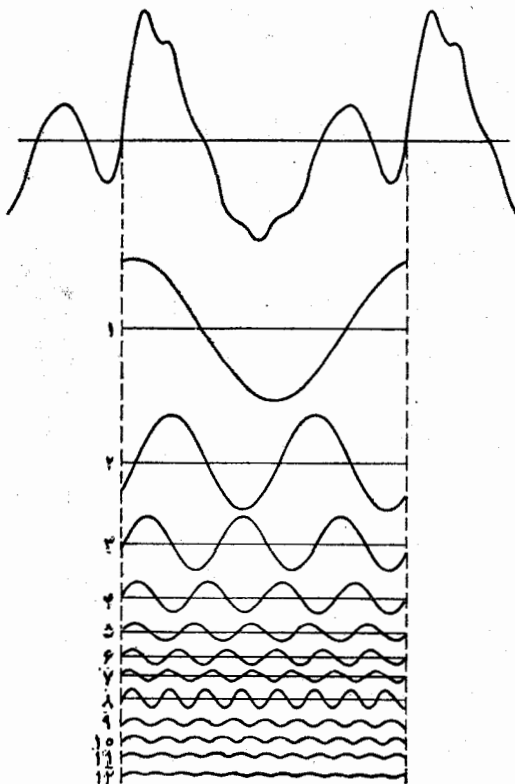
یادداشت درباره ضرایب فوریه: ضرایب a_n و b_n از رابطه‌های

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \cos n\omega t dt \\ b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \sin n\omega t dt \quad (75.12)$$

به دست می‌آیند. این روابط در کتابهای ریاضی اثبات می‌شوند، ولی دانشجو قادر است خود با سانی آنها را حساب کند. به عنوان مثال، برای به دست آوردن a_n ، دوطرف معادله (74.12) را در $\cos n\omega t$ ضرب می‌کنیم و از آن انتگرال می‌گیریم. انتگرال تمام جمله‌ها به استثنای a_n برابر صفر است. برای محاسبه b_n ، $\sin n\omega t$ را به کار می‌بریم. (رجوع کنید به توماس، جرج، ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹، بخش ۸.۱۸)

قضیه فوریه دلیل دیگری است بر اهمیت ویژه حرکت‌های هماهنگ ساده. با استفاده از این قضیه، هر نوع حرکت دوره‌ای را می‌توان برهم‌نesh چند حرکت هماهنگ ساده در نظر گرفت. در شکل ۴۴.۱۲ حرکت دوره‌ای مربوط به منحنی رسم شده در بالای شکل، به مؤلفه‌های فوریه تجزیه شده است. در این شکل ۱۲ هماهنگ اول مشاهده می‌شوند. همچنین قضیه فوریه کمک می‌کند کیفیت متفاوت صوت‌هایی را که به وسیله دستگاه‌های مختلف موسیقی ایجاد می‌شوند توضیح دهیم. یک نت معین (یا نوای^۱ موسیقی) که با پیانو، گیتار، قره‌نی... نواخته شود در گوش ما به گونه‌های متفاوتی شنیده می‌شوند، هر چند بسامد اصلی

همه آنها یکسان است. این اختلاف از وجود هماهنگها با دامنه‌های نسبی متفاوت ناشی می‌شود. به‌گفته دیگر، تحلیل فوریه صوت برای هر دستگاه فرق می‌کند.

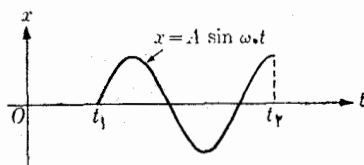


شکل ۴۴.۱۲. تحلیل فوریه یک تابع دوره‌ای

روش فوریه نه تنها برای تجزیه منحنیهای دوره‌ای مفید است، بلکه در تجزیه منحنیهای غیردوره‌ای نیز از آن استفاده می‌شود. در حالتی که تابع دوره‌ای نیست، منحنی از $-\infty$ تا $+\infty$ گسترده است، و می‌توان فرض کرد که این فاصله یک دوره را می‌پوشاند. اختلاف اساسی بین این حالت و حالتی که قبلاً مطالعه شد در این است که به جای تجزیه منحنی بر حسب بیناب بامدهای ناپیوسته ω ، 2ω ، 3ω ، و $\dots$ و $n\omega$ ، باید آن را به صورت یک بیناب پیوسته بسامدها تجزیه کرد. دامنه مربوط به هر بسامد با تابعی از ω که به نام تبدیل فوریه منحنی تجزیه شده معروف است به دست می‌آید. اکنون بدون اینکه وارد جزئیات ریاضی شویم مثالی را ذکر می‌کنیم.

فرض کنیم یک منحنی در فاصله زمانی t_1 تا t_2 با معادله $x = A \sin \omega t$ داده شده است و چنانکه شکل ۴۵.۱۲ نشان می‌دهد، در هر نقطه دیگری برابر صفر است. از لحاظ فیزیکی، این امر مربوط به حالتی است که جسمی در لحظه $t = t_1$ شروع به نوسان کند

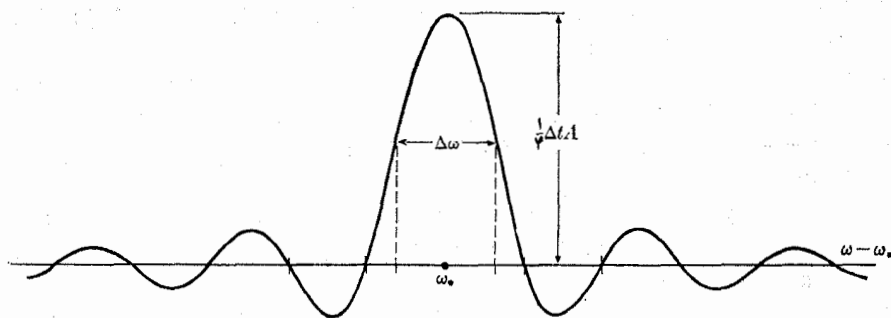
و ناگهان در لحظه $t = t_2$ بایستد. این پدیده گاهی تپه^۱ نیز نامیده می‌شود.



شکل ۴۵.۱۲. تپه نوسانی محدود

اگر منحنی از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه می‌داشت، کاری به تحلیل فوریه نداشتیم، زیرا منحنی یک تابع هماهنگ با بسامد ω می‌شد. ولی برای حذف منحنی به ازای $t < t_1$ یا $t > t_2$ ، باید بسامدهای دیگری به منحنی افزود تا رشته فوریه در این دوناچه برابر صفر شود. بدین طریق هر تپه محدود از چندین بسامد تشکیل شده است، حتی اگر چشمه مرتعش دارای یک بسامد کاملاً معین باشد. می‌توان ثابت کرد که نیمرخ (پروفیل) دامنه به صورت تابعی از ω (یا تبدیل فوریه دامنه) مربوط به تپه با رابطه زیر داده می‌شود:

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi} A \Delta t \left[\frac{\sin [(\omega - \omega_0) \Delta t / 2]}{(\omega - \omega_0) \Delta t / 2} \right]$$



شکل ۴۶.۱۲. تحلیل (یا تبدیل) فوریه تپه شکل ۴۵.۱۲

که در آن $\Delta t = t_2 - t_1$ است. نیمرخ دامنه در شکل ۴۶.۱۲ نشان داده شده است. به ازای $\omega = \omega_0$ داریم $F(\omega_0) = A \Delta t / \pi$. چون صورت کسر در رابطه فوق هرگز بزرگتر از یک نمی‌شود، هنگامی که قدر مطلق اختلاف $(\omega - \omega_0)$ افزایش پیدا می‌کند، مقدار $F(\omega)$ به گونه نوسانی کاهش می‌یابد. گستره مقادیر ω که برای آنها $F(\omega)$ از ۵۰٪ مقدار آن به ازای $\omega = \omega_0$ بزرگتر باشد تقریباً به شرایط زیر مربوط می‌شود:

$$\left| \frac{1}{\pi} (\omega - \omega_0) \Delta t \right| < \frac{\pi}{4} \quad \text{یا} \quad -\frac{\pi}{\Delta t} < \omega - \omega_0 < \frac{\pi}{\Delta t}.$$

بدین طریق اگر $\Delta \omega$ را برابر $2\pi / \Delta t$ قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم که تنها بسامدهایی که

دامنه‌هایشان قابل ملاحظه می‌باشند، بسامدهایی هستند که در گستره $\Delta\omega$ در پیرامون ω قرار دارند و با رابطه زیر داده می‌شوند:

$$\Delta\omega\Delta t \sim 2\pi.$$

این رابطه نشان می‌دهد که هرچه فاصله زمانی کوتاهتر باشد، گستره بسامدهای لازم برای نمایش درست تپه بزرگتر است.

فهرست منابع

1. «Restless Harmonic Oscillator», M. Hane; *Am. J. Phys.* 30, 84 (1962).
2. «An Unusual Method of Solving the Harmonic Oscillator Problem», R. Weinstock; *Am. J. Phys.* 29, 830 (1961).
3. «Precision Measurement of Period vs. Amplitude for a Pendulum», M. Smith; *Am. J. Phys.* 32, 632 (1964).
4. «Exact Normal Modes of Oscillation of a Linear Chain of Identical Particles», J. Louch; *Am. J. Phys.* 30, 585 (1962).
5. *Waves and Oscillations*, R. Waldron. Princeton, N. J.: Van Nostrand, Momentum Books, 1964.
6. *Physical Mechanics* (third edition), by R. Lindsay. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963, Chapter 9.
7. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Chapter 14.
8. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapters 8, 19, and 20.
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 21 through 25, 49, and 50.
10. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 1, Galileo; page 93, Hooke; page 95, Young.
۱۱. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمه اعظم‌نیر و مندراد و غلامحسین‌همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۴، بخشهای ۷-۲ تا ۱۱-۲، ۱۰-۳ و ۱۰-۴.

مسئله‌ها

- ۱۰-۱۲. به لبه چرخشی به شعاع ۳۰ cm دستگیره‌ای متصل است. چرخ با سرعت ۵۵ دور در ثانیه دور محور افقی خود می‌چرخد. به فرض اینکه پرتوهای آفتاب در راستای قائم بر زمین بتابند، سایه دستگیره یک حرکت هماهنگ ساده رسم می‌کند. (الف) دوره حرکت سایه، (ب) بسامد، و (ج) دامنه آن را پیدا کنید. معادله‌ای بنویسید که جابجایی را به صورت تابعی از زمان به دست دهد. فاز اولیه را صفر بگیرید.
- ۲۰-۱۲. ذره‌ای بایک حرکت هماهنگ ساده به دامنه ۱۰ m و دوره ۲ s جابجا می‌شود.

جدولی رسم کنید که بعد، سرعت و شتاب را در زمانهای ۰، $P/8$ ، $3P/8$ ، $P/2$ ، $5P/8$ ، $3P/4$ ، $7P/8$ و P مشخص کند. منحنیهای نمایش بعد، سرعت و شتاب را به صورت توابعی از زمان رسم کنید.

۳۰۱۲. یک نوسانگر هماهنگ ساده با معادله $x = 4 \sin(0.12t + 0.5)$ نشان داده می شود که در آن تمام کمیتها در دستگاه یکاهای MKS هستند. (الف) دامنه، دوره، بسامد و فاز اولیه حرکت، (ب) سرعت و شتاب، (ج) شرایط اولیه، (د) مکان، سرعت و شتاب را به ازای $t = 5$ s پیدا کنید. منحنی نمایش مکان، سرعت و شتاب را به صورت توابعی از زمان رسم کنید.

۴۰۱۲. ذره ای واقع در انتهای یکی از شاخه های یک دیاپازون با سرعتی برابر با 2 ms^{-1} از وضع تعادل خود می گذرد. دامنه آن 3×10^{-3} m است. دوره و بسامد دیاپازون چقدر است؟ معادله حرکت دیاپازون را به صورت تابی از زمان بنویسید.

۵۰۱۲. ذره ای به جرم ۱ g با یک حرکت هماهنگ به دامنه 2 mm در حال ارتعاش است. شتاب آن در انتهای مسیر برابر است با $10^3 \text{ ms}^{-2} \times 80$. بسامد حرکت و سرعت ذره را هنگامی که از وضع تعادل و هنگامی که از نقطه ای به فاصله 1.2 mm از آن می گذرد حساب کنید. معادله نیروی وارد بر ذره را به صورت تابی از مکان آن و نیز به صورت تابی از زمان بنویسید.

۶۰۱۲. ذره ای با بسامد 100 Hz و دامنه 3 mm ارتعاش می کند. سرعت و شتاب آن را در وسط و در دو انتهای مسیر حساب کنید. معادله ای بنویسید که بعد را به صورت تابی از زمان به دست دهد. فاز اولیه را صفر بگیرید.

۷۰۱۲. ذره ای که دارای یک حرکت هماهنگ ساده به دامنه 1.5 m است در هر ثانیه ۱۰۰ بار ارتعاش می کند. بسامد زاویه ای آن چقدر است؟ (الف) سرعت، (ب) شتاب آن را حساب کنید. (ج) هنگامی که جابجایی 7.5 m است فاز را به دست آورید.

۸۰۱۲. حرکت سوزن یک چرخ خیاطی عملاً هماهنگ ساده است. اگر دامنه آن 3 cm و بسامد آن ۶۰۰ نوسان در دقیقه باشد، بعد، سرعت و شتاب سوزن $1/30$ ثانیه پس از عبور از وسط مسیر (الف) به سمت بالا یا در سوی مثبت، (ب) به سمت پایین یا در سوی منفی، چقدر است؟

۹۰۱۲. یک حرکت هماهنگ ساده دارای 8 cm دامنه و دوره ای برابر 4 s است. سرعت و شتاب ذره را 5 s بعد از عبور از انتهای مسیر حساب کنید.

۱۰۰۱۲. در مسئله ۲۰۱۲، به فرض اینکه جرم ذره 5 kg باشد، انرژی جنبشی، پتانسیل و کل را برای همان مقادیر t حساب کنید. مشاهده خواهید کرد که انرژی کل ثابت باقی می ماند. منحنیهای نمایش انرژی جنبشی و پتانسیل را (الف) بر حسب زمان، (ب) بر حسب مکان ذره رسم کنید. چه نتیجه ای از آن می گیرید؟

۱۱۰۱۲. ذره ای به جرم 50 kg به صورت هماهنگ ساده حرکت می کند. دوره حرکت آن 1 s و دامنه آن 10 cm است. شتاب، نیرو، انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی آن را هنگامی که 5 cm از وضع تعادل فاصله دارد حساب کنید.

۱۲.۱۲. ذره‌ای به جرم m بر اثر نیروی $F = -kx$ در راستای محور x حرکت می‌کند. هنگامی که $t = ۲s$ است ذره از مبدأ می‌گذرد و هنگامی که $t = ۴s$ باشد سرعت آن ۴ ms^{-1} می‌شود. معادله بعد را پیدا کنید و نشان دهید که اگر دوره نوسان $۱۶s$ باشد، دامنه حرکت برابر می‌شود با $۳۲\sqrt{۲}/\pi$.

۱۳.۱۲. یک تخته افقی با حرکت هماهنگ ساده با دامنه ۱۵ m در راستای افقی جابجا می‌شود. اگر صفحه ۱۶ بار در دقیقه نوسان کند، حداقل مقدار ضریب مالشی را که مانع لغزش یک جسم واقع روی تخته در هنگام حرکت تخته می‌شود حساب کنید.

۱۴.۱۲. با سوار شدن مردی به جرم ۶۰ kg در یک اتومبیل، مرکز جرم اتومبیل ۳ cm پایین می‌رود. ثابت کشسانی فنرهای اتومبیل چقدر است؟ اگر جرم اتومبیل ۵۰۰ kg باشد، دوره ارتعاشات اتومبیل را هنگامی که خالی است، و هنگامی که راننده سوار شده است، حساب کنید.

۱۵.۱۲. چگالی یک قطعه چوب به ابعاد a ، b و c ، نسبت به آب برابر ρ است. آن را طوری روی آب قرار می‌دهیم که ضلع a در راستای قائم باشد. سپس آن را به داخل آب فرو می‌بریم و رها می‌کنیم. دوره نوسانهای حاصل را پیدا کنید.

۱۶.۱۲. یک ذره به گونه‌ای حرکت می‌کند که مختصات آن بر حسب زمان عبارتند از $y = y_0 \sin \omega t$ ، $x = v_0 t$. (الف) x و y را بر حسب زمان رسم کنید. (ب) مسیر ذره را رسم کنید. (ج) نیروی لازم جهت ایجاد این حرکت چقدر است؟ (د) بزرگی سرعت و شتاب آن را به صورت توابعی از زمان به دست آورید.

۱۷.۱۲. در یک حرکت هماهنگ ساده، مقدار $(x)_{\text{ave}}$ و $(x^2)_{\text{ave}}$ را به دست آورید. میانگین نسبت به زمان گرفته می‌شود.

۱۸.۱۲. مقدار میانگین انرژی پتانسیل و جنبشی یک حرکت هماهنگ ساده را نسبت به (الف) زمان، (ب) مکان پیدا کنید.

۱۹.۱۲. دوره یک آونگ $۳s$ است. اگر طول آونگ ۶۰ درصد (الف) زیاد، (ب) کم شود، دوره آونگ چقدر می‌شود؟

۲۰.۱۲. هنگامی که $g = ۹۸۰ \text{ ms}^{-۲}$ است دوره آونگ یک ساعت دیواری $۲s$ است. اگر طول آونگ ۱ mm افزایش یابد، ساعت بعد از پایان ۲۴ ساعت چقدر عقب می‌ماند؟

۲۱.۱۲. اگر ساعت مسئله پیش را بدون تغییر طول آونگ آن، به محلی که در آنجا $g = ۹۷۵ \text{ ms}^{-۲}$ است ببرند، در ۲۴ ساعت چقدر به عقب می‌ماند؟ طول آونگ چقدر باید باشد تا ساعت در محل جدید زمان درست را نشان دهد؟

۲۲.۱۲. درصد تغییر طول یک آونگ چقدر باید باشد تا اگر از محلی که در آنجا $g = ۹۸۰ \text{ ms}^{-۲}$ است به محلی با $g = ۹۸۱ \text{ ms}^{-۲}$ برده شود دوره آونگ تغییر نکند؟

۲۳.۱۲. دامنه یک آونگ ساده چقدر باید باشد تا از معادله (۱۵.۱۲) دوره آونگ

با دقت بیش از ۲٪ به دست آید؟

۲۴.۱۲. یک آونگ ساده به طول 2 m در محلی با $g = 9.80\text{ ms}^{-2}$ قرار دارد. آونگ با دامنه 2° نوسان می‌کند. (الف) جابجایی زاویه‌ای، (ب) سرعت زاویه‌ای، (ج) شتاب زاویه‌ای، (د) سرعت خطی، (ه) شتاب مرکز گرا، و (و) کشش نخ را، به صورت توابعی از زمان بنویسید. جرم وزنه آونگ 1 kg است.

۲۵.۱۲. آونگی به طول 1.00 m را که جرم وزنه آن 0.60 kg است در طول یک‌کمان تا 4 cm بالای وضع ترازمندی خود بالا می‌بریم و سپس رها می‌کنیم. نیروی مماس بر مسیر، شتاب مماسی، سرعت و جابجایی زاویه‌ای آونگ را در هنگام نوسان به صورت توابعی از ارتفاع آونگ بیان کنید. مقادیر عددی کمیتهای بالا را هنگامی که آونگ به بیشینه دامنه می‌رسد و هنگامی که در پایینترین نقطه مسیر خود قرار دارد پیدا کنید. دامنه زاویه‌ای آن را حساب کنید.

۲۶.۱۲. آونگ مسئله پیش را آنقدر بالا می‌بریم تا با راستای قائم زاویه 30° بسازد و سپس رها می‌کنیم. آیا می‌توان حرکت آن را هماهنگ ساده در نظر گرفت؟ (الف) شتاب، (ب) سرعت، و (ج) کشش نخ را هنگامی که جابجایی زاویه‌ای آونگ 15° است و نیز هنگامی از نقطه ترازمندی می‌گذرد حساب کنید.

۲۷.۱۲. مرتبه بزرگی نسبی دو جمله تصحیحی اول رشته مربوط به دوره یک آونگ ساده را، اگر دامنه آن (الف) 10° ، (ب) 30° باشد، برآورد کنید.

۲۸.۱۲. با مراجعه به آونگ مثال ۷.۱۲، بیشینه مقدار R/l را برای اینکه جمله تصحیحی در رابطه دوره آونگ از ۱٪ تجاوز نکند، پیدا کنید.

۲۹.۱۲. مبله‌ای به طول 1 m از یک انتهای خود به گونه‌ای آویزان شده که یک آونگ مرکب را تشکیل می‌دهد. دوره و طول آونگ ساده هم‌ارز آن را پیدا کنید. اگر میله از محوری آویزان شود که فاصله آن از یک انتها برابر طول آونگ ساده هم‌ارز باشد که قبلاً به دست آوردیم، دوره آن را پیدا کنید.

۳۰.۱۲. دیسکی به شعاع R را می‌توان از یک محور افقی به فاصله h از مرکز آن آویزان کرد. (الف) طول آونگ ساده هم‌ارز آن را به دست آورید. (ب) جای محوری را که برای آن دوره آونگ کمینه است پیدا کنید. (ج) منحنی نمایش دوره را بر حسب h رسم کنید.

۳۱.۱۲. میله‌ای به طول L دور یک محور افقی که از یک انتهای آن می‌گذرد نوسان می‌کند. جسمی که هم وزن میله‌ای است در فاصله h از محور می‌تواند به میله وصل شود. (الف) دوره دستگاه را به صورت تابعی L و h پیدا کنید. (ب) آیا مقداری برای h وجود دارد که به ازای آن دوره دستگاه برابر دوره آونگ قبل از اتصال جسم به آن باشد؟

۳۲.۱۲. جسم جامدی به شکل مکعب به ضلع a می‌تواند دور یک محور افقی که بر یکی از یالهایش منطبق است نوسان کند. دوره آن را پیدا کنید.

۳۳.۱۲. یک آونگ پیچشی که از یک قطعه چوب به ضلعهای 3 cm ، 12 cm و 8 cm و به جرم 3 kg تشکیل شده است، توسط نخ‌کی که از مرکز آن می‌گذرد به گونه‌ای

آویزان شده است که کوتاهترین ضلع آن در راستای قائم قرار می‌گیرد. دوره نوسانهای پیچشی 2π است. k ثابت پیچشی نخ چقدر است؟

۳۴.۱۲. با مراجعه به شکل ۱۱.۱۲، ثابت کنید که اگر K_c شعاع ژیراسیون نسبت به یک محور موازی باشد که از مرکز جرم یک آونگ مرکب می‌گذرد، طول آونگ ساده هم‌ارز برابر است با $I = (K_c^2/b) + b$. [دانهمایی: برای ارتباط دادن شعاع ژیراسیون به مرکز جرم از قضیه اشتاینر استفاده کنید.]

۳۵.۱۲. با به کار بردن نتیجه مسئله پیش، ثابت کنید که طول آونگ ساده هم‌ارز یک آونگ مرکب (بخش ۶.۱۲) برابر است با فاصله مرکز ضربه (مسئله ۲۸.۱۰) تا نقطه آویز، اگر ضربه به نقطه C وارد شود.

۳۶.۱۲. اگر یک آونگ مرکب به جای نقطه O دور نقطه O' نوسان کند (شکل ۱۱.۱۲) ثابت کنید که دوره آن و همچنین طول آونگ ساده هم‌ارز آن تغییر نمی‌کند.

۳۷.۱۲. معادله حرکت برآیند حاصل از برهم‌نهی دو حرکت هماهنگ ساده موازی، به معادله‌های $x_1 = 6\sin 2t$ و $x_2 = 8\sin(2t + \alpha)$ را هنگامی که α برابر 0 ، $\pi/2$ و π باشد پیدا کنید. در هر مورد، منحنی نمایش هر حرکت و حرکت برآیند را رسم کنید.

۳۸.۱۲. معادله حرکت برآیند حاصل از برهم‌نهی دو حرکت هماهنگ ساده موازی، به معادله‌های

$$x_1 = 2\sin(\omega t + \pi/3)$$

و

$$x_2 = 3\sin(\omega t + \pi/2)$$

را پیدا کنید. منحنی نمایش هر حرکت و حرکت برآیند را رسم کنید. بردار چرخان مربوط به هر کدام را رسم کنید.

۳۹.۱۲. معادله مسیر حرکت برآیند حاصل از برهم‌نهی دو حرکت هماهنگ ساده عمود برهم به معادله‌های $x = 3\sin \omega t$ و $y = 3\sin(\omega t + \alpha)$ را هنگامی که α برابر 0 ، $\pi/2$ و π باشد، پیدا کنید. در هر مورد نمودار مسیر ذره را رسم و سوی حرکت را مشخص کنید.

۴۰.۱۲. با حذف سازه زمان بین معادله‌های (۳۰.۱۲) و (۳۱.۱۲)، ثابت کنید که معادله عمومی مسیر عبارت است از

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 - 2xy \cos \delta / AB = \sin^2 \delta.$$

نشان دهید که رابطه بالا، معادله یک بیضی است که محورهای آن با محورهای XY زاویه می‌سازند. [دانهمایی: هر معادله‌ای از نوع $ax^2 + bxy + cy^2 = k$ معادله یک بیضی است اگر $4ac < b^2$ باشد.]

۴۱.۱۲. ثابت کنید که در بیضی مسئله ۴۰.۱۲ برحسب اینکه $0 < \delta < \pi$ یا $2\pi < \delta < \pi$ باشد، مسیر در سوی ساعتگرد یا پاد ساعتگرد پیموده می‌شود.

۴۲.۱۲. معادله مسیر حرکت ذره‌ای را که به آن دو حرکت هماهنگ ساده عمود برهم اعمال می‌شود پیدا کنید. می‌دانیم که $\omega_1/\omega_2 = 1/2$ و α برابر $\pi/3$ و $\pi/2$ است. در هر مورد نمودار مسیر حرکت را رسم و جهت حرکت را مشخص کنید.

۴۳.۱۲. با جانشین کردن مستقیم در معادله (۳۷.۱۲) نشان دهید که رابطه‌های (۳۸، ۱۲)، به شرطی که $\omega = \sqrt{k_1/m_1}$ باشد، نوسانهای بهنجار هستند. اگر $\omega = \sqrt{(2k_1 + k)/m_1}$ باشد، همین عملیات را در مورد نوسانهای بهنجار (۴۰.۱۲) انجام دهید.

۴۴.۱۲. در برهم‌کنش بین اتمهای یک مولکول دواتمی، انرژی پتانسیل را می‌توان با تقریب خوبی با پتانسیل مورس^۱، $E(r) = D[1 - e^{-a(r-r_0)}]^2$ ، نشان داد. در این رابطه D ، a و r_0 ثابتهای مشخصه مولکول هستند. (الف) نمودار پتانسیل را رسم کنید و مکان ترازمندی را پیدا کنید. (ب) این تابع را به صورت رشته‌ای از توانهای $(r - r_0)$ بسط دهید و نسبت جمله اول ناهماهنگی را بر جمله هماهنگی پیدا کنید. (ج) بسامد ارتعاش نسبی دو اتم با انرژی کم را بر حسب D و a پیدا کنید. [دانه‌مایی: برای بسط تابع نمایی از معادله (۲۳.پ) استفاده کنید.]

۴۵.۱۲. برای یک نوسانگر میرا، مقادیر A و α را بر حسب x_0 و v_0 پیدا کنید و آنها را در حالتی که $v_0 = 0$ باشد به کار ببرید.

۴۶.۱۲. با جانشین کردن مستقیم، تحقیق کنید هنگامی که $\gamma > \omega$ باشد، پاسخ معادله (۵۲.۱۲) برای یک نوسانگر میرا عبارت است از $x = Ae^{-(\gamma+\beta)t} + Be^{-(\gamma-\beta)t}$ که در اینجا $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ است. اگر به ازای $t = 0$ داشته باشیم $x = x_0$ و $v = 0$ ، مقادیر A و B را پیدا کنید. منحنی نمایش x را بر حسب t رسم کنید.

۴۷.۱۲. هنگامی که $\gamma = \omega$ باشد پاسخ معادله (۵۴.۱۲) به چه صورتی در می‌آید؟ با جانشین کردن مستقیم تحقیق کنید که در این حالت پاسخ عمومی معادله (۵۲.۱۲) عبارت است از $x = (A + Bt)e^{-\gamma t}$. در این صورت گفته می‌شود که نوسانگر ددیوایی بحرانی^۲ است. اگر به ازای $t = 0$ داشته باشیم $x = x_0$ و $v = 0$ ، A و B را پیدا کنید. نمودار x را بر حسب t رسم کنید. چه فرقی بین این مسئله و مسئله پیش مشاهده می‌کنید؟

۴۸.۱۲. ثابت کنید که در یک حرکت نوسانی میرا سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v = A'e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha + \delta).$$

در این رابطه $A'\omega = A$ و $\tan \delta = -\omega/\gamma$ است.

۴۹.۱۲. دوره یک آونگ ساده 2π و دامنه آن 2° می‌باشد. بعد از ۱۰ نوسان کامل، دامنه آن به 1° کاهش می‌یابد. ثابت میرایی γ را پیدا کنید.

۵۰.۱۲. مقادیر حدی دامنه و فаз یک نوسانگر واداشته میرا را هنگامی که (الف) ω خیلی کوچکتر از ω_0 است، (ب) ω خیلی بزرگتر از ω_0 است، پیدا کنید. در هر مورد،

عاملی را که نقش مهمتری دارد تعیین کنید.

۵۱.۱۲. ثابت کنید که برای نوسانهای واداشته یک نوسانگر میرا، توان میانگین نیروی وارد شده با توان میانگین تلف شده توسط نیروی ناشی از میرایی برابر است.

۵۲.۱۲. با مراجعه به آونگ مسئله ۴۹.۱۲، توان لازم برای ثابت نگه داشتن دامنه نوسانها را حساب کنید. جرم آونگ 1 kg است.

۵۳.۱۲. در مورد یک نوسانگر میرا، کمیت $\tau = 1/2\gamma$ زمان واهلش^۱ نامیده می شود. (الف) تحقیق کنید که τ بر حسب یکای زمان بیان می شود. (ب) تغییر دامنه یک نوسانگر بعد از زمان τ چقدر است؟ (ج) زمان لازم را برای اینکه دامنه به نصف مقدار اولیه خود برسد، به صورت تابعی از τ پیدا کنید. (د) مقدار دامنه در انتهای زمانی مساوی با دو، سه، ... برابر مقدار به دست آمده در سؤال (ج) چقدر است؟

۵۴.۱۲. فرض کنید که برای یک نوسانگر میرا، γ در مقابل ω خیلی کوچک باشد، به گونه ای که دامنه در مدت یک نوسان اساساً ثابت بماند. (الف) تحقیق کنید که انرژی این نوسانگر میرا را می توان به صورت $E = m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}/2$ نوشت. (ب) میانگین اتلاف توان با رابطه $P = -dE/dt$ تعریف می شود. ثابت کنید که $P = 2\gamma E = E/\tau$. (ج) ثابت کنید که این اتلاف توان با کار نیروی میرایی در واحد زمان برابر است.

۵۵.۱۲. در یک نوسانگر واداشته، هنگامی که پاگیری انگاری با مقاومت برابر است، $X = \pm R$ یا $\omega_f - \omega_0 = \pm 2\gamma\omega_f$ ، ثابت کنید که $\omega_f/2 = (P_{ave})_{ave}$. اختلاف $(\Delta\omega)_{1/2}$ بین دو مقدار ω_f در این حالت، چنانی نواد^۲ نوسانگر و نسبت $Q = \omega/(\Delta\omega)_{1/2}$ مقدار Q نوسانگر نامیده می شود. ثابت کنید که در میراییهای ضعیف $(\Delta\omega)_{1/2} = 2\gamma$ و در نتیجه $Q = \omega_0/2\gamma$ است. [داهنمایی: از معادله های (۷۰.۱۲) و (۷۱.۱۲) با مقادیر مناسب برای R و Z استفاده کنید].

۵۶.۱۲. (الف) مقدار میانگین انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانهای واداشته یک نوسانگر میرا را پیدا کنید. (ب) نسبت مجموع این دو انرژی را بر کار انجام شده توسط نیروی وارد در طول یک دوره حساب کنید. این سازه برای نشان دادن عملکرد نوسانگر بسیار مفید است. ثابت کنید که در میراییهای ضعیف، این سازه برابر است با $Q/2\tau$. (مسئله ۵۵.۱۲ را ببینید.)

۵۷.۱۲. معادله حرکت یک نوسانگر هماهنگ ساده نامیرا را که نیروی $F = F_0 \cos \omega_f t$ بر آن وارد می شود، بنویسید. تحقیق کنید که پاسخ آن عبارت است از

$$x = [F_0/m(\omega_0^2 - \omega_f^2)] \cos \omega_f t.$$

در این حالت بازآوایی را مطالعه کنید.

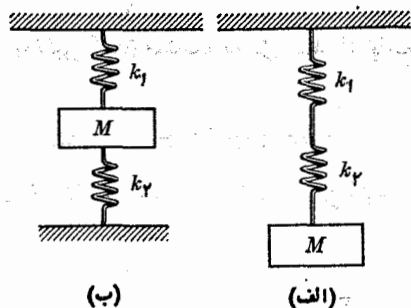
۵۸.۱۲. ثابت کشسانی فرهای شکل ۴۷.۱۲ بترتیب برابرند با k_1 و k_2 . ثابت کشسانی

دستگاه دوفزر، k ، را در حالت‌های (الف) و (ب) پیدا کنید.

۵۹۰۱۲. ذره‌ای بدون مالش بین دو صفحه شیب‌دار (شکل ۴۸۰۱۲) حرکت رفت و برگشت انجام می‌دهد. (الف) اگر ارتفاع اولیه ذره h باشد، دوره حرکت را پیدا کنید. (ب) آیا حرکت نوسانی است؟ (ج) آیا حرکت هماهنگ ساده است؟



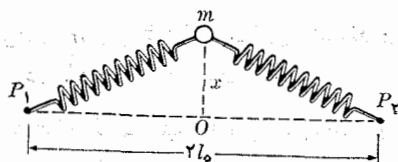
شکل ۴۸۰۱۲



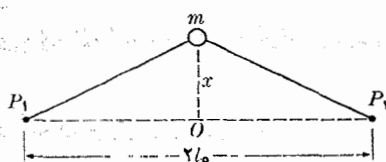
شکل ۴۷۰۱۲

۶۰۰۱۲. ذره‌ای به جرم m که روی یک میز افقی بدون مالش قرار دارد (شکل ۴۹۰۱۲)، توسط دو نخ کشیده با طول‌های برابر l که انتهای دیگر نخ‌ها در نقطه‌های P_1 و P_2 ثابت شده‌اند نگهداری می‌شود. کشش نخ‌ها برابر T است. اگر ذره را به اندازه x که نسبت به طول نخ‌ها کوچک است، کشیده و سپس رها کنند، حرکتی که از این کار نتیجه می‌شود چیست؟ بسامد نوسان را پیدا کنید و معادله حرکت را بنویسید. فرض کنید که طول و کشش نخ‌ها تغییر نمی‌کند.

۶۱۰۱۲. در شکل ۵۰۰۱۲ ذره در شرایطی مشابه با مسئله پیش قرار گرفته است، ولی با دو فنر که ثابت کشسانی هر کدام k و طول طبیعی آنها l_0 است نگهداری می‌شود. اطلاعات خواسته شده در مسئله پیش را به دست آورید. توجه کنید که در اینجا افزایش طول فنرها را باید به حساب آورد.



شکل ۵۰۰۱۲



شکل ۴۹۰۱۲

۶۲۰۱۲. مسئله پیش را، به فرض اینکه جابجایی ذره در طول P_1P_2 ، مطابق شکل ۵۱۰۱۲ صورت گیرد، از نو حل کنید.

۶۳۰۱۲. ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی مطابق شکل ۵۲۰۱۲ قرار دارد، که موج

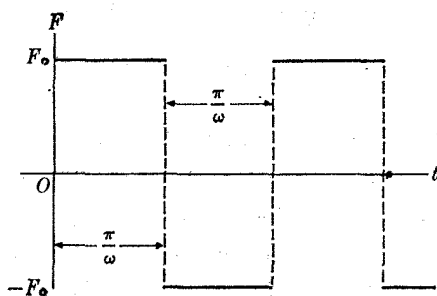
مربعی نامیده می‌شود، یعنی بزرگی نیرو ثابت است ولی سوی آن درفاصله‌های زمانی منظم π/ω معکوس می‌شود. این نیرو را توسط رشته فوریه به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$F = F_0 (\pi/\omega) \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

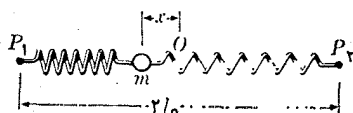
(الف) معادله حرکت ذره را بنویسید. (ب) با جانشین کردن مستقیم، تحقیق کنید که پاسخ آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = a + bt + A \sin \omega t + B \sin 3\omega t + C \sin 5\omega t + \dots$$

که در آن a و b ثابتهای اختیاری‌اند. ضرایب A ، B ، C ، ... را به گونه‌ای تعیین کنید که در معادله حرکت صدق کنند.



شکل ۵۲.۱۲



شکل ۵۱.۱۲

۶۴.۱۲. به یک نوسانگر هماهنگ با بسامد طبیعی ω نیرویی برابر با نیروی مسئله پیش اثر می‌کند. (الف) معادله حرکت را بنویسید. (ب) با جانشین کردن مستقیم، تحقیق کنید که پاسخ آن را می‌توان به صورت

$$x = a \sin(\omega_0 + \alpha) + A \sin \omega t + B \sin 3\omega t + C \sin 5\omega t + \dots$$

نوشت. a و α ثابتهای اختیاری‌اند. مقدار ضرایب A ، B ، C ، ... را به گونه‌ای تعیین کنید که در معادله حرکت صدق کنند.

۶۵.۱۲. ثابت کنید که انرژی پتانسیل یک آونگ را می‌توان به صورت

$$E_p = 2mgl \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

نوشت. سپس با به کار بردن معادله (۱۳.۱۲) نشان دهید که

$$P = \sqrt{l/g} \int_0^\theta d\theta / \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \theta_0 - \sin^2 \frac{1}{2} \theta}.$$

این انتگرال را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی^۱ نوشت. درانتگرال به گونه‌ای تغییر متغیر می‌دهیم که $\sin \theta / 2 = \sin \psi \sin \theta_0 / 2$ باشد. ψ متغیر جدیدی است که وقتی θ از ۰ به θ_0 می‌رسد از ۰ تا $\pi/2$ تغییر می‌کند. سپس رادیکال را، با استفاده از معادله (پ.۲۲)، به صورت رشته بسط دهید، بالاخره از نتیجه انتگرال بگیرید تا رابطه P به صورت بسط رشته که دربخش ۵.۱۲ بیان شده، به دست آید.

۶۶.۱۲. در یک حرکت هماهنگ ساده، $E_p = kx^2/2$ است. (الف) برای به دست آوردن دوره حرکت هماهنگ ساده، معادله (۱۳.۱۲) را به کار ببرید و تحقیق کنید که نتیجه با معادله (۷.۱۲) سازگار است. (ب) نشان دهید که از معادله (۳۴.۸)، به ازای $x_0 = 0$ به دست می‌آید

$$\arcsin(x/A) = \omega t + \alpha$$

که در آن $A^2 = 2E/k$ است. تحقیق کنید که این رابطه با معادله (۱۰.۱۲) مطابقت دارد.

۶۷.۱۲. ذره‌ای را در نظر بگیرید که بر اثر یک پتانسیل ناهماهنگ

$$E_p(x) = \frac{1}{4} kx^2 - \frac{1}{3} ax^3$$

نوسان می‌کند. در این رابطه a مثبت و خیلی کوچکتر از k است. (الف) منحنی نمایش $E_p(x)$ را رسم کنید. آیا این منحنی نسبت به مقدار $x = 0$ متقارن است؟ بنا به پاسخ پیش، هنگامی که انرژی افزایش می‌یابد مرکز نوسان به چه سمتی جابجا می‌شود؟ آیا انتظار دارید که x_{ave} برابر صفر باشد؟ (ب) نیرو را به صورت تابعی از x حساب و نمودار آن را رسم کنید. اثر جمله ناهماهنگی روی نیرو چیست؟

۶۸.۱۲. با مراجعه به مسئله پیش، (الف) معادله حرکت را بنویسید. (ب) به عنوان پاسخ معادله حرکت، $x = A \cos \omega t + B \cos 2\omega t + x_1$ را آزمایش کنید. در این رابطه دو جمله آخر از ناهماهنگ بودن حرکت ناشی شده‌اند. (ج) آیا این پاسخ می‌تواند دقیق باشد؟ (د) با صرف نظر کردن از جمله‌هایی که دارای حاصل ضربهای A و B یا توانهای بالاتر از یک B هستند، ثابت کنید که $\omega = \omega_0$ ، $x_1 = \alpha A^2/2\omega_0^2$ و $B = -\alpha A^2/6\omega_0^2$ است. می‌دانیم که $\omega_0 = k/m$ و $\alpha = a/m$ هستند. [دانهمایی: از رابطه مثلثاتی

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t)$$

استفاده کنید.]

۶۹.۱۲. مسئله ۶۷.۱۲ را به فرض اینکه انرژی پتانسیل برابر

$$E_p(x) = \frac{1}{4} kx^2 - \frac{1}{4} ax^4$$

باشد از نو حل کنید. در اینجا نیز a خیلی کوچکتر از k است.

۷۰.۱۲. با مراجعه به مسئله پیش، (الف) معادله حرکت را بنویسید. (ب) به عنوان پاسخ $x = A \sin \omega t + B \sin 3\omega t$ را آزمایش کنید. جمله آخر از ناهماهنگی ناشی می شود. (ج) آیا این پاسخ می تواند دقیق باشد؟ (د) با صرف نظر کردن از کلیه جمله هایی که شامل حاصل ضربهای A و B و توانهای بالاتر از یک B هستند، نشان دهید که

$$B = \alpha A^3 / 4(9\omega^2 - \omega_0^2) \quad \text{و} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - 3\alpha A^2 / 4$$

است. در اینجا α و ω همان تعریفهای مسئله پیش را دارند. [دانهمایی: از رابطه مثلثاتی $\sin^3 \omega t = 3(\sin \omega t)/4 - (\sin 3\omega t)/4$ استفاده کنید.]

۷۱.۱۲. با مراجعه به مسئله های ۶۸.۱۲ و ۷۰.۱۲، مقادیر x_{ave} و $(x^2)_{\text{ave}}$ را حساب کنید. میانگین نسبت به زمان گرفته می شود. آنها را با نتایج مربوط به حرکت هماهنگ ساده مقایسه کنید. (به مسئله ۱۷.۱۲ مراجعه کنید.)

۷۲.۱۲. نتایج مسئله ۷۰.۱۲ را برای یک آونگ ساده به کار ببرید. برای این کار در رابطه F_T در ابتدای بخش ۵.۱۲، به جای $\sin \theta$ دو جمله اول بسط آن را از معادله (پ. ۲۵) قرار دهید. به دست می آورید

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t + (\theta_0^3 / 192) \sin 3\omega t \quad \text{و} \quad \omega \approx \omega_0 (1 - \theta_0^2 / 16).$$

از روی مقدار ω نتیجه ای را که در پایان بخش ۵.۱۲ برای دوره P به دست آمد، مستقیماً حساب کنید.

قسمت دوم برهم کنشها و میدانها

اکنون که قوانین حاکم بر حرکتها را فهمیدیم، مرحله بعدی عبارت است از بررسی برهم-کنشهایی که به وجود آورنده این حرکتها هستند. چندین نوع برهم-کنش وجود دارد. یکی از آنها برهم-کنش گرانشی است که در حرکت سیاره‌ها و حرکت ماده کیهانی پدیدار می‌شود. هر چند گرانش بین برهم-کنشهای شناخته شده از همه ضعیفتر است، ولی اولین برهم-کنشی است که به‌طور دقیق مورد مطالعه قرار گرفته است و این به دلیل توجهی است که بشر از گذشته‌های دور به نجوم داشته است و نیز به سبب اینکه گرانش پاسخگوی پدیده‌های زیادی است که مستقیماً بر زندگی ما اثر می‌گذرانند. برهم-کنش دیگر، برهم-کنش الکترومغناطیسی است که بهتر از همه شناخته شده است و شاید از دیدگاه زندگی روزمره مهمترین برهم-کنش باشد. بیشترین پدیده‌هایی که اطراف خود مشاهده می‌کنیم، از جمله فرآیندهای شیمیایی و زیست‌شناسی، نتیجه برهم-کنشهای الکترومغناطیسی بین اتمها و مولکولها هستند. سومین نوع برهم-کنش، برهم-کنش قوی یا هسته‌ای^۱ است که عامل به هم پیوستگی پروتونها و نوترونها (که هستک خوانده می‌شوند) در داخل هسته اتم و سایر پدیده‌های مربوط به آنهاست. با وجود پژوهشهای بسیاری در این مورد صورت گرفته هنوز اطلاعات ما از این برهم-کنش بسیار ناقص است. نوع چهارم، برهم-کنش ضعیف^۲ است که پاسخگوی بعضی فرآیندها بین ذرات بنیادی، مانند واپاشی بتایی است. شناخت ما از این برهم-کنش نیز بسیار محدود است. شدت نسبی این برهم-کنشها از این قرارند: اگر شدت برهم-کنش قوی را برابر واحد اختیار کنیم، شدت برای برهم-کنش الکترومغناطیسی تقریباً 10^{-2} ، برای برهم-کنش ضعیف تقریباً 10^{-5} و برای برهم-کنش گرانشی تقریباً 10^{-38} خواهد بود. یکی از مسائلی که هنوز در فیزیک حل نشده باقی مانده این است که چرا فقط چهار برهم-کنش وجود دارد و چرا شدتهای آنها این اندازه باهم اختلاف دارند.

جالب است بدانیم حدود ۲۰۰ سال پیش ایزاک نیوتون راجع به برهم-کنش گفته است:

«آیا ذرات ریز اجسام دارای نوعی توان یا نیرو نیستند، که از طریق آنها . . . روی یکدیگر اثر می‌کنند تا بخش بزرگی از پدیده‌های طبیعت را به وجود آورند؟ زیرا می‌دانیم که اجسام توسط جاذبه‌های گرانشی، مغناطیسی، الکتریکی بر یکدیگر اثر می‌کنند؛ . . . بعید نیست که غیر از اینها قدرتهای جاذبه‌ای دیگری هم وجود داشته باشد. . . اینکه چگونه این نیروهای جاذبه عمل می‌کنند، در اینجا مورد بررسی قرار نمی‌دهم. . . اثر جاذبه‌های گرانشی، مغناطیسی و الکتریکی به فاصله‌های قابل ملاحظه‌ای می‌رسند، . . . و احتمال دارد جاذبه‌های دیگری نیز باشند که اثر آنها به فاصله‌های خیلی کوچک و غیر قابل مشاهده برسند. . .»^۳

برای توصیف این برهم-کنشها، مفهوم میدان را وارد می‌کنیم. منظور از میدان یک خاصیت فیزیکی است که در ناحیه‌ای از فضا گسترده است و با تابعی از زمان و مکان بیان می‌شود. برای هر برهم-کنش فرض می‌کنیم یک ذره در اطراف خود میدان مربوط به آن برهم-کنش را به وجود می‌آورد. این میدان به نوبه خود روی ذره دیگر می‌کند تا برهم-کنش

1. strong (nuclear) interaction
3. Opticks, Book III, Query 31

2. weak interaction

مورد نظر را به وجود آورد. ذره دوم نیز میدان ویژه خود را به وجود می آورد که روی ذره اول اثر می کند، بدین طریق برهم کنش متقابل حاصل می شود.

حتی اگر بتوان برهم کنشها را به وسیله میدان توصیف کرد، تمام میدانها الزاماً به برهم کنش مربوط نیستند، و این حقیقتی است که به طور ضمنی در تعریف میدان نهفته است. به عنوان مثال، یک هواشناس می تواند فشار یا دمای جو را بر حسب طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع نسبت به سطح زمین بیان کند. بدین ترتیب دو میدان اسکالر خواهیم داشت: میدان فشار و میدان دما. در حرکت شاره ها، در هر نقطه سرعت شاره یک میدان برداری تشکیل می دهد. بنا بر این مفهوم میدان کاربردهای بسیار فراوان و گسترده ای در فیزیک دارد.

در فصل ۱۳ به مطالعه برهم کنش و میدان گرانشی می پردازیم. در فصلهای ۱۴ تا ۱۷ (در جلد دوم) برهم کنشهای الکترومغناطیسی را بررسی خواهیم کرد. سایر برهم کنشها در جلد سوم مورد مطالعه قرار می گیرند.

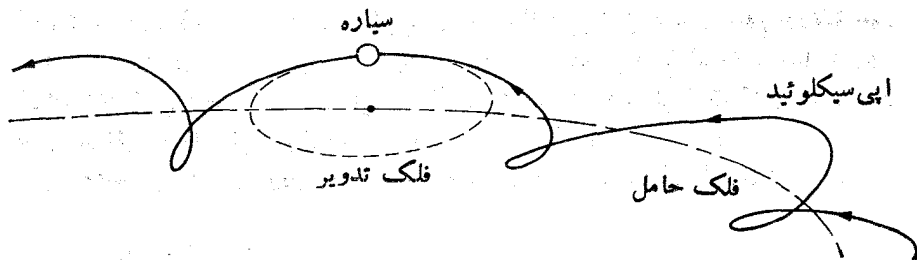
برهم کنش گرانشی

مقدمه	۱۰۱۳
قانون گرانش	۲۰۱۳
جرم لختی و جرم گرانشی	۳۰۱۳
انرژی پتانسیل گرانشی	۴۰۱۳
حرکت کلی بر اثر برهم کنش گرانشی	۵۰۱۳
میدان گرانشی	۶۰۱۳
میدان گرانشی ناشی از جسم کروی	۷۰۱۳
اصل هم ارزی	۸۰۱۳
گرانش و نیروهای بین مولکولی	۹۰۱۳

یکی از مسایل اساسی دینامیک که از سپیده دم تمدن، بشر را به خود جلب می کرده حرکت اجرام سماوی، یا آنچنانکه امروزه می گوئیم، حرکت سیاره ها بوده است. تکامل شناخت ما از حرکت سیاره ها شاید یکی از جالبترین پیشرفتهای تاریخ علم باشد.

یونانیها که دوست داشتند انسان را مرکز عالم بدانند، فرض می کردند زمین نیز در مرکز هندسی کائنات قرار دارد و سایر اجسام سماوی به دور زمین می گردند. اجرامی که در آن زمان می شناختند، برحسب میانگین فاصله آنها از زمین، بدین ترتیب بودند: ماه، عطارد (تیر)^۱، زهره (ناهید)^۲، خورشید، مریخ (بهرام)^۳، مشتری (برجیس)^۴ و زحل (کیوان)^۵.

اولین فرضیه مربوط به حرکت سیاره ها این بود که سیاره های فوق دایره های هم-مرکزی را می پیمایند که زمین مرکز مشترک همه آنهاست. ولی این فرضیه با حرکت های مشاهده شده این اجرام نسبت به زمین مطابقت نداشت، و بررسی هندسی حرکت سیاره ها را بیش از پیش پیچیده کرد. در قرن دوم بعد از میلاد، بطلمیوس^۶ منجم اهل اسکندریه، نظریه فلک تدویر (اپی سیکل)^۷ را برای تشریح حرکت سیاره ها پایه گذاری کرد. در ساده ترین حالت، فرض می شد سیاره با حرکت یکنواخت، دایره ای به نام فلک تدویر را می پیماید، و مرکز این دایره نیز، به نوبه خود، دایره بزرگتری به مرکز زمین به نام فلک حامل (دفرت)^۸ را طی می کند. در نتیجه مسیر سیاره یک اپی سیکلوئید^۹ می شود (شکل ۱۰۱۳). در بعضی حالتها ترتیبهای بسیار پیچیده تری برای تشریح حرکت سیاره ها لازم بود. به زبان امروزی، یونانیها حرکت سیاره ها را نسبت به یک چهارچوب مرجع متصل به زمین توضیح می دادند.



شکل ۱۰۱۳. مدل اپی سیکلوئید برای حرکت سیاره ها نسبت به زمین

این توضیح تا قرن شانزدهم درست تلقی می شد و پذیرش کلی یافته بود، تا اینکه در این زمان نیکولاس کپرنیک^{۱۰} (۱۴۷۳-۱۵۴۳) [۸۵۲-۹۲۲ ه. ش.] کشیش لهستانی که در جستجوی یک پاسخ ساده برای حرکت سیاره ها بود پیشنهاد کرد حرکت کلیه سیاره ها وحتى زمین، نسبت به خورشید، که مرکز فرض می شد، بیان شود. این فکر جدیدی نبود، زیرا

1. Mercury	2. Venus	3. Mars	4. Jupiter	5. Saturn
6. Ptolemy	7. epicycle	8. deferent	9. epicyloid	
10. Nicolaus Copernicus				

برای اولین بار در قرن سوم پیش از میلاد آریستارخوس^۱ اخترشناس یونانی این نظر را پیشنهاد کرده بود. به نظر کپرنیک سیاره‌ها به ترتیب فاصله مدارهایشان از خورشید عبارت بودند از عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، و ماه که به دور زمین می‌چرخد. در حقیقت، کپرنیک چارچوب مرجع دیگری را پیشنهاد کرد که به خورشید متصل بود و در این چارچوب توصیف حرکت سیاره‌ها بسیار ساده‌تر می‌شد.

خورشید که بزرگترین جسم دستگاه منظومه ما است عملاً در مرکز جرم دستگاه قرار دارد و خیلی کندتر از دیگر سیاره‌ها حرکت می‌کند. این امر انتخاب خورشید را به عنوان مرکز مرجع توجیه می‌کند، زیرا عملاً یک چارچوب لخت است. پیشنهاد کپرنیک، به کپلر^۲ [۱۵۷۱-۱۶۳۰ (۹۵۰-۱۰۰۹ ه.ش.)] یاری کرد که با بررسی و تجزیه و تحلیل اندازه‌گیریهای بسیار دقیق و ذیقیمت تیکو براهه^۳ [۱۵۴۶-۱۶۰۱ (۹۲۵-۹۸۰ ه.ش.)]، قوانین حرکت سیاره‌ها را کشف کند. این قوانین که به نام قوانین کپلر شناخته شده‌اند، توضیح سینماتیکی حرکت سیاره‌ها هستند و بدین صورت بیان می‌شوند:

۱. سیاره‌ها مدارهای بیضی شکلی را می‌پیمایند که خورشید در یک کانون آنها قرار دارد.

۲. بردار مکان هر سیاره، نسبت به خورشید، در زمانهای برابر مساحت‌های برابر از بیضی خود را جادوب می‌کند. (این قانون، قانون مساحت نیز نامیده می‌شود).

۳. مجذور دوره گردش هر سیاره متناسب است با مکعب فاصله میانگین آن سیاره از خورشید. (این قانون را می‌توان با معادله $P^2 = k r_{ave}^3$ نیز بیان کرد که در آن k ثابت تناسب است).

مرحله بعدی تاریخ نجوم، بحث دینامیک حرکت سیاره‌ها و کوشش برای تعیین برهم‌کنشی بود که باعث یک چنین حرکتی می‌شود. در اینجا بود که ایزاک نیوتون [۱۶۴۲-۱۷۲۷ (۱۰۲۱-۱۱۰۶ ه.ش.)] با بیان قانون گرانش عمومی سهم ارزنده خود را ادا کرد. او این قانون را (که در همین فصل مورد بحث قرار می‌گیرد) در سال ۱۶۶۶ (۱۰۴۵ ه.ش.) فرمولبندی کرد ولی تا سال ۱۶۸۷ (۱۰۶۶ ه.ش.) که آن را به صورت فصلی در اثر جاودانه‌اش اصول ریاضی فلسفه طبیعی^۴ آورد، منتشر نکرد.

مهمترین داده‌های مربوط به منظومه شمسی در جدول ۱۰.۱۳ گردآوری شده‌اند.

۲۰.۱۳ قانون گرانش

دومین و شاید مهمترین سهم نیوتون در پیشرفت مکانیک، بعد از بیان قوانین حرکت (فصل ۷)، کشف قانون برهم‌کنش گرانشی بود؛ یعنی برهم‌کنش بین دو جسم، دو سیاره یا دو ذره کوچک، که حرکتی را به وجود می‌آورد و می‌توان آن را به کمک قوانین کپلر توصیف کرد. قبل از همه، مطابق بخش ۱۴.۷، قانون مساحت (یا قانون دوم کپلر) نشان می‌دهد که نیروی مربوط به برهم‌کنش گرانشی، مرکزی است، یعنی نیرو در راستای خط واصل دو جسم

1. Aristarchus 2. Johannes Kepler 3. Tycho Brahe

4. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*

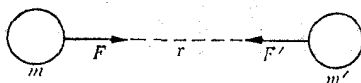
خروج از مرکز مدار	دوره حرکت s	شعاع میانگین مدار m	دوره چرخش s	جرم kg	شعاع میانگین m	جسم
—	—	—	۲۳×۱۰^۶	۱۹۸×۱۰^{۳۰}	۶۹۹۶×۱۰^۸	خورشید
۰۰۲۰۶	۷۶۰×۱۰^۶	۵۷۹×۱۰^{۱۰}	۵۰۳×۱۰^۶	۳۲۸×۱۰^{۲۳}	۲۳۴×۱۰^۶	عطارد
۰۰۵۰۷	۱۹۴×۱۰^۷	۱۰۸×۱۰^{۱۱}	(۹)	۴۸۳×۱۰^{۲۴}	۶۲۶×۱۰^۶	زهره
۰۰۵۱۷	۳۱۶×۱۰^۷	۱۴۹×۱۰^{۱۱}	۸۶۲×۱۰^۴	۵۹۸×۱۰^{۲۴}	۶۳۷×۱۰^۶	زمین
۰۰۵۹۳	۵۹۴×۱۰^۷	۲۲۸×۱۰^{۱۱}	۸۸۶×۱۰^۴	۶۴۰×۱۰^{۲۳}	۳۳۲×۱۰^۶	مریخ
۰۰۵۴۹	۳۷۴×۱۰^۸	۷۷۸×۱۰^{۱۱}	۳۵۴×۱۰^۴	۱۹۰×۱۰^{۲۷}	۶۹۸×۱۰^۷	مشتری
۰۰۵۵۱	۹۳۰×۱۰^۸	۱۴۳×۱۰^{۱۲}	۳۶۱×۱۰^۴	۵۶۸×۱۰^{۲۶}	۵۸۲×۱۰^۷	زحل
۰۰۵۴۶	۲۶۶×۱۰^۹	۲۸۷×۱۰^{۱۲}	۳۵۸×۱۰^۴	۸۶۷×۱۰^{۲۵}	۲۳۷×۱۰^۷	اورانوس
۰۰۵۵۴	۵۲۰×۱۰^۹	۴۵۰×۱۰^{۱۲}	۵۶۹×۱۰^۴	۱۰۵×۱۰^{۲۶}	۲۲۴×۱۰^۷	نپتون
۰۰۲۵۰	۷۸۲×۱۰^۹	۵۹۱×۱۰^{۱۲}	(۹)	(۵۳۷×۱۰^{۲۴})	(۳۰۰×۱۰^۶)	پلوتون
۰۰۵۵۵	۲۳۶×۱۰^۶	۳۸۴×۱۰^۸	۲۳۶×۱۰^۶	۷۳۴×۱۰^{۲۲}	۱۷۴×۱۰^۶	ماه

* مقادیر داخل پرانتز اعداد مطمئنی نیستند. داده‌های مدار ماه نسبت به زمین حساب شده‌اند.

برهم کنش کننده (شکل ۲۰۱۳)، در این مورد در راستای خط واصل خورشید و سیاره، اثر می‌کند. حال اگر فرض شود برهم کنش گرانشی یک ویژگی عمومی همه مواد است، F ، نیروی وابسته به این برهم کنش باید با «مقدار» ماده در هر جسم، یعنی با جرم آنها، m و m' ، متناسب باشد. بنا بر این می‌توانیم بنویسیم

$$F = m m' f(r).$$

تعیین بستگی نیروی F با فاصله r ، یا $f(r)$ ، مسئله دشواری است. برای تعیین این بستگی به طور تجربی می‌توانیم نیروی بین دو جرم m و m' را در فاصله‌های مختلف اندازه‌گیری کنیم و از روی مشاهدات خود رابطه بین r و F را نتیجه بگیریم، این اندازه‌گیری صورت گرفته است، ولی انجام آن به وسایل آزمایش بسیار دقیقی نیاز دارد. زیرا برهم کنش گرانشی بسیار ضعیف و نیروی گرانش بسیار کوچک است، مگر اینکه جرمها



شکل ۲۰۱۳. برهم کنش گرانشی بین دو جرم

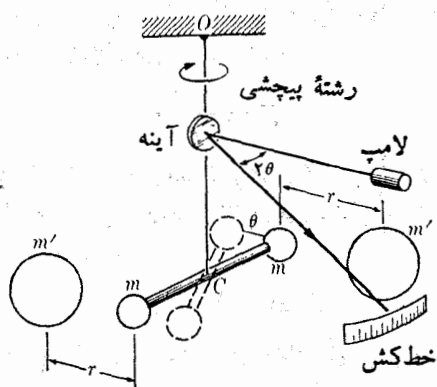
(مانند جرم دو سیاره) بسیار بزرگ، یا فاصله r خیلی کوچک باشد. ولی در حالت اخیر، چنانکه بعداً خواهیم دید، برهم کنشهای قویتر از گرانش وارد عمل می‌شوند و اثر گرانشی را کاملاً تحت الشعاع قرار می‌دهند. نتایج آزمایشهای انجام یافته اجازه می‌دهند نتیجه بگیریم که برهم کنش گرانشی به صورت جاذبه است و متناسب با عکس مجذور فاصله دو جسم تغییر می‌کند؛ یعنی $f(r) \propto 1/r^2$. بنا بر این برای نیروی گرانش رابطه زیر را می‌توان نوشت:

$$F = \gamma \frac{m m'}{r^2}. \quad (۱۰۱۳)$$

ثابت تناسب γ به یکاهای به کار برده شده برای سایر کمیتها بستگی دارد. از اینجاست که γ را باید از طریق تجربی، با اندازه‌گیری F ، نیروی بین دو جرم معلوم m و m' که در فاصله معلوم r از یکدیگر قرار دارند، به دست آورد (شکل ۳۰۱۳). مقدار γ در دستگاه یکاهای MKSC برابر است با

$$\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \text{ (یا } \text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\text{)}.$$

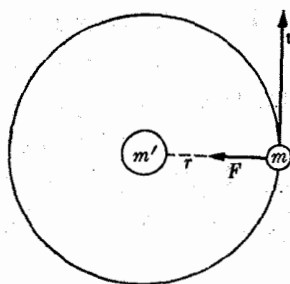
در این صورت قانون گرانش عمومی نیوتون را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: برهم کنش گرانشی بین دو جسم را می‌توان با یک نیروی مرکزی جاذبه‌ای، متناسب با جرمهای این دو جسم و با عکس مجذور فاصله آنها، بیان کرد. هنگام گفتگو از معادله (۱۰۱۳)، یاد آور شدیم که برهم کنش گرانشی بین دو جرم را می‌توان از طریق آزمایش به دست آورد، ولی این گفته الزاماً بدین معنی نیست که برهم کنش گرانشی عامل حرکت سیاره‌ها مطابق قانون کپلر است. درواقع، نیوتون به این شیوه



شکل ۳.۱۳. ترازوی پیچشی کوندیش^۱. هنگامی که جرم m' در نزدیکی جرم m قرار گیرد، جاذبه گرانشی این دو جرم گشتاور نیرویی بر میله افقی وارد می کند، که موجب می شود سیم OC بپیچد. هنگامی که گشتاور نیروی گرانشی و گشتاور نیروی پیچشی با هم برابر شوند تعادل برقرار می شود. گشتاور پیچشی با زاویه θ متناسب است، که این زاویه را از روی انحراف نور بازتابیده از آینه ای که روی سیم نصب شده است اندازه می گیرند. با تغییر فاصله های r و تعویض جرم های m و m' می توان قانون (۱.۱۳) را تحقیق کرد.

عمل نکرد، بلکه برعکس، با استفاده از قوانین کپلر، به معادله (۱.۱۳)، که نیروی لازم بین دو سیاره را به دست می دهد رسید، سپس نتیجه را در مورد هر دو جرم دیگری تعمیم داد. اکنون روش نیوتون را به صورت ساده شده ای مورد بحث قرار می دهیم و تحلیل کلی تر در این مورد را به بخش ۵.۱۳ واگذار می کنیم.

قانون اول کپلر می گوید که مدار حرکت هر سیاره یک بیضی است. دایره حالت خاصی از بیضی است که در آن دو کانون در نقطه ای به نام مرکز روی هم منطبق شده اند. در این حالت، مطابق قانون دوم، نیروی F به سوی مرکز دایره است. در نتیجه، با استفاده



شکل ۴.۱۳. حرکت ذره m بر اثر برهم کنش گرانشی آن با ذره m'

از معادله (۲۸.۷) برای نیروی مرکزگرا و با توجه به حرکت دایره‌ای m در یک چارچوب مرجع متصل به m' ، (شکل ۴.۱۳)، می‌توان نوشت

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

به گفته دقیقتر، باید به جای m مطابق معادله (۱۵.۹) جرم کاهش‌یافته دستگاه متشکل از m و m' را به کار ببریم، ولی ساده کردن رابطه، نتایج مورد نظر ما را تغییر نمی‌دهد. با توجه به اینکه $v = 2\pi r/P$ است، داریم

$$F = 4\pi^2 mr/P^2.$$

در این صورت، قانون سوم کپلر، در حالت خاص مدار دایره‌ای، وقتی که فاصله میانگین بین m و m' برابر شعاع دایره است به شکل $P^2 = kr^3$ در می‌آید. بنابراین

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای تحقق قوانین کپلر، برهم‌کنش گرانشی باید مرکزی و متناسب با عکس مجذور فاصله باشد.

نیوتون برای اطمینان از درستی فرض خود، شتاب مرکز گرای ماه را با شتاب گرانی $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ مقایسه کرد. شتاب مرکز گرای ماه برابر است با $a_c = v^2/r = 4\pi^2 r/P^2$

$$\text{به ازای } P = 2.36 \times 10^6 \text{ s و } r = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

بنابراین $a_c = 2.72 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$ است. در نتیجه

$$g/a_c = 3602 \approx (60)^2.$$

چون شعاع زمین برابر $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ است، داریم

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{3.84}{6.37}\right)^2 \approx (60)^2.$$

بنابراین $g/a_c = (r/R)^2$ است، و در حدود دقت محاسبه ساده ما، دو شتاب متناسب‌اند با عکس مجذور فاصله هر یک از نقاط تا مرکز زمین.

مثال ۱۰.۱۳. رابطه بین شتاب گرانی و جرم زمین را پیدا کنید. با استفاده از پاسخی که به دست می‌آید جرم زمین را برآورد کنید.

حل: ذره‌ای به جرم m را در سطح زمین در نظر بگیرید. فاصله این ذره از مرکز زمین برابر است با R ، شعاع زمین. اگر جرم زمین را M فرض کنیم، بنا به معادله (۱۰.۱۳) نیروی وارد بر ذره m برابر است با

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}.$$

این نیرو همان چیزی است که در معادله (۱۶.۷)، به عنوان وزن جسم تعریف شد، از این رو باید

برابر mg باشد که در آن g شتاب گرانی است. بنابراین

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2}.$$

با حذف m از طرفین معادله به دست می‌آید

$$g = \gamma M / R^2.$$

این رابطه شتاب گرانی را بر حسب جرم و شعاع زمین به دست می‌دهد. توجه کنید که در این رابطه جرم خود جسم ظاهر نمی‌شود. بدین طریق (اگر مقاومت هوا نادیده گرفته شود)، تمام اجسام باید با شتاب یکسان سقوط کنند، که این با مشاهدات ما سازگار است. با حل رابطه فوق نسبت به M ، جرم زمین به دست می‌آید:

$$M = gR^2 / \gamma.$$

با قرار دادن مقادیر عددی مناسب، $g = 9.80 \text{ ms}^{-2}$ و $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ، به دست می‌آید

$$M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

دانشجو توجه دارد که در حل این مسئله فاصله جرم m تا مرکز زمین را به کار بردیم، به گفته دیگر، به طور ضمنی پذیرفتیم که نیروی وارد بر m همان نیرویی است که اگر تمام جرم زمین در مرکز آن متمرکز می‌بود، روی m اثر می‌کرد؛ فرضی که در بخش ۷.۱۳ درستی آن را ثابت خواهیم کرد.

مثال ۷.۱۳. جرم سیاره‌ای را که دارای یک قمر می‌باشد حساب کنید.

حل: فرض کنیم قمری به جرم m ، با دوره P ، یک مدار دایره‌ای به شعاع r را دور سیاره‌ای به جرم M می‌پیماید. نیروی جاذبه بین سیاره و قمر برابر است با

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

این نیرو باید m برابر شتاب مرکزگرای $v^2/r = 4\pi^2 r / P^2$ باشد. بنابراین

$$\frac{4\pi^2 mr}{P^2} = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

با حذف سازه مشترک m از طرفین، می‌توان M را حساب کرد:

$$M = 4\pi^2 r^3 / \gamma P^2.$$

به دانشجو توصیه می‌کنیم با استفاده از رابطه فوق و با به کار بردن داده‌های عددی مربوط به ماه ($r = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$ و $P = 2.36 \times 10^6 \text{ s}$)، جرم زمین را از نو به دست آورد. تطبیق عدد به دست آمده با نتیجه مثال ۷.۱۳ دلیلی است بر سازگاری نظریه.

با بهره‌گیری از داده‌های مربوط به سیارات مختلف می‌توان این فرمول را برای به دست آوردن جرم خورشید نیز مورد استفاده قرار داد.

۳.۱۳ جرم لختی و جرم گرانشی

در فصل ۷، جرم را در رابطه با قوانین حرکت تعریف کردیم، و به همین سبب آن را جرم لختی نامیدیم. همچنین فرض کردیم که قوانین حرکت دارای اعتبار عام هستند، بنا براین برای هر ماده‌ای چه الکترون، چه پروتون، چه نوترون، یا مجموعه این ذرات، یکسانند. از طرف دیگر، در اینجا از برهم کنش ویژه‌ای به نام گرانش گفتگو کردیم. برای مشخص کردن شدت این برهم کنش باید به هر بخش از ماده یک بار گرانشی یا جرم گرانشی m_g نسبت داد. در این صورت معادله (۱۰۱۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$F = \gamma \frac{m_g m'_g}{r^2}$$

ولی اگر بپذیریم که گرانش یک خاصیت عمومی برای هر نوع ذره است، می‌توان جرم گرانشی را متناسب با جرم لختی در نظر گرفت، بنا براین نسبت آنها،

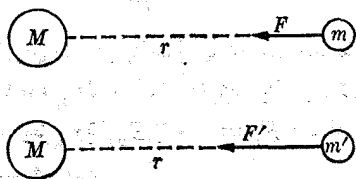
$$K = \frac{\text{جرم گرانشی } m_g}{\text{جرم لختی } m}$$

باید برای تمام اجسام یکی باشد. با انتخاب یکاهای مناسب برای m_g ، می‌توان این نسبت را برابر واحد قرارداد و در نتیجه برای نمایش جرم لختی و جرم گرانشی یک عدد به کار برد. ما در گزینش مقدار برای ثابت γ این کار را به طور ضمنی انجام دادیم. ثابت ماندن K که با ثابت ماندن γ هم ارز است، با آزمایش برای هر گونه جسمی و با دقت‌های زیاد مورد تحقیق قرار گرفته است و می‌توان آن را فرضیه محکمی دانست. این واقعیت اثبات شده که در نزدیکی سطح زمین کلیه اجسام با شتاب یکسان سقوط می‌کنند، نشان می‌دهد که جرم‌های لختی و گرانشی با هم برابرند، زیرا با این فرض، چنانکه در مثال ۱۰۱۳ بحث شد، شتاب گرانی برابرست با $g = \gamma M/R^2$ ، و g به جرم جسمی که می‌افتد بستگی ندارد. به همین جهت از این به بعد برای نشان دادن جرم، خواه جرم گرانشی و خواه جرم لختی، تنها کلمه «جرم» را به کار خواهیم برد، زیرا این دو را نمی‌توان از یکدیگر متمایز ساخت. اکنون می‌توان از معادله (۱۰۱۳) یکای جرم را تعریف کرد، و آن جرمی است که اگر در فاصله واحد از جرم برابر خود قرار گیرد آن را با نیرویی برابر با γ جذب می‌کند. با اختیار یک مقدار مناسب برای γ می‌توان هر یکایی برای جرم را تعریف کرد. با وجود این، گزینش دلخواه برای γ ممکن است ساختار معادله‌های مکانیک را تغییر دهد. یک دشواری دیگر در تعریف یکای جرم این است که قبلاً باید یکایی برای نیرو تعریف شده باشد. از این رو به این شیوه عمل نمی‌کنیم. به جای آن، چنانکه قبلاً نیز اشاره کردیم، از روش عکس پیروی می‌کنیم، یعنی پس از انتخاب یکای جرم و نیرو، مقدار γ را از راه آزمایش به دست می‌آوریم.

یکی از راه‌های اندازه‌گیری یا مقایسه جرم دو جسم، استفاده از یک جسم سوم به عنوان

مرجع است. فرض کنید جرمهای m و m' به فاصله یکسان r از جرم مرجع M قرار دارند (شکل ۵.۱۳). بنا به معادله (۱.۱۳) نیروهای وارد بر m و m' عبارتند از

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} \quad \text{و} \quad F' = \gamma \frac{Mm'}{r^2}.$$

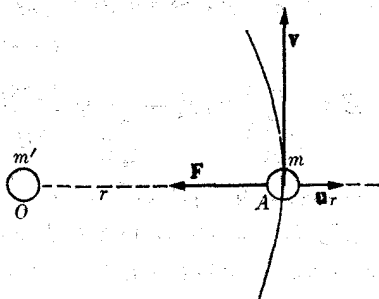


شکل ۵.۱۳. روش مقایسه دو جرم m و m' از طریق برهم کنش گرانشی آنها با جرم سوم M .

نسبت این دو نیرو برابر است با $F/F' = m/m'$. در نتیجه، اگر روشی برای مقایسه دو نیرو، بدون نیاز به اندازه گیری آنها وجود داشته باشد، رابطه بالایی برای اندازه گیری و مقایسه جرمها به دست می دهد. اصل ترازو امکان می دهد با اختیار زمین به عنوان جرم مرجع M ، این روش را به کار ببرند. ترازو هنگامی به حالت موازنه می رسد که دو نیرو، و در نتیجه دو جرم برابر باشند. بدین ترتیب روشی که در بخش ۳.۲ برای اندازه گیری جرم به وسیله ترازو ارائه کردیم توجیه می شود.

۴.۱۳ انرژی پتانسیل گرانشی

چون برهم کنش گرانشی بیان شده با معادله (۱.۱۳)، مرکزی است و تنها به فاصله بستگی دارد، این برهم کنش به یک نیروی پایستار مربوط می شود. بنابراین می توان به آن یک انرژی پتانسیل گرانشی وابسته کرد. اگر مبدأ مختصات را در m' انتخاب کنیم و فقط نیروی وارد



شکل ۶.۱۳. جاذبه گرانشی m' روی m برداری است در سوی مخالف بردار یکای u_r که از m' دور می شود.

بر m را در نظر بگیریم (شکل ۶.۱۳)، ملاحظه می‌شود که $\mathbf{F}$ یک نیروی جاذبه و در سوی مخالف بردار $\vec{OA} = \vec{r} = r\mathbf{u}_r$ است، که در آن بردار $\mathbf{u}_r$ در راستای $\vec{OA}$ است. بنابراین به جای معادله (۱۰.۱۳)، باید معادله صحیحتر برداری زیر را بنویسیم:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (۲.۱۳)$$

این نیرو برابر است با گرادیان انرژی پتانسیل با علامت مخالف. در حالت فوق چون نیرو مرکزی است و در راستای شعاعی اثر می‌کند، انرژی پتانسیل تنها به r بستگی دارد و کافی است از معادله (۲۵.۸)، یعنی $F_r = -\partial E_p / \partial r$ استفاده کنیم. در این صورت، $F_r = -\gamma mm' / r^2$ است و داریم

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = \gamma \frac{mm'}{r^2}.$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه و با برابر صفر قرار دادن انرژی پتانسیل برای فاصله خیلی دور ($r = \infty$)، به دست می‌آید

$$\int_0^{E_p} dE_p = \gamma mm' \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}.$$

این رابطه انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه متشکل از m و m' را به دست می‌دهد:

$$E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}. \quad (۳.۱۳)$$

پس انرژی کل دستگاه دو ذره که تحت تأثیر برهم‌کنش گرانشی خود هستند برابر می‌شود با

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 - \gamma \frac{mm'}{r}. \quad (۴.۱۳)$$

برای دستگاهی متشکل از بیش از دو ذره که زیر تأثیر برهم‌کنش گرانشی یکدیگر قرار دارند، انرژی کل برابر است با

$$E = \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{ذرات}}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{\substack{\text{تمام} \\ \text{جفتها}}} \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

در مورد دو ذره، با بررسی حرکت آنها نسبت به چارچوب مرجع متصل به مرکز جرم دستگاه، می‌توان نتیجه مثال ۹.۹ را برای بیان انرژی جنبشی دو ذره به صورت $E_k = \mu v_{12}^2 / 2$ به کار برد که در آن μ جرم کاهشده و v_{12} سرعت نسبی آنهاست. بنابراین انرژی کل در این چارچوب برابر است با

$$E = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 - \gamma \frac{mm'}{r_{12}}.$$

در حالت ویژه‌ای که جرم ذره m' در مقابل جرم m خیلی زیاد باشد ($m' \gg m$)، [با بازگشت به تعریف جرم کاهیده، معادله (۱۵.۹)] داریم $m \approx \mu$. در این حالت m' عملاً بر مرکز جرم دستگاه منطبق است و می‌توان به جای سرعت نسبی $v_{۱۲}$ ، سرعت m نسبت به مرکز جرم، یعنی v را قرار داد. در نتیجه داریم

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m'}{r}. \quad (۵.۱۳)$$

اگر ذره روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کند، نیروی وارد بر جرم با معادله (۲۸.۷)، یعنی $F_N = m v^2 / r$ داده می‌شود، و اگر نیروی گرانشی را از معادله (۱۰.۱۳) جانشین کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{m v^2}{r} = \gamma \frac{m m'}{r^2}.$$

بنابراین

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{m m'}{r}$$

و معادله (۵.۱۳) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

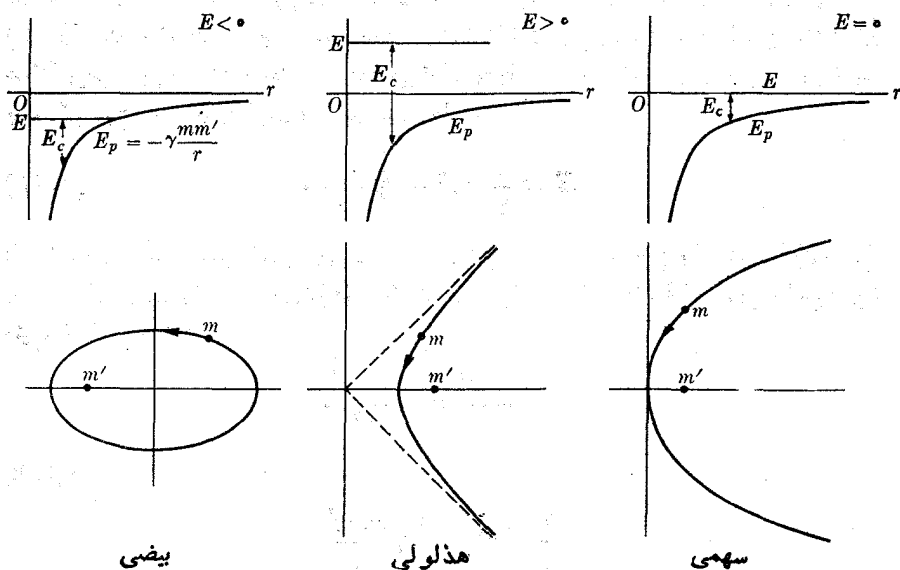
$$E = - \gamma \frac{m m'}{2r}. \quad (۶.۱۳)$$

این رابطه نشان می‌دهد که انرژی کل منفی است. این نتیجه کلتر از آن است که اثبات ما ممکن است به تصور درآورد. هنگامی که انرژی پتانسیل را برای فاصله بینهایت برابر صفر بگیریم، تمام مدارهای بیضوی (یا مقید) دارای انرژی کل منفی می‌شوند ($E < 0$). وجود مسیر مقید بدین معنی است که در هیچ نقطه‌ای از مدار انرژی جنبشی کافی برای انتقال ذره به بینهایت وجود ندارد. به گفته دیگر انرژی جنبشی ذره آن اندازه نیست که با تبدیل شدن به انرژی پتانسیل، بر جاذبه گرانشی غلبه کند. این امر قابل پیش بینی است، زیرا در فاصله بینهایت جمله دوم در معادله (۵.۱۳) برابر صفر است و باید داشته باشیم $E = m v^2 / 2$ و طبق این معادله امکان ندارد E منفی شود.

بر عکس اگر انرژی مثبت باشد ($E > 0$)، ذره می‌تواند تا بینهایت برود و هنوز مقداری از انرژی جنبشی خود را حفظ کند. اگر در معادله (۵.۱۳)، r را برابر ∞ قرار دهیم و سرعت در بینهایت را v_∞ بنامیم، انرژی جنبشی در بینهایت برابر می‌شود با

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = E \quad \text{یا} \quad v_\infty = \sqrt{2E/m}. \quad (۷.۱۳)$$

این نتیجه را می‌توان بدین گونه تفسیر کرد. فرض کنیم که ذره m در آغاز در فاصله خیلی دوری از ذره m' قرار دارد و با سرعت v_∞ که سرعت نزدیک شدن [به میدان] خوانده می‌شود، به سمت آن پرتاب می‌شود، به گونه‌ای که انرژی کل از معادله (۷.۱۳) به دست

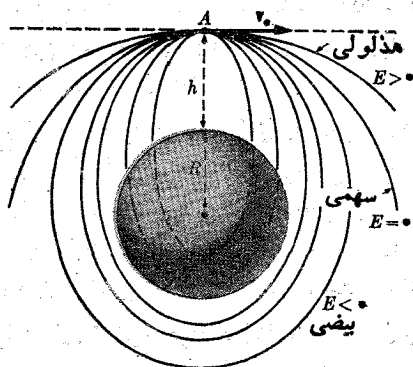


شکل ۷.۱۳. رابطه بین انرژی کل و مسیر، برای حرکت بر اثر نیروی عکس مجذوری

می آید. در مدتی که ذره m به ذره m' نزدیک می شود، انرژی پتانسیل آن کاهش می یابد (یعنی بیشتر منفی می شود) و انرژی جنبشی آن افزایش پیدا می کند و در نقطه کمترین فاصله نزدیک شدن، که به اندازه حرکت زاویه ای ذره بستگی دارد به حداکثر می رسد. (به بخش ۱۱.۸ و شکل ۱۸.۸ مراجعه کنید). سپس ذره شروع به دور شدن می کند، انرژی جنبشی خود را از دست می دهد و بالاخره در فاصله بینهایت دور سرعت v_∞ خود را باز می یابد. مسیر ذره یک منحنی باز است و می توان ثابت کرد که یک هذلولی است (بخش ۵.۱۳). حالت ویژه ای که در آن انرژی کل برابر صفر باشد ($E = 0$) بسیار جالب است، زیرا در این صورت، بنا به معادله (۷.۱۳)، ذره در بینهایت در حال سکون است ($v_\infty = 0$). در اینجا نیز منحنی مدار، باز است ولی به جای هذلولی یک سهمی به وجود می آید. از لحاظ فیزیکی، این وضع مربوط به حالتی است که ذره m در فاصله ای از m' رها می شود و سرعت اولیه آن به گونه ای است که انرژی جنبشی ذره با انرژی پتانسیل آن برابر است.

شکل ۷.۱۳، سه حالت ممکن را نشان می دهد، و در هر حالت انرژی کل، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل و نوع مدار مشخص شده اند.

این نتایج جهت قرار دادن یک ماهواره مصنوعی روی مدار بسیار اهمیت دارند. فرض کنید ماهواره ای از زمین پرتاب شود. هنگام رسیدن به ارتفاع بیشینه h ناشی از پرتاب، در نقطه A یک نیروی پیشرانه یابی به آن وارد می شود و سرعت افقی v_0 را به وجود می آورد (شکل ۸.۱۳). به این ترتیب انرژی کل ماهواره در نقطه A برابر است با



شکل ۸.۱۳. مسیرهای ذره‌ای که در ارتفاع h بالای سطح زمین به طور افقی با سرعت v_0 پرتاب می‌شود.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{R+h}$$

بسته به اینکه E منفی، صفر یا مثبت باشد، مدار بیضی، سهمی یا هذلولی خواهد بود. در تمام حالات، مرکز زمین یکی از کانونهای مدار است. اگر انرژی خیلی کم باشد، مدار بیضی با زمین برخورد خواهد داشت، و ماهواره به زمین می‌خورد. در غیر این صورت بسته به مقدار v_0 ، در یک مسیر بسته حرکت می‌کند یا از جاذبه زمین می‌گریزد.

همین مناطق را می‌توان در مورد قمرهای طبیعی مانند ماه نیز به کار برد. بدیهی است برای ماهواره‌های بین سیارات، مداری با انرژی مثبت لازم است. در تمام موارد، یک سازوکار راهنما برای تصحیح مسیر بعد از پرتاب، ضروری است.

مثال ۸.۱۳. سرعت فرار حداقل سرعتی است که باید یک جسم با آن از زمین پرتاب شود تا به بینهایت برود. سرعت فرار یک جسم از زمین را برآورد کنید.

حل: برای اینکه ذره تا بینهایت برود، انرژی کل باید برابر صفر یا مثبت باشد، و بدیهی است که حداقل سرعت مربوط است به انرژی کل صفر. بنابراین، اگر جرم و شعاع زمین را بترتیب M و R ، و سرعت فرار پرتابه را v_e بنامیم، از معادله (۸.۱۳) به ازای $E = 0$ داریم

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0$$

که رابطه بین v_e و R را در سکوی پرتاب به دست می‌دهد. بدین طریق سرعت فرار از زمین برابر می‌شود با

$$v_e = \sqrt{2\gamma M/R} = 11.2 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}. \quad (8.13)$$

این سرعت برابر است با 40700 km hr^{-1} . توجه کنید که سرعت فرار به جرم جسم

بستگی ندارد. با وجود این، پیشرفته لازم برای شتاب دادن به جسم تا اینکه سرعت آن به سرعت فرار برسد به جرم جسم بستگی دارد. بدین جهت برای پرتابه‌ها و ماهواره‌های خیلی سنگین موتورهای بسیار قوی لازم اند.

ذره‌ای که از سطح زمین با سرعت v ، مطابق رابطه (۸.۱۳)، پرتاب شود سرعت آن در بینهایت برابر صفر می‌شود. اگر سرعت آن بزرگتر از v باشد، در بینهایت ذره هنوز مقداری سرعت خواهد داشت. اگر سرعت پرتاب از v کوچکتر باشد، جسم روی زمین باز می‌گردد، مگر اینکه به وسیله طبقه‌های متوالی موشک حامل، روی مدار مقیدی قرار بگیرد، و چنانکه درباره شکل ۸.۱۳ توضیح دادیم، راستای سرعت آن تغییر کند.

مفهوم سرعت فرار برای توضیح فرار گازها به خارج از جو زمین نیز سودمند است. اگر فرض کنیم که گازهای تشکیل دهنده جو در حالت تعادل گرمایی هستند، سرعت ریشه میانگین مربعی مولکولهای آن با معادله (۵۹.۹) داده می‌شود:

$$v_{rms} = \sqrt{3kT/m} \quad (9.13)$$

سرعت ریشه میانگین مربعی گازهای موجود در جو زمین در دمای میانگین آن عبارتند از 1908 ms^{-1} برای هیدروژن؛ 1350 ms^{-1} برای هلیوم؛ 510 ms^{-1} برای ازت؛ 477 ms^{-1} برای اکسیژن؛ و 407 ms^{-1} برای گاز کربنیک. در تمام موارد v_{rms} خیلی کوچکتر از v است. بدین طریق نتیجه می‌گیریم که هیچ مولکول گازی نمی‌تواند بر جاذبه گرانشی فائق آید و از زمین فرار کند. ولی چنین نتیجه‌ای درست نخواهد بود.

سرعت ریشه میانگین مربعی، v_{rms} ، یک سرعت میانگین است، یعنی تعداد زیادی از مولکولها با سرعتهای بزرگتر یا کوچکتر از v_{rms} حرکت می‌کنند. با اینکه v_{rms} کوچکتر از v است، شماری از مولکولها با سرعت v یا بزرگتر از آن حرکت می‌کنند، و این مولکولها می‌توانند از جو زمین فرار کنند، بویژه اگر در لایه‌های بالای جو قرار داشته باشند. بنا به مقادیر عددی داده شده در بالا، مشاهده می‌شود که این اثر در مورد گازهای سبک مهمتر است تا برای گازهای سنگین، و این یکی از دلایلی است که چرا مقدار هیدروژن و هلیوم در جو زمین نسبتاً کم است، برآورد شده است که تنها به دلیل این اثر گرانشی در هر ثانیه $10^{22} \times 10^3$ اتم یا 600 kg هیدروژن در سال از جو زمین فرار می‌کند. با اینهمه، این عدد مقدار هیدروژن کل خارج شده از جو نیست، و افت خالص هیدروژن، به دلیل فرایندهای دیگری، با این مقدار تفاوت دارد.

برای سیاره عطارد سرعت فرار خیلی کوچکتر از سرعت فرار از زمین است، و این سیاره به احتمال زیاد، تا کنون اتمسفر خود را از دست داده است. در زهره سرعت فرار تقریباً معادل زمین است. سرعت فرار برای مریخ تقریباً $1/6$ زمین است، بنابراین بخشی از جو خود را نگه داشته ولی قسمت اعظم آن را از دست داده است، در واقع فشار جو در سطح مریخ خیلی کمتر از سطح زمین است. برای سایر سیاره‌ها سرعت فرار بزرگتر از زمین است، در نتیجه این سیاره‌ها بخش عظیمی از جو اولیه خود را حفظ کرده‌اند. با وجود این، بنا به دلایل دیگری، ترکیب گازهای اتمسفر این سیاره‌ها با

جو زمین تفاوت دارد.

مثال ۴.۱۳. سرعت جسمی را که از فاصله r از مرکز زمین رها می شود هنگام برخورد با زمین حساب کنید.

حل: سرعت اولیه جسم برابر صفر است. بنابراین مطابق معادله (۵.۱۳) انرژی کل آن برابر است با

$$E = -\gamma \frac{mM}{r}$$

که در آن m جرم جسم و M جرم زمین است. وقتی که جسم با سطح زمین برخورد می کند سرعت آن v و فاصله آن از مرکز زمین برابر R می شود. در نتیجه

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R}$$

چون انرژی باید ثابت بماند، و مقدار E را برابر قرار می دهیم (از مالش هوا صرف نظر می شود). داریم

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = -\gamma \frac{mM}{r}$$

با حل آن برای v^2 ، به دست می آید

$$v^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

یا با مراجعه به مثال ۱.۱۳ که $g = \gamma M/R^2$ است، به دست می آید

$$v^2 = 2R^2 g \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (۱۰.۱۳)$$

از این رابطه می توان برای پیدا کردن حداکثر ارتفاع جسمی که از سطح زمین با سرعت v به طور قائم پرتاب می شود نیز استفاده کرد.

اگر جسم از فاصله خیلی زیادی رها شود، به گونه ای که $1/r$ در مقابل $1/R$ قابل اغماض باشد، داریم

$$v_{\infty} = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}} = 11.2 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}.$$

این عدد درست برابر با عددی است که در معادله (۸.۱۳) برای سرعت فرار به دست آوردیم. این امر شگفت آور نیست، زیرا این مسئله درست برعکس مثال ۳.۱۳ است. به عنوان مثال، نتیجه فوق می تواند برآوردی از سرعت برخورد یک سنگ آسمانی به زمین به دست دهد.

۵.۱۳ حرکت کلی بر اثر بوهم کنش گرانشی

تا اینجا قوانین کپلر را تنها برای مدارهای بیضوی بیان کردیم. در بخش ۳.۱۳ از روی این قوانین ثابت کردیم که، دستکم برای مدارهای دایره‌ای، حرکت مداری هنگامی به وجود می‌آید که نیروی جاذبه و متناسب با عکس مجذور فاصله باشد. همچنین در بخش ۴.۱۳، هنگام مطالعه انرژی، اشاره کردیم که این قوانین علاوه بر بیضی، برای مدارهای هذلولی یا سهمی، نیز صادق‌اند. اکنون به اثبات آن می‌پردازیم.

در فصل ۸، رابطه‌ای [معادله (۴۲.۸)] بین مختصات قطبی یک ذره با کمینهای دینامیکی حرکت آن برقرار کردیم. اگر از معادله (۳۷.۸) برای انرژی پتانسیل مؤثر استفاده کنیم، می‌توانیم آن رابطه را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2} \left\{ \frac{2[E - E_p(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right\} \quad (11.13)$$

که در آن L اندازه حرکت زاویه‌ای ذره است. از طرف دیگر، معادله یک مقطع مخروطی در مختصات قطبی، با قرار دادن مبدأ مختصات در کانون (به یادداشت آخر این بخش مراجعه کنید)، عبارت است از

$$\frac{\epsilon d}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta \quad (12.13)$$

که در آن ϵ خروج از مرکز و r فاصله کانون از خط هادی است. با مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به θ داریم

$$-\frac{\epsilon d}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\epsilon \sin \theta$$

و در نتیجه

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4 \sin^2 \theta}{d^2}$$

با قرار دادن این رابطه در معادله (۱۱.۱۳) و ساده کردن طرفین بر r^4 ، می‌توان نوشت

$$\sin^2 \theta = \frac{d^2 m^2}{L^2} \left\{ \frac{2[E - E_p(r)]}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \right\}$$

از طرف دیگر، بنا به معادله (۱۲.۱۳)، $\cos \theta = d/r - 1/\epsilon$ است. بنابراین

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{d}{r} - \frac{1}{\epsilon}\right)^2 = 1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon^2}$$

که با قرار دادن آن در معادله پیش، به دست می‌آید

$$1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{2d^2 m E}{L^2} - \frac{2d^2 m E_p(r)}{L^2} - \frac{d^2}{r^2}$$

با حذف d^2/r^2 از طرفین و برابر قرار دادن جمله‌های ثابت و جمله‌هایی که به r بستگی دارند، به دست می‌آید

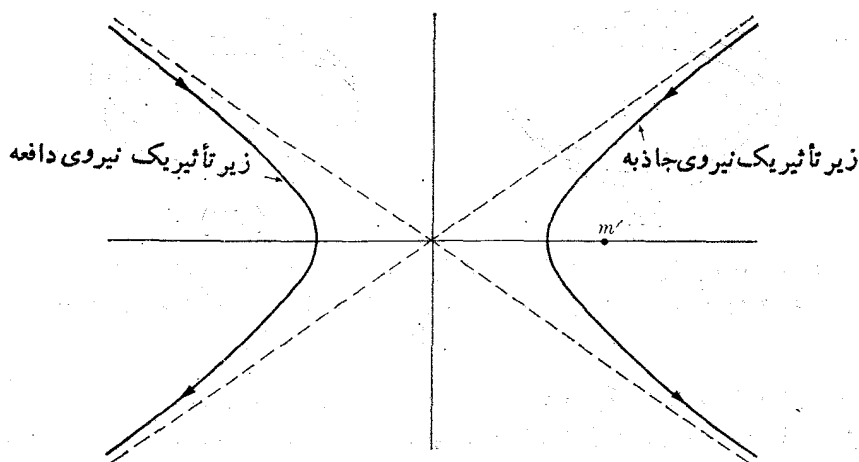
$$\frac{2d^2 m E}{L^2} = 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \quad \text{یا} \quad E = \frac{L^2}{2d^2 m} \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2}\right) \quad (۱۳.۱۳)$$

و

$$-\frac{2d^2 m E_p(r)}{L^2} = \frac{2d}{\epsilon r} \quad \text{یا} \quad E_p(r) = -\frac{L^2}{m d \epsilon r} \quad (۱۴.۱۳)$$

معادله (۱۴.۱۳) نشان می‌دهد برای اینکه ذره یک مقطع مخروطی را که مرکز نیرو در یک کانون آن باشد بپیماید، باید انرژی پتانسیل $E_p(r)$ متناسب با $1/r$ تغییر کند و در نتیجه نیرو که برابر $F_r = -\partial E_p / \partial r$ است باید متناسب با $1/r^2$ تغییر کند. این موضوع قانون اول کپلر را عمومیت می‌دهد تا علاوه بر مدارهای بیضی، مدارهای هذلولی و سهمی را نیز در بر بگیرد.

برحسب اینکه خروج از مرکز e کوچکتر، برابر یا بزرگتر از یک باشد، مدار، بیضی، سهمی یا هذلولی خواهد بود. بنا به معادله (۱۳.۱۳)، انرژی کل E نیز برحسب موارد فوق منفی، صفر یا مثبت می‌گردد. این امر توضیح ما را در بخش ۴.۱۳ تأیید می‌کند.

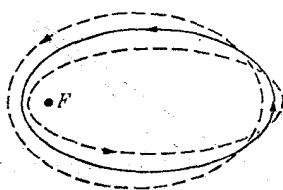


شکل ۹.۱۳. مسیرهای هذلولی بر اثر نیروهای جاذبه و دافعه عکس مجذوری

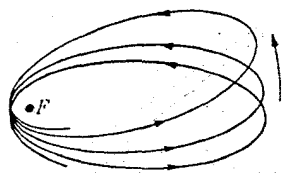
باید توجه داشت که یک هذلولی دارای دوشاخه است و بر اثر یک نیروی جاذبه عکس مجذوری، تنها شاخه‌ای پیچیده می‌شود که در برگیرنده مرکز جاذبه است (شاخه راست در شکل ۹.۱۳). اگر نیرو دافعه، یعنی $F = +C/r^2$ باشد، مدار مطابق با شاخه

سمت چپ شکل ۹.۱۳ خواهد بود. در این حالت، یعنی برای یک نیروی دافعه، انرژی پتانسیل برابر $E_p = +C/r$ و مثبت است. در نتیجه، انرژی کل $E = mv^2/2 + C/r$ همیشه مثبت است و مسیر مقید وجود ندارد. حرکت بر اثر یک نیروی دافعه عکس مجذوری را قبلاً در مثال ۱۶.۷، هنگام گفتگو دربارهٔ پراکندگی بررسی کردیم.

اگر فرض کنیم در حرکت یک سیاره دور خورشید، سایر سیاره‌ها یا اجرام سماوی تأثیر نمی‌گذارند، ملاحظات بالا برای تجزیه و تحلیل کامل حرکت سیاره‌ها کافی است. به گفتهٔ دیگر، مدار زمین (یا هر سیارهٔ دیگر) دور خورشید یک بیضی کامل است هرگاه نیروی وارد بر زمین تنها از خورشید ناشی شود. با این همه، وجود سیاره‌های دیگر در مسیر هر سیاره اختلالی به وجود می‌آورد. این اختلالات را می‌توان با استفاده از تکنیک ویژه‌ای به نام مکانیک سماوی^۱، به‌طور خیلی دقیق محاسبه و به‌صورت دوائر اساسی زیر خلاصه کرد. اثر اول اینکه، مسیر بیضی یک سیاره بسته نیست، و محور بزرگ بیضی بکندی دور کانونی که به وسیلهٔ خورشید اشغال شده است می‌چرخد. این اثر را پیشروی حضیض^۲ می‌نامند. [شکل ۱۰.۱۳ (الف)]. اثر دیگر تغییر دوره‌ای خروج از مرکز بیضی در اطراف مقدار میانگین خود می‌باشد که شکل ۱۰.۱۳ (ب) آن را نشان می‌دهد. این تغییرات بسیار کند صورت می‌گیرند. در مورد زمین، دورهٔ آنها در حدود ۱۰۵ سال (حدود ۲۱' کمانی در قرن برای حرکت حضیض) است. با وجود این، اثرات آنها قابل ملاحظه‌اند، بویژه موجب تغییر تدریجی شرایط آب و هوای زمین می‌شوند. این تغییرات به وسیلهٔ دانشمندان فیزیک زمین در مطالعهٔ لایه‌های مختلف پوستهٔ زمین شناخته شده‌اند.



(ب)



(الف)

شکل ۱۰.۱۳. اثرهای اختلالی روی حرکت سیاره‌ها. (الف) چرخش محور بیضی؛ (ب) تغییر دوره‌ای خروج از مرکز بیضی. اثرها خیلی بزرگتر از آنچه هستند نشان داده شده‌اند.

در بحث حرکت در میدان گرانشی، فرض کردیم که مکانیک نیوتونی فصلهای ۷ و ۸ را می‌توان به کار برد. ولی یک تجزیه و تحلیل بسیار دقیق نیازمند نظریهٔ نسبیت عام اینشتین است (به بخش ۸.۱۳ مراجعه کنید). یکی از مهمترین اثرهای نسبیتی، حرکت چرخشی اضافی محور بزرگ مدار سیاره است. این اثر نسبیتی برای عطارد که نزدیکترین سیاره به خورشید است و یکی از کشیده‌ترین مدارها را دارد، از سایر سیارات بیشتر است. آهنگ پیشروی حضیض که برای سیارهٔ عطارد مشاهده شده است، در حدود ۴۲'' کمانی در یک قرن، از آنچه

که بر اساس مکانیک نیوتونی، با منظور کردن اختلالات ناشی از سایر سیاردها، محاسبه می‌شود، بیشتر است. نظریهٔ نسبیت عام اینشتین دقیقاً همین آهنگ پیشروی حضيض اضافی را پیشگویی می‌کند. برای سایر سیاردها این اثر نسبیتی بسیار ناچیز است و تاکنون مشاهده نشده است.

یادداشت در بادهٔ مقاطع مخروطی: یک خانوادهٔ مهم از منحنیهای تخت (مسطح)، مقاطع مخروطی هستند. مقطع مخروطی عبارت است از منحنی حاصل از حرکت یک نقطه که نسبت فاصلهٔ آن از نقطه‌ای به نام کانون بر فاصلهٔ آن از خطی به نام هادی ثابت باشد. سه نوع مقطع مخروطی وجود دارد. بر حسب اینکه این مقدار ثابت (که خروج از مرکز نامیده می‌شود) کوچکتر، برابر یا بزرگتر از یک باشد، مقطع مخروطی را بیضی، سهمی یا هذلولی می‌نامند. چنانچه خروج از مرکز را با ε ، کانون را با F و خط هادی را با HQD نشان دهیم (شکل ۱۱.۱۳)، می‌توان نوشت

$$\varepsilon = \frac{PF}{PQ}$$

اگر PF را برابر r و FD را برابر d فرض کنیم، داریم

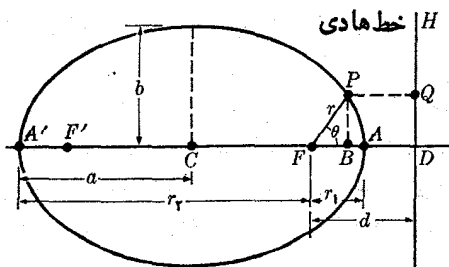
$$PQ = FD - FB = d - r \cos \theta.$$

بنابراین $\varepsilon = r/(d - r \cos \theta)$ است. یا، با حل آن نسبت به r به دست می‌آید

$$\frac{\varepsilon d}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta.$$

این صورت از رابطه همان صورتی است که در این کتاب برای نمایش مقاطع مخروطی به کاررفته است [معادله (۱۲.۱۳)]. [در بعضی کتابها، معادلهٔ مقاطع مخروطی را با استفاده از زاویهٔ $\theta - \pi$ به دست می‌آورند، در نتیجه معادله به صورت $\varepsilon d/r = 1 - \varepsilon \cos \theta$ در می‌آید.] در مورد یک بیضی، که یک منحنی بسته است، نقطهٔ A مربوط به $\theta = 0$ و نقطهٔ A' مربوط به $\theta = \pi$ است. با نوشتن معادله در دستگاه مختصات قطبی، داریم

$$r_1 = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon} \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon}$$



شکل ۱۱.۱۳. مشخصات هندسی یک بیضی

و چون $r_1 + r_2 = 2a$ است، نصف قطر بزرگ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon^2}.$$

b ، نصف قطر کوچک، برابر است با $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$ و مساحت بیضی برابر است با

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

دایره حالت خاصی از بیضی است که در آن $\epsilon = 0$ است. (برای تفصیل بیشتر دربارهٔ مقاطع مخروطی، و به‌خصوص بیضی، رجوع کنید به: توماس، ج. ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، بخشهای ۱۰-۷ تا ۱۰-۱۱.)

مثال ۵.۱۳. در یک حرکت بیضوی، رابطهٔ انرژی کل و اندازه حرکت زاویه‌ای را با نصف قطر بزرگ a و خروج از مرکز ϵ پیدا کنید.

حل: بنا به یادداشت پیش درمورد مقاطع مخروطی، نصف قطر بزرگ یک بیضی بر حسب خروج از مرکز ϵ و فاصلهٔ d ، برابر است با

$$a = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon^2}.$$

در نتیجه، بنا به معادلهٔ (۱۳.۱۳) داریم

$$E = \frac{L^2}{2d^2 m} \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2} = - \frac{L^2}{2\epsilon d m a}.$$

ولی از معادلهٔ (۱۴.۱۳) با $E_p = -\gamma mm'/r$ ، به دست می‌آید

$$-\gamma \frac{mm'}{r} = - \frac{L^2}{m\epsilon d r} \quad \text{یا} \quad \frac{L^2}{m\epsilon d} = \gamma mm'.$$

بدین طریق، با قراردادن مقادیر مربوط در معادلهٔ E ، به دست می‌آید

$$E = -\gamma \frac{mm'}{2a}.$$

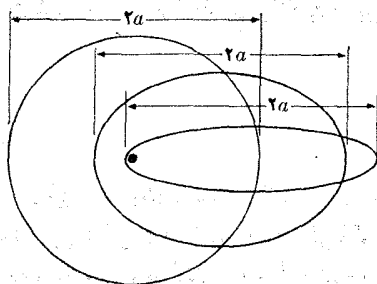
از مقایسهٔ این رابطه با معادلهٔ (۶.۱۳) که برای مدارهای دایره‌ای به دست آوردیم، مشاهده می‌شود که دو رابطه اساساً یکسان هستند، زیرا در یک مسیر دایره‌ای $r = a$ است. این نتیجه همچنین ثابت می‌کند که انرژی کل منفی است و تنها به a ، نیم قطر بزرگ بستگی دارد. همچنین تمام مدارهای بیضوی که نصف قطر بزرگ آنها برابر a ، مانند آنچه که شکل ۱۲.۱۳ نشان می‌دهد، دارای انرژی کل یکسان هستند، هر چند خروج از مرکز آنها مختلف باشد. با استفاده از رابطهٔ $\epsilon d = a(1 - \epsilon^2)$ می‌توان یک رابطه مفید دیگر نیز نوشت:

$$L^2 = \gamma m^2 m' \epsilon d = \gamma m^2 m' a (1 - \epsilon^2).$$

با استفاده از معادله‌ای که قبلاً برای انرژی E داده شد، a ، نصف قطر بزرگ را حذف می‌کنیم و برای خروج از مرکز مدار به دست می‌آوریم

$$e^2 = 1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{L}{\gamma m m'} \right)^2.$$

بدین طریق مشاهده می‌شود که خروج از مرکز به انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای بستگی دارد. مدارهایی که در شکل ۱۲.۱۳ نشان داده شده‌اند همگی دارای انرژی یکسان ولی اندازه حرکت زاویه‌ای و خروج از مرکز متفاوت هستند. به گفته دیگر، در یک میدان عکس مجذوری، به یک انرژی کل معین، اندازه حرکت‌های زاویه‌ای مختلف بسیاری می‌توانند مربوط شود. این موضوع در بحث ساختار اتمی از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا در یک اتم ممکن است چندین الکترون با انرژیهای یکسان ولی با اندازه حرکت‌های زاویه‌ای مختلف وجود داشته باشند.



شکل ۱۲.۱۳. مدارهای بیضوی به ازای مقادیر مختلف اندازه حرکت زاویه‌ای ولی با انرژیهای یکسان. تمام مدارها دارای یک کانون و قطر بزرگ یکسان هستند ولی خروج از مرکز آنها مختلف است.

می‌توان نتایج فوق را بدین طریق خلاصه کرد. «اندازه» مدار (که با نصف قطر بزرگ بیان می‌شود) با انرژی تعیین می‌گردد، و برای یک انرژی مشخص، «شکل» مدار (که خروج از مرکز آن را بیان می‌کند) با اندازه حرکت زاویه‌ای تعیین می‌شود.

مثال ۶.۱۳. تحقیق کنید که قانون سوم کپلر برای مدارهای بیضوی صادق است.

حل: یادآوری می‌کنیم که در بخش ۲.۱۳، برای تحقیق در مورد نیروی عکس مجذوری در یک مدار دایره‌ای، قانون سوم کپلر را به کار بردیم. اکنون تحقیق می‌کنیم که این قانون در مدار بیضوی نیز برقرار است. اثبات آن یک محاسبه جبری مستقیم بر مبنای ویژگیهای بیضی است.

بنا به معادله (۳۵.۷)، که ثابت بودن اندازه حرکت زاویه‌ای را بیان می‌کند، داریم

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m} \quad \text{یا} \quad r^2 d\theta = \frac{L}{m} dt.$$

در طول یک دوره P ، بردار شعاع تمام مساحت بیضی را جاروب می‌کند و θ از ۰ تا 2π تغییر می‌کند. بدین طریق، می‌توان مساحت بیضی را به دست آورد:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{L}{2m} \int_0^P dt = \frac{LP}{2m}.$$

ولی چون مساحت بیضی برابر است با $\pi a^2(1 - \epsilon^2)^{1/2}$ (به یادداشت پایان بخش ۵.۱۳ مراجعه کنید)، در نتیجه داریم

$$\pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) = L^2 P^2 / 4m^2.$$

بنا به مثال ۵.۱۳، داریم $L^2 = \gamma m^2 m' a (1 - \epsilon^2)$. در نتیجه،

$$\pi^2 a^3 = \frac{1}{4} \gamma m' P^2 \quad \text{یا} \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m'} a^3.$$

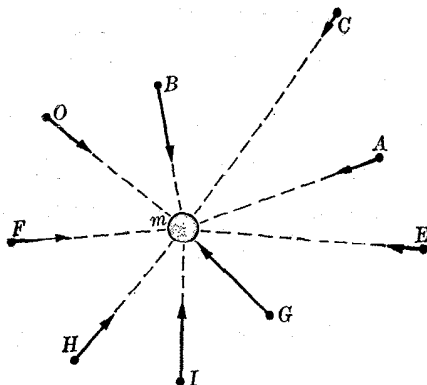
رابطهٔ اخیر همان قانون سوم کپلر است، زیرا مقدار میانگین r بوضوح با نصف قطر بزرگ متناسب است.

۶.۱۳ میدان گرانشی

اکنون یک مفهوم خیلی مهم در فیزیک، یعنی، میدان گرانشی را معرفی می‌کنیم. فرض کنید جرمی مانند m وجود دارد و جرم دیگر m' را در جاهای گوناگون اطراف m قرار می‌دهیم (شکل ۱۳.۱۳). در هر وضع، به سبب برهم‌کنش m و m' نیرویی بر m' اثر می‌کند که با رابطهٔ (۲.۱۳) بیان می‌شود، یعنی

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \mathbf{u}_r.$$

روشن است که برای هر وضع m' ، یک نیروی برابر ولی در سوی مخالف روی m اثر



شکل ۱۳.۱۳. میدان گرانشی حاصل از یک جرم نقطه‌ای در نقاط مختلف

می‌کند، ولی ما در حال حاضر فقط وضع m' را مورد توجه قرار می‌دهیم.

می‌توان براحتی گفت که جرم m در فضای اطراف خود یک حالت فیزیکی به وجود می‌آورد که آن را میدان گرانشی می‌نامیم. وجود این میدان از نیرویی شناخته می‌شود که جرم m روی هر جرم دیگری مانند m' که به این منطقه آورده شود وارد می‌کند. اینکه آیا در فضای آزاد اطراف m ، بدون آنکه جرم آزمون m' را برای اثبات وجود میدان به کار ببریم، چیزی وجود دارد یا نه، امری است حدسی، و تا اندازه‌ای سؤال نامربوطی است، زیرا ما تنها هنگامی متوجه میدان گرانشی می‌شویم که جرم دیگری در میان باشد.

G شدت میدان گرانشی حاصل از جرم m در نقطه P ، با نیروی وارد بر جرم واحد در نقطه P تعریف می‌شود. در این صورت،

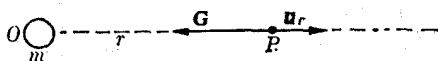
$$G = \frac{F}{m'} = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (15.13)$$

بنابراین سوی میدان گرانشی G مخالف برداریکای $\mathbf{u}_r$ است. سوی $\mathbf{u}_r$ از جرم به وجود آورنده میدان به سمت نقطه‌ای است که در آنجا میدان محاسبه می‌شود. به گفته دیگر، میدان گرانشی همیشه به سمت جرمی است که آن را به وجود می‌آورد.

رابطه (۱۵.۱۳) میدان گرانشی را در فاصله r از جرم m واقع در نقطه O به دست می‌دهد. پس می‌توان به هر نقطه از فضای اطراف m (شکل ۱۴.۱۳)، برداری مانند G با معادله (۱۵.۱۳) وابسته ساخت، به گونه‌ای که نیروی گرانشی وارد بر یک جرم مستقر در این ناحیه از ضرب جرم مذکور در بردار G مربوط به آن نقطه به دست می‌آید؛ یعنی

$$F = (\text{جرم ذره}) \times G.$$

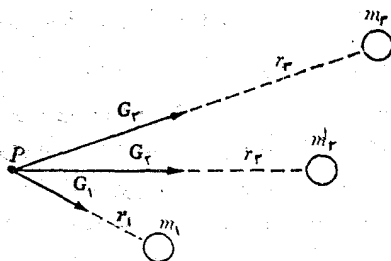
تعریف میدان گرانشی نشان می‌دهد که شدت میدان گرانشی را بر حسب N kg^{-1} یا m s^{-2} اندازه می‌گیرند و بعد آن همان بعد شتاب است. با مقایسه معادله (۱۵.۱۳) با معادله (۱۶.۷)، درمی‌یابیم که شتاب گرانی را می‌توان شدت میدان گرانشی در سطح زمین در نظر گرفت.



شکل ۱۴.۱۳. میدان گرانشی حاصل از جرم نقطه‌ای m در نقطه P در سوی مخالف برداریکای $\mathbf{u}_r$ است.

اکنون فرض کنید جرمهای $m_1, m_2, m_3, \dots$ (شکل ۱۵.۱۳) وجود داشته باشند که هریک میدان گرانشی مخصوص خود را به وجود می‌آورد. نیروی کل وارد بر جرم m واقع در نقطه P برابر است با

$$\begin{aligned} F &= mG_1 + mG_2 + mG_3 + \dots \\ &= m(G_1 + G_2 + G_3 + \dots) = mG \end{aligned} \quad (16.13)$$

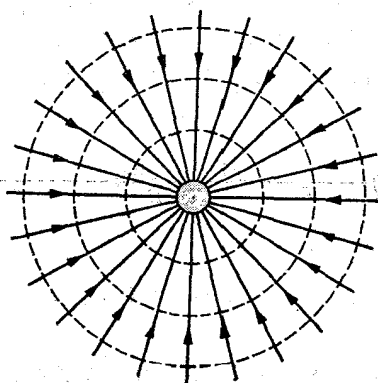


شکل ۱۵.۱۳. برآیند میدان گرانشی چند جرم

که در آن $G_1, G_2, G_3, \dots$ میدانهای گرانشی حاصل از هر جرم در نقطه P هستند و مطابق معادله (۱۵.۱۳) محاسبه می‌شوند. در این صورت میدان برآیند در نقطه P برابر جمع برداری زیر است:

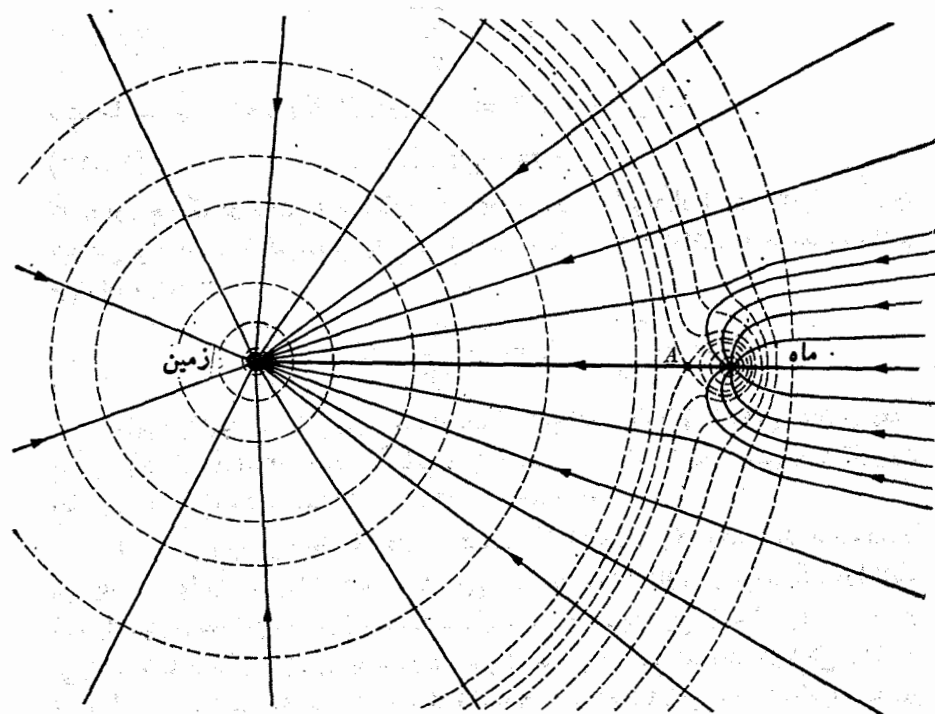
$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 + \dots = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{ri} \quad (17.13)$$

میدان گرانشی را می‌توان با خطهای نیرو نشان داد. یک خط نیرو به گونه‌ای رسم می‌شود که در هر نقطه راستای میدان بر خط نیرویی که از این نقطه می‌گذرد مماس باشد. چگالی خطهای نیرو متناسب با شدت میدان است. شکل ۱۶.۱۳ میدان اطراف یک جرم منفرد را نشان می‌دهد. تمام خطهای نیرو شعاعی هستند و در نقاط نزدیکتر به جرم شدت میدان بیشتر است؛ شکل ۱۷.۱۳ میدان اطراف دو جرم نابرابر، یعنی زمین و ماه، را نشان می‌دهد. در اینجا خطهای نیرو شعاعی نیستند و در نزدیکی نقطه A شدت میدان خیلی ضعیف است (در نقطه A برابر صفر است).



شکل ۱۶.۱۳. خطهای نیرو و سطحهای هم‌پتانسیل
میدان گرانشی حاصل از یک جرم نقطه‌ای

یک مفهوم مهم دیگر، پتانسیل گرانشی است، که به عنوان انرژی پتانسیل یک جرم واحد واقع در میدان گرانشی تعریف می‌شود. بنابراین، اگر در نقطه‌ای از میدان گرانشی، جرمی



شکل ۱۷.۱۳. خط‌های نیرو و سطح‌های هم‌پتانسیل میدان گرانشی برآیند حاصل از زمین و ماه. در نقطه A میدان برآیند برابر صفر است.

مانند m' دارای انرژی پتانسیل E_p باشد، پتانسیل گرانشی در این نقطه برابر است با $V = E_p/m'$. در نتیجه، پتانسیل گرانشی بر حسب J kg^{-1} یا $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ بیان می‌شود. از تقسیم معادله (۳.۱۳) بر m' ، مشاهده می‌شود که پتانسیل گرانشی در نقطه‌ای به فاصله r از جرم m برابر است با

$$V = -\gamma \frac{m}{r}. \quad (۱۸.۱۳)$$

اگر به جای یک ذره، مانند شکل ۵.۱۳، چندین ذره وجود داشته باشد، پتانسیل گرانشی در نقطه P برابر جمع عددی $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$ است، یا

$$V = -\gamma \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots \right) = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i}. \quad (۱۹.۱۳)$$

با مقایسه معادله (۱۸.۱۳) با معادله (۱۵.۱۳) ملاحظه می‌شود که بزرگی میدان گرانشی برابر است با

$$G = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (۲۰.۱۳)$$

و در حالت کلی، بنا به رابطه $F = -\text{grad } E_p$ ، به دست می آید

$$G = -\text{grad } V \quad (۲۱.۱۳)$$

که در آن، چنانکه در بخش ۷.۸ اشاره شد، grad علامت گرادیان است. بنا بر این میدان گرانشی برابر است با گرادیان پتانسیل گرانشی با علامت مخالف. در مختصات قایم می توان نوشت

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad G_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad G_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

مفهوم پتانسیل گرانشی بسیار مفید است، زیرا چنانکه معادله (۱۹.۱۳) نشان می دهد، پتانسیل یک کمیت اسکالر است و بآسانی می توان آن را حساب کرد، و سپس با به کار بردن معادله (۲۱.۱۳)، شدت میدان گرانشی G را به دست آورد.

از به هم پیوستن نقاطی که دارای پتانسیل یکسان هستند یک رشته سطوح به دست می آید که آنها را سطحهای هم پتانسیل^۱ می نامند. به عنوان مثال، در مورد یک ذره تنها، که پتانسیل از معادله (۱۸.۱۳) به دست می آید، سطوح هم پتانسیل کره های $r = \text{const}$ می باشند که در شکل ۱۶.۱۳ به صورت خطوط نقطه چین رسم شده اند. در شکل ۱۷.۱۳ نیز سطوح هم پتانسیل به صورت خطوط نقطه چین رسم شده اند. توجه داشته باشید که در همه موارد خطهای نیرو بر سطوح هم پتانسیل عمودند، و در حالت کلی می توان آن را بدین طریق اثبات کرد. دو نقطه خیلی نزدیک به هم را روی یک سطح هم پتانسیل انتخاب می کنیم. وقتی که ذره ای را از یکی از این نقطه ها به نقطه دیگر انتقال می دهیم، کار انجام یافته به وسیله میدان گرانشی روی ذره برابر صفر است، زیرا کار انجام یافته برابر است با تغییر انرژی پتانسیل، و در این مورد انرژی پتانسیل تغییر نمی کند، زیرا پتانسیل گرانشی دو نقطه یکسان است. صفر بودن این کار دلیل بر این است که نیرو بر جا بجایی عمود است. بنا بر این دایره ای میدان گرانشی بر سطحهای هم پتانسیل عمود است؛ یعنی اگر خطهای نیرو معلوم باشند بآسانی می توان سطحهای هم پتانسیل را رسم کرد و برعکس*.

مثال ۷.۱۳. در میدان گرانشی حاصل از دو جرم برابر که به فاصله $2a$ از یکدیگر قرار دارند بحث کنید.

حل: محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۸.۱۳ قرار می دهیم. با استفاده از معادله (۱۹.۱۳) برای دو جرم یکسان، پتانسیل گرانشی در نقطه $P(x, y)$ چنین نوشته می شود:

1. equipotential surfaces

* نظر دانشجو را به یادداشت بعد از بخش ۷.۸ که مربوط به گرادیان بود جلب می کنیم. در آنجا ثابت شد که بردار $\text{grad } E_p$ بر سطحهای $E_p = \text{const}$ عمود است، که با بیان فوق هم ارز است، زیرا $G = -\text{grad } V$ می باشد.

$$V = -\gamma m \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

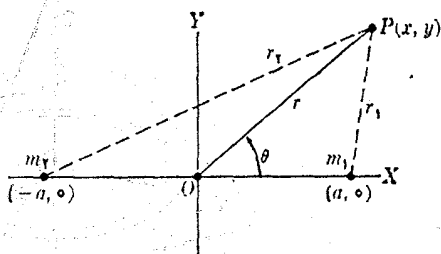
از طرف دیگر، شکل ۱۸.۱۳ نشان می‌دهد که

$$r_1 = [(x - a)^2 + y^2]^{1/2}$$

$$r_2 = [(x + a)^2 + y^2]^{1/2}$$

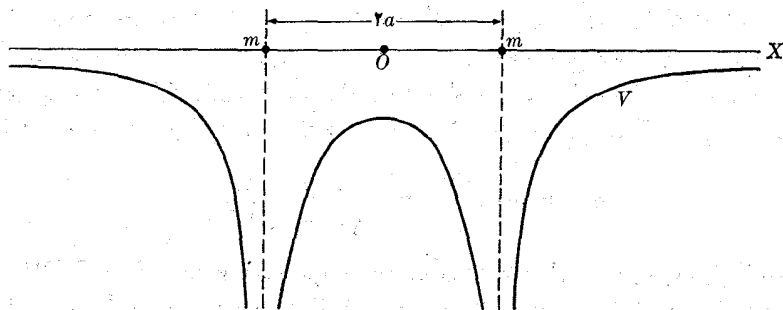
است. در نتیجه داریم

$$V = -\gamma m \left\{ \frac{1}{[(x - a)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x + a)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}.$$



شکل ۱۸.۱۳

هنگامی که روی محور X ها از $-\infty$ تا $+\infty$ حرکت کنیم، تغییر پتانسیل گرانشی حاصل از دو جرم برابر، مطابق شکل ۱۹.۱۳ خواهد بود. به دانشجو توصیه می‌کنیم منحنی مشابهی برای پتانسیل حاصل از چهار جرم برابر و هم فاصله که روی یک خط مستقیم قرار دارند رسم کند.



شکل ۱۹.۱۳. تغییرات پتانسیل گرانشی حاصل از دو جرم برابر در طول خط واصل آنها

برای به دست آوردن میدان گرانشی، از معادله (۲۱.۱۳) در دستگاه مختصات قائم

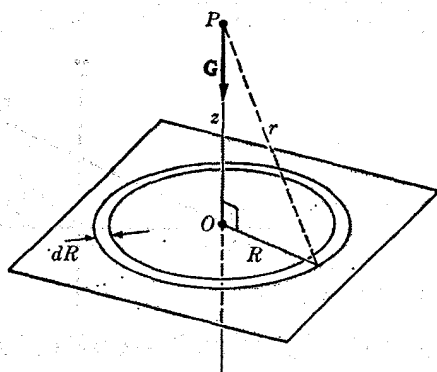
استفاده می‌کنیم؛ به دست می‌آید

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\gamma m \left\{ \frac{x - a}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{x + a}{[(x + a)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}$$

$$G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\gamma m \left\{ \frac{y}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x + a)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}.$$

میدان دارای تقارن دورانی حول محور X هاست. به دانشجوی توصیه می‌کنیم میدان را در طول محاورهای Y و Z مطالعه و خطهای نیرو را رسم کند؛ این خطهای نیرو باید نسبت به O متقارن باشند. همچنین توصیه می‌کنیم دانشجوی مسئله را با استفاده از مختصات قطبی r و θ برای نقطه P مجدداً حل کند و G_r و G_θ را بیابد.

مثال ۸۰۱۳. میدان گرانشی حاصل از یک لایه نازک ماده را که به صورت یک صفحه بی‌نهایت بزرگ درآمده است پیدا کنید.



شکل ۲۰۱۳. میدان گرانشی یک صفحه

حل: صفحه را به یک رشته حلقه‌های هم‌مرکز، به مرکز O که تصویر نقطه P روی صفحه است تقسیم می‌کنیم (شکل ۲۰۱۳). هر حلقه دارای شعاع R و پهنای dR است. بنابراین مساحت آن برابر است با $(2\pi R)dR$. اگر σ جرم واحد سطح صفحه باشد، جرم هر حلقه برابر می‌شود با $dm = \sigma(2\pi R)dR$. تمام نقطه‌های هر حلقه به فاصله یکسان r از نقطه P قرار دارند. بنابراین پتانسیلی که هر حلقه در نقطه P به وجود می‌آورد برابر است با

$$dV = -\gamma \frac{dm}{r} = -\frac{2\pi\gamma\sigma R dR}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

زیرا $r = (z^2 + R^2)^{1/2}$ است. برای به دست آوردن پتانسیل کل باید پتانسیل کلیه حلقه‌ها را باهم جمع کرد، یعنی باید از رابطه بالا بین $R = 0$ تا $R = \infty$ انتگرال گرفت. نتیجه عبارت است از

$$V = -2\pi\gamma\sigma \int_0^\infty \frac{R dR}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = -2\pi\gamma\sigma (\infty - z).$$

بدین طریق برای حد بالای انتگرال مقدار بی‌نهایت ولی ثابتی به دست می‌آید. چون برای ما تنها اختلاف پتانسیل بین نقطه P و صفحه اهمیت دارد و آن را نیز می‌توان به طور تجربی اندازه‌گیری کرد، باید از مقدار پتانسیل بالا، پتانسیل مربوط به $z = 0$ ، یعنی $-2\pi\gamma\sigma(\infty)$ را کم کنیم. بالاخره به دست می‌آید

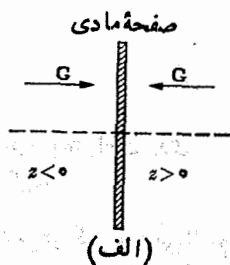
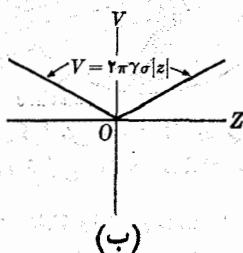
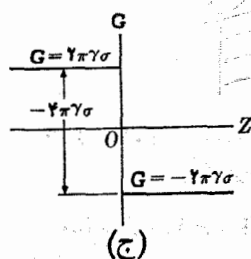
$$V = 2\pi\gamma\sigma z.$$

درواقع، آنچه ما انجام دادیم عملی است به نام بازبهنجارش^۱ که در آن مقدار پتانسیل صفحه را برابر صفر گرفتیم و در نتیجه ناچار شدیم مقدار بینهایت را از پتانسیل کل کم کنیم. این مثال نمونه خوبی است از موارد مشابه در مسائل دیگر فیزیک، که در آنها نتیجه بینهایت یا واگراست، ولی چون تنها تفاضل بین دو بینهایت مورد توجه می باشد، این اختلاف را می توان به صورت یک رابطه معین یا همگرا بیان کرد.

میدان در نقطه P را می توان از فرمول (۲۰.۱۳) به دست آورد (زیرا z مختصه P است):

$$G = -\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\gamma\sigma.$$

علامت منفی نشان می دهد که G به سمت صفحه است. توجه کنید که عمل بازبهنجارش اثری روی میدان ندارد، زیرا مشتق یک مقدار ثابت هر قدر هم که بزرگ باشد، همیشه برابر صفر است. بدین طریق معلوم می شود که میدان گرانشی ثابت است، یعنی به فاصله نقطه P تا صفحه بستگی ندارد. در این صورت می گوئیم میدان یکنواخت است. در واقع، رابطه هایی که برای V و G به دست آوردیم تنها برای z های مثبت ($z > 0$) معتبرند. ولی تقارن مسئله نشان می دهد که میدان برای $z < 0$ باید تصویر نتایج $z > 0$ در یک آینه باشد. بدین طریق برای $z < 0$ باید بنویسیم $V = -2\pi\gamma\sigma z$ و $G = +2\pi\gamma\sigma$. این نتایج با محاسبات ما کاملاً تطبیق می کنند، زیرا رابطه ای که برای محاسبه V به کار می بریم به z^2 بستگی دارد. بنابراین پاسخ آن را باید به صورت $V = 2\pi\gamma\sigma |z|$ بنویسیم، که برای $z \leq 0$ معتبر است.

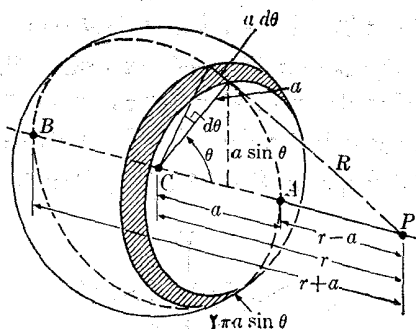


شکل ۲۱.۱۳. تغییرات G و V برای ماده ای به شکل صفحه

در شکل ۲۱.۱۳ پتانسیل و میدان در دو طرف صفحه مادی نشان داده شده اند. ملاحظه می شود که در جابجایی از چپ به راست از داخل صفحه، مقدار پتانسیل تغییر نمی کند (ولی شیب آن به طور ناپيوسته تغییر می کند) و میدان دفعه^۲ به اندازه $-4\pi\gamma\sigma$ تغییر می کند. می توان ثابت کرد که این نتیجه در مورد هر توزیع سطحی ماده معتبر است و به شکل آن بستگی ندارد.

۲۰۱۳ میدان گرانشی ناشی از یک جسم کروی

تمام فرمولهایی که تاکنون در این فصل به دست آوردیم به طور دقیق فقط برای جرمهای نقطه‌ای معتبرند. هنگامی که این فرمولها را در مورد حرکت سیاره‌ها به دور خورشید به کار می‌بردیم پذیرفتیم که ابعاد آنها در مقابل فاصله عظیمشان قابل اغماض می‌باشند. حتی اگر این فرض درست باشد، احتمال دارد اندازه‌های معین آنها یک سازه هندسی در رابطه (۱۰۱۳) وارد کند. همچنین، هنگامی که در مثال ۱۰۱۳ شتاب گرانی g را با جرم و شعاع زمین ربط می‌دادیم باز هم از معادله (۱۰۱۳) استفاده کردیم، هرچند که استدلال بالا مبنی بر اینکه اندازه نسبتاً کوچک است در این مورد نمی‌تواند به کار رود. خود نیوتون نیز در مورد این مسئله هندسی با دشواریهایی روبرو بود و انتشار قانون گرانش خود را در حدود ۴۰ سال به تأخیر انداخت تا اینکه توضیح درستی برای آن پیدا کرد. در این بخش می‌خواهیم میدان گرانشی حاصل از یک جسم کروی را حساب کنیم. ابتدا از محاسبه میدان برای یک پوسته کروی، یعنی جرمی که به طور یکنواخت روی یک کره توخالی توزیع شده است شروع می‌کنیم.



شکل ۲۲.۱۳. محاسبه میدان گرانشی حاصل از جرمی که به طور یکنواخت روی یک پوسته کروی توزیع شده در نقطه‌ای خارج از کره.

شعاع کره را a و فاصله یک نقطه دلخواه مانند P را از مرکز کره، r می‌نامیم. می‌خواهیم شدت میدان گرانشی را در نقطه P محاسبه کنیم. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که P در خارج کره قرار دارد (شکل ۲۲.۱۳). می‌توان کره را به نوارهای دایره‌ای باریکی که مرکز همه آنها روی خط راست AB قرار داشته باشد تقسیم کرد. شعاع هر نوار برابر $a \sin \theta$ و عرض آن $a d\theta$ است. در نتیجه مساحت هر نوار برابر می‌شود با $(2\pi a^2 \sin \theta)(a d\theta) = 2\pi a^3 \sin \theta d\theta$. مساحت

اگر m جرم کل توزیع شده روی سطح کره باشد، جرم واحد سطح برابر $m/4\pi a^2$ است و جرم یک نوار دایره‌ای برابر می‌شود با

$$\frac{m}{4\pi a^2} (2\pi a^3 \sin \theta d\theta) = \frac{1}{2} m \sin \theta d\theta.$$

تمام نقطه‌های یک نوار به فاصله R از نقطه P قرار دارند. بنابراین پتانسیل حاصل از هر نوار در نقطه P ، بنا به معادله (۱۹.۱۳) برابر است با

$$dV = -\frac{\gamma[(m/2) \sin\theta d\theta]}{R} = -\frac{\gamma m}{2R} \sin\theta d\theta.$$

بنا به شکل ۲۲.۱۳، با استفاده از قانون کسینوسها [معادله (ب.۱۶)]، مشاهده می‌شود که

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta.$$

چون a و r ثابت هستند، با دیفرانسیل‌گیری از رابطه فوق به دست می‌آید

$$2RdR = 2arsin\theta d\theta \quad \text{یا} \quad \sin\theta d\theta = (R/ar) dR$$

که اگر آن را در رابطه مربوط به dV قرار دهیم، به دست می‌آید

$$dV = -\frac{\gamma m}{2ar} dR. \quad (22.13)$$

برای به دست آوردن پتانسیل گرانشی کل، باید روی تمام سطح کره انتگرال بگیریم. هنگامی که نقطه P در خارج کره واقع است، حدود R عبارتند از $r - a$ و $r + a$. در نتیجه،

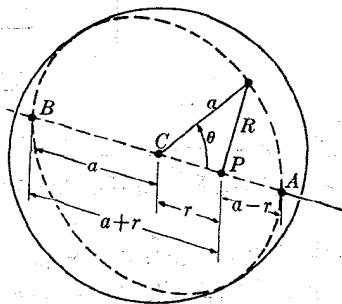
$$V = -\frac{\gamma m}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR = -\frac{\gamma m}{2ar} (2a) = -\frac{\gamma m}{r} \quad r > a \quad (23.13)$$

برابر پتانسیل گرانشی در یک نقطه خارج از پوسته کروی همگن است.

اگر نقطه P در داخل کره قرار داشته باشد (شکل ۲۳.۱۳)، حدود R عبارتند از $a - r$ و $a + r$. در نتیجه،

$$V = -\frac{\gamma m}{2ar} \int_{a-r}^{a+r} dR = -\frac{\gamma m}{2ar} (2r) = -\frac{\gamma m}{a} \quad r < a \quad (24.13)$$

یعنی پتانسیل گرانشی در داخل کره ثابت است و به مکان نقطه بستگی ندارد.



شکل ۲۳.۱۳. محاسبه میدان گرانشی در یک نقطه داخل جرمی که به طور یکنواخت روی یک پوسته کروی توزیع شده است.

با به کار بردن معادله (۲۱.۱۳) به دست می آوریم که میدان گرانشی در نقاط خارج از یک پوسته همگن کروی برابر است با

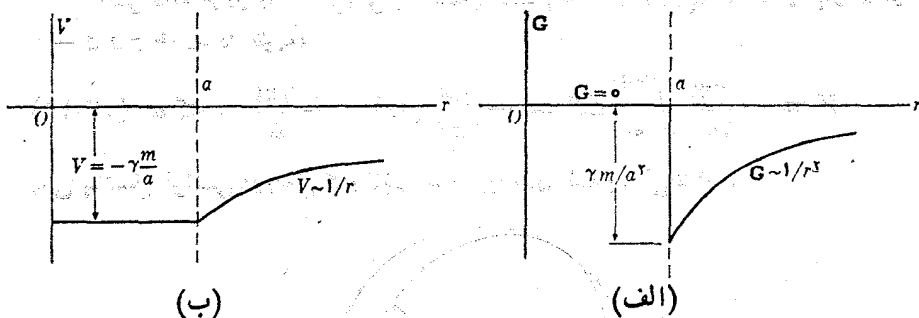
$$G = -\frac{\gamma m}{r^2} \mathbf{u}_r \quad r > a \quad (25.13)$$

و در نقاط داخل پوسته کروی برابر است با

$$G = 0 \quad r < a \quad (26.13)$$

از مقایسه معادله‌های (۲۳.۱۳) و (۲۵.۱۳) با معادله‌های (۱۸.۱۳) و (۱۵.۱۳) این نتیجه به دست می آید که میدان و پتانسیل گرانشی در هر نقطه‌ای خارج از جرمی که دوی یک پوسته کروی به طور یکنواخت توزیع شده است، با میدان و پتانسیل گرانشی حاصل از ذره‌ای به همین جرم که در مرکز کره واقع است، برابرند. در تمام نقاط داخل این پوسته کروی میدان گرانشی برابر صفر و پتانسیل ثابت است.

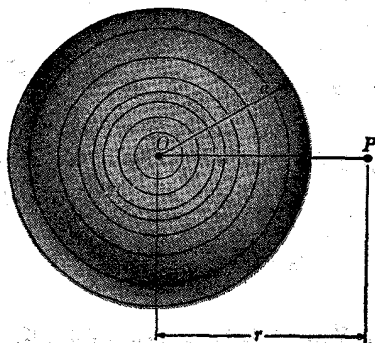
شکل ۲۴.۱۳ تغییرات G و V را بر حسب فاصله تا مرکز کره نشان می‌دهد. دیده می‌شود که در حرکت از مرکز به بیرون، مقدار پتانسیل در داخل کره ثابت است و در خارج از پوسته کروی با رابطه $V = -\gamma m/r$ تغییر می‌کند (ضریب زاویه به طور ناپیوسته تغییر می‌کند). ولی میدان ناگهان به اندازه $\gamma m/a^2$ تغییر می‌کند. با توجه به اینکه اگر σ چگالی سطحی پوسته مادی باشد، داریم $m = 4\pi a^2 \sigma$ ، می‌بینیم که تغییر ناگهانی میدان برابر است با $4\pi\gamma\sigma$ ، بنابراین همان نتایجی که در مثال ۸.۱۳ برای یک صفحه به دست آوردیم در اینجا برای یک پوسته کروی به دست می‌آید.



شکل ۲۴.۱۳. تغییرات G و V بر حسب فاصله تا مرکز کره، برای جرمی که به طور یکنواخت روی یک پوسته کروی توزیع شده است.

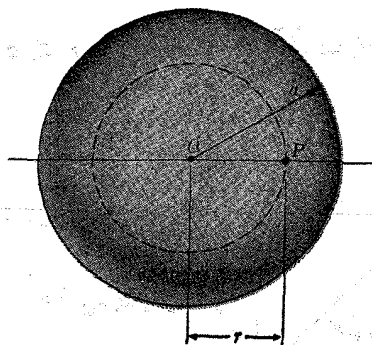
اکنون فرض کنید که جرم به طور یکنواخت در تمام حجم کره توزیع شده باشد، یعنی کره توپر است. در این صورت می‌توان فرض کرد ساختمان کره شبیه پیاز است، یعنی از یک رشته لایه یا پوسته‌های نازک درست شده است. هر لایه میدانی به وجود می‌آورد که از معادله (۲۵.۱۳) یا معادله (۲۶.۱۳) به دست می‌آید. برای نقطه‌ای در خارج کره

(شکل ۲۵.۱۳)، چون فاصله نقطه P تا مرکز، یعنی r ، برای تمام لایه‌ها یکسان است، جرم‌ها با هم جمع می‌شوند و مجدداً معادله (۲۵.۱۳) به دست می‌آید. بنا براین، میدان و پتانسیل گرانشی یک کره توپر با توزیع جرم همگن، در نقاط خارج از کره، همانند میدان و پتانسیل ذره‌ای است با همان جرم که در مرکز کره واقع باشد.*



شکل ۲۵.۱۳. محاسبه میدان گرانشی در نقطه‌ای خارج از یک کره توپر

برای به دست آوردن میدان در یک نقطه داخل کره همگن، نقطه‌ای مانند P را به فاصله r از مرکز کره در نظر می‌گیریم ($r < a$) و کره‌ای به شعاع r رسم می‌کنیم (شکل ۲۶.۱۳). مشاهده می‌کنیم که بنا به معادله (۲۶.۱۳) پوسته‌های با شعاع بزرگتر از r در میدان نقطه P سهمی ندارند، زیرا P در داخل آنها قرار دارد. تمام پوسته‌هایی که شعاع آنها از r کوچکتر است در نقطه P میدانی مشابه با معادله (۲۵.۱۳) به وجود می‌آورند. جرم داخل کره نقطه چین را m' فرض می‌کنیم. بنا به معادله (۲۵.۱۳) میدان در نقطه P برابر است با



شکل ۲۶.۱۳. محاسبه میدان گرانشی در یک نقطه داخل یک کره توپر

هرگاه جرم به جای توزیع همگن، با تقارن کروی توزیع شده باشد یعنی چگالی آن فقط تابع فاصله از مرکز کره باشد باز هم این نتیجه برقرار است. ولی هرگاه توزیع جرم تابع راستا باشد، برقرار نیست.

$$G = -\gamma \frac{m'}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (۲۷.۱۳)$$

حجم کره کامل برابر $\frac{4}{3}\pi a^3$ است، و چون کره همگن است، جرم واحد حجم کره برابر می‌شود با $m/(\frac{4}{3}\pi a^3)$. در این صورت m' جرم موجود در کره به شعاع r برابر است با

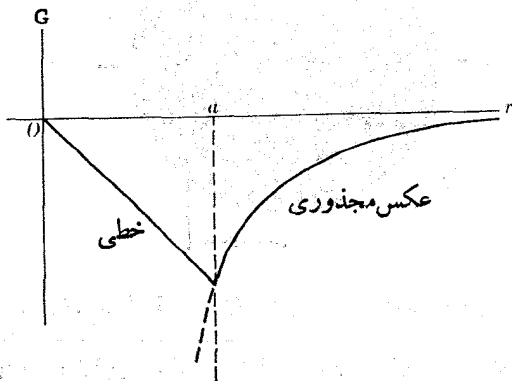
$$m' = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = m \frac{r^3}{a^3}.$$

با قراردادن این مقدار به جای m' در معادله (۲۷.۱۳)، میدان برای یک نقطه در داخل کره یکنواخت به دست می‌آید:

$$G = -\gamma \frac{mr}{a^3} \mathbf{u}_r. \quad (۲۸.۱۳)$$

بنابراین میدان گرانشی در یک نقطه مشخص در داخل کره همگن، با r ، فاصله نقطه تا مرکز کره متناسب است. دلیل اینکه میدان در داخل کره با دور شدن نقطه از مرکز افزایش می‌یابد این است که کاهش مربوط به قانون عکس مجذور، با افزایش جرم که با مکعب فاصله متناسب است جبران می‌شود. شکل ۲۷.۱۳ تغییرات G را برحسب r در یک کره توپر همگن نشان می‌دهد. به عنوان مثال، این شکل، به شرط همگن بودن توزیع جرم در زمین، تغییرات وزن یک جسم را در جابجایی از مرکز زمین تا به یک نقطه خیلی دور از زمین نشان می‌دهد. به عهده دانشجو واگذار می‌شود تا تحقیق کند که در اینجا نیز پتانسیل گرانشی در یک نقطه خارج از کره همگن، از معادله (۲۳.۱۳) به دست می‌آید، ولی برای نقطه‌ای در داخل کره، پتانسیل گرانشی برابر است با

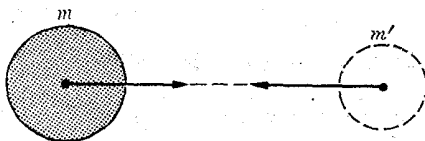
$$V = \frac{\gamma m}{2a^3} (r^2 - 3a^2) \quad r < a$$



شکل ۲۷.۱۳. تغییرات G برای یک کره توپر همگن برحسب فاصله تا مرکز

توجه کنید که در مسئله‌ای که در این بخش بررسی کردیم، میدان گرانشی در یک نقطه تنها به فاصله نقطه تا مرکز بستگی دارد، نه به راستای خط واصل نقطه به مرکز کره. با توجه به تقارن کره نیز این نتیجه را می‌شد انتظار داشت. اگر به جای کره همگن، جسمی با شکل یا تقارنی متفاوت، یا کره‌ای با توزیع جرم ناهمگن (که جرم آن بدون تقارن کروی توزیع شده است) را در نظر می‌گیریم، زاویه نیز در فرمولها ظاهر می‌شود. ولی در مسایل با تقارن کروی، این ویژگیها تنها به فاصله نقطه تا مرکز بستگی دارند. استفاده از شرایط تقارن حل بسیاری از مسایل فیزیک را آسانتر می‌کند.

اکنون ما توانایی آن را داریم بررسی کنیم معادله (۱۰۱۳)، که نیروی جاذبه گرانشی بین دو جرم نقطه‌ای را به دست می‌دهد، در مورد جسم کروی همگن نیز برقرار است. فرض کنید جرم نقطه‌ای m' در فاصله r از مرکز جرم کروی m قرار دارد (شکل ۲۸.۱۳). میدان در نقطه m' برابر $G = \gamma m/r^2$ و نیروی وارد بر جرم m' برابر است با $m'G = \gamma mm'/r^2$. بنا به قانون کنش و واکنش، m' باید نیرویی برابر ولی در سوی مخالف روی m وارد کند. این نیرو را می‌توان چنین تعبیر کرد که ناشی از میدانی است که جرم m' در ناحیه اشغال شده به وسیله m به وجود می‌آورد.



شکل ۲۸.۱۳. برهم کنش گرانشی بین دو کره همگن تنها به فاصله بین مرکزهای آنها بستگی دارد.

اکنون اگر به جای جرم نقطه‌ای m' کره همگنی با همان جرم قرار دهیم، بنا به توجه به قضیه‌ای که ثابت کردیم میدان در اطراف m تغییر نمی‌کند، بنا بر این نیروی وارد بر m نیز همان است و تغییر نمی‌کند. بار دیگر به قانون کنش و واکنش استناد می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که نیروی وارد بر m' نیز همان است و تغییر نمی‌کند. بنا بر این دو جرم کروی همگن یکدیگر را مطابق قانون (۱۰۱۳) جذب می‌کنند، که در آن r فاصله بین مرکزهای دو کره است. اگر جرمها همگن یا کروی نباشند، چند سازه هندسی، از جمله زاویه‌ای که وضع نسبی دو جرم را معین می‌کند، در رابطه‌های مربوط به برهم کنش گرانشی آنها ظاهر می‌شوند.

مثال ۹.۱۳. در تغییرات شتاب گرانی که بر اثر یک جابجایی کوچک از سطح زمین به سمت داخل یا خارج آن ناشی می‌شود، بحث کنید.

حل: ارتفاع جسم از سطح زمین را با h نشان می‌دهیم. فاصله آن تا مرکز زمین برابر می‌شود با $r = R + h$. بنا به معادله (۲۵.۱۳)، شدت میدان گرانشی برابر است با

$$G = \frac{\gamma M}{(R + h)^2}$$

که در آن M جرم زمین است. با توجه به اینکه h در مقابل R خیلی کوچک است و با استفاده از فرمول تقریب دو جمله‌ای (پ. ۲۸) و نتیجه مثال ۱۰.۱۳، داریم

$$G = \frac{\gamma M}{R^2(1 + h/R)^2} = g \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx g \left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

با وارد کردن مقادیر عددی g و R به دست می‌آید

$$G = 9.81 - 3.06 \times 10^{-6} h \text{ ms}^{-2}.$$

این رابطه تغییر شتاب گرانی و وزن یک جسم را در ارتفاع اندک h بالای سطح زمین نشان می‌دهد.

اگر برعکس، جسم به اندازه h در داخل زمین فرو رود، داریم $r = R - h$. چنانچه در معادله (۲۸.۱۳) M را جانشین m و R را جانشین a کنیم، به دست می‌آید

$$G = \frac{\gamma M(R-h)}{R^2} = \frac{\gamma M}{R^2} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = g \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

یا با قرار دادن مقادیر مناسب، داریم

$$G = 9.81 - 1.53 \times 10^{-6} h \text{ ms}^{-2}.$$

بدین طریق، در هر دو مورد، شتاب گرانی کاهش می‌یابد، ولی برای نقاط بالای سطح زمین این کاهش سریعتر صورت می‌گیرد. (به شکل ۲۷.۱۳ مراجعه کنید).

۸.۱۳ اصل هم‌ارزی

اینکه جرم لختی و جرم گرانشی برای تمام اجسام یکی است، به نتیجه مهم زیر منتهی می‌شود:

در یک میدان گرانشی، تمام اجسام واقع در یک مکان، شتاب یکسانی پیدا می‌کنند.

یک مثال برای این واقعیت، کشف گالیله است که می‌گوید که تمام اجسام با شتاب یکسان روی زمین سقوط می‌کنند. چنانکه قبلاً اشاره شد، این کشف به نوبه خود دلیل غیرمستقیمی بر یکسانی جرم لختی و جرم گرانشی است.

برای اثبات این حکم، اشاره می‌کنیم در جایی که میدان گرانشی G است، نیروی وارد بر جرم m برابر می‌شود با $F = mG$ و شتاب آن برابر است با

$$a = \frac{F}{m} = G$$

که به m ، جرم جسمی که میدان گرانشی بر آن اثر می‌کند بستگی ندارد. توجه کنید که شتاب جسم برابر است با شدت میدان، و این امر با نتیجه‌گیری قبلی ما که میدان گرانشی بر حسب ms^{-2} اندازه‌گیری می‌شود تطبیق می‌کند.

اگر آزمایشگاهی در میدان گرانشی قرار گرفته باشد، آزمایشگر مشاهده می کند تمام اجسامی که مورد آزمایش او هستند و نیروهای دیگری بر آنها اثر نمی کند، همگی تحت تأثیر شتاب یکسانی قرار می گیرند. آزمایشگر با مشاهده این شتاب مشترک، می تواند نتیجه بگیرد که آزمایشگاه او در یک میدان گرانشی قرار دارد.

با این همه، این نتیجه تنها توجیه ممکن برای مشاهده یک شتاب مشترک نیست. در بخش ۲.۶، هنگام گفتگو در مورد حرکت نسبی، اشاره کردیم اگر a شتاب یک ناظر متحرک نسبت به یک ناظر لخت و a شتاب یک جسم نسبت به ناظر لخت باشد، شتاب اندازه گیری شده به وسیله ناظر متحرک با رابطه زیر داده می شود:

$$a' = a - a_0$$

اگر جسم آزاد باشد، a شتاب اندازه گیری شده به وسیله ناظر لخت، برابر صفر است. در نتیجه، شتاب اندازه گیری شده به وسیله ناظر شتابدار برابر است با $a' = -a_0$. بدین طریق، به نظر ناظر شتابدار تمام اجسام آزاد دارای شتاب مشترک $-a_0$ می باشند. این وضع چیزی است که در میدان گرانشی با شدت $G = -a_0$ دیدیم. پس نتیجه می گیریم که

یک ناظر هیچ وسیله ای ندارد تا تشخیص دهد آیا آزمایشگاه او در یک میدان گرانشی یکنواخت قرار دارد یا در یک چارچوب مرجع شتابدار.

این حکم به عنوان اصل هم ادزی شناخته شده است، زیرا تا آنجا که به توصیف حرکت مربوط می شود، بین یک میدان گرانشی و یک چارچوب مرجع شتابدار یک هم ارزی نشان می دهد. بدین طریق دیده می شود که گرانش و لختی دو ویژگی مختلف ماده نیستند، بلکه دوجنبه متفاوت یک مشخصه اساسی تر و عمومی تر هر ماده ای می باشند.

به عنوان مثال، فرض کنید ناظری آزمایشگاه خود را در واگنی که با سرعت ثابت روی یک ریل مستقیم و افقی حرکت می کند قرار داده و پنجره های واگن را نیز بسته است به گونه ای که آزمایشگر راهی به جهان خارج ندارد. او آزمایشهایی با گویهای بلیارد انجام می دهد و آنها را از بالا رها می کنند. در این صورت می تواند نتیجه بگیرد که واگن او با یک میدان گرانشی در راستای قائم به سوی پایین احاطه شده است، که این تفسیری است طبیعی. ولی به همان اندازه می تواند فرض کند که واگن او با شتاب قائمی برابر با شتاب گویها ولی در سوی مخالف، بالا می رود و گویها آزاد هستند و تحت تأثیر میدان گرانشی قرار ندارند.

اکنون فرض کنید ناظر گویها را روی میز بلیاردی که در واگن قرار دارد می گذارد. هنگامی که ناظر شاهد حرکت گویها با شتاب یکسان به سمت عقب واگن باشد، می تواند نتیجه بگیرد یا یک میدان گرانشی جدید به سمت عقب واگن بر آزمایشگاه اثر می کند، یا اینکه آزمایشگاه با شتاب افقی به سمت جلو در حرکت است. فرض دومی خیلی معمول است، زیرا افزایش سرعت قطار بستگی به تصمیم راننده آن دارد. با وجود این، ممکن است قطار از یک سربالایی بالا برود، که این، هم ارز است با یک میدان گرانشی موازی کف

واگن و برای حرکت گویهای بیلارد همان نتیجه را می‌دهد.
به سبب اصل هم‌ارزی،

قوانین طبیعت باید به گونه‌ای نوشته شوند که تمیز بین یک میدان گرانشی یکنواخت و یک چارچوب مرجع شتابدار غیرممکن باشد.

این حکم پایه اصل عام نسبیت را تشکیل می‌دهد که در سال ۱۹۱۵ (۱۲۹۴ ه. ش.) به وسیله اینشتین بیان شد. این اصل ایجاب می‌کند که قوانین فیزیک به صورتی نوشته شوند که مستقل از حالت حرکت چارچوب مرجع باشند. چنانکه مشاهده می‌کنیم، ایده اساسی اصل عام نسبیت بسیار ساده است، با وجود این، فرمول‌بندی ریاضی آن نسبتاً پیچیده است و ما در اینجا در این مورد گفتگو نخواهیم کرد.

اکنون مورد یک ناظر شتابدار را در میدان گرانشی G بررسی می‌کنیم. شتاب اجسامی که تنها تحت تأثیر میدان گرانشی اندازه‌گیری شده به وسیله این ناظر می‌باشند با رابطه $a' = G - a$ داده می‌شود. به عنوان یک مثال مشخص، موشکی را که از زمین به سمت بالا پرتاب می‌شود در نظر می‌گیریم. در این صورت $G = g$ است. فرض کنیم $a = -ng$ شتاب موشک نسبت به زمین و n مقدار a نسبت به g است. (علامت منفی نشان می‌دهد که موشک به سمت بالا حرکت می‌کند.) بنا بر این شتاب یک جسم آزاد در داخل موشک، نسبت به موشک، برابر می‌شود با $a' = (n + 1)g$. به عنوان مثال، در موشکی که با شتاب چهار برابر شتاب گرانی به سمت بالا حرکت می‌کند ($n = 4$)، وزن تمام اجسام داخل موشک ۵ برابر وزن معمولی آنهاست. این افزایش ظاهری وزن، بخصوص در مرحله پرتاب یک موشک با شتاب بزرگ، بسیار مهم است.

اکنون به عنوان مثال دیگر، ماهواره‌ای را در مدارش در نظر بگیرید. در اینجا $a = G$ است، زیرا ماهواره در زیر تأثیر گرانش زمین قرار دارد. در این حالت $a' = 0$ است و تمام اجسام داخل ماهواره بی‌وزن به نظر می‌رسند، زیرا شتاب آنها نسبت به ماهواره برابر صفر است. البته این تنها یک بی‌وزنی نسبی است، زیرا ماهواره و محتویات آن در میدان گرانشی یکسان حرکت می‌کنند و دارای شتاب یکسانی هستند. اجسام داخل ماهواره نسبت به خود آن، اجسام آزاد به نظر می‌رسند، مگر اینکه نیروهای دیگری بر آنها اثر کنند؛ ولی نسبت به یک ناظر زمینی، دارای شتاب هستند و زیر تأثیر میدان گرانشی قرار دارند. یک آدم در داخل آسانسوری که (بر اثر پاره شدن کابل آن) با شتاب گرانی سقوط می‌کند همین بی‌وزنی را نسبت به آسانسور تجربه خواهد کرد. در چنین حالتی (همانند یک ماهواره)، $a = g$ و $a' = 0$ است. تأکید می‌کنیم که بی‌وزنی بدین معنی نیست که دیگر اثر نیروهای گرانشی قطع شده است، بلکه به معنای آن است که بر تمام اجسام و از جمله جسمی که به عنوان چارچوب مرجع به کار می‌رود، میدان واحد و یکسانی اثر می‌کند که شتاب مشترکی را به وجود می‌آورد، و در نتیجه اجسام دارای شتاب نسبی نیستند، مگر اینکه نیروهای دیگری بر آنها وارد شود. به گفته دیگر، اگر ناظری با شتاب $a = G$ نسبت به یک چارچوب لخت حرکت کند، میدان گرانشی G را می‌توان «از بین برد».

۹.۱۳ گرانش و نیروهای بین مولکولی

در بخش‌های قبلی این فصل، دیدیم که چگونه نیروهای گرانشی حرکت سیاره‌ها و اجسام نزدیک سطح زمین را بخوبی توصیف می‌کنند. اکنون خیلی جالب است بفهمیم آیا عامل پیوند مولکول‌ها در یک تکه از ماده یا اتم‌ها در یک مولکول از همین نوع برهم‌کنش است یا نه. ابتدا یک مولکول ساده مانند مولکول هیدروژن را که از دو اتم هیدروژن به فاصله $r = 0.745 \times 10^{-10} \text{ m}$ تشکیل شده است در نظر می‌گیریم. جرم هر اتم هیدروژن برابر است با $m = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$. بنابراین برهم‌کنش گرانشی دو اتم متناظر است با یک انرژی پتانسیل

$$E_p = -\gamma \frac{mm'}{r} = 2.22 \times 10^{-54} \text{ J} = 1.39 \times 10^{-35} \text{ eV}.$$

ولی مقدار تجربی انرژی تجزیه یک مولکول هیدروژن برابر با

$$7.18 \times 10^{-19} \text{ J} (= 4.48 \text{ eV})$$

که 10^{35} مرتبه بزرگتر از انرژی گرانشی است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که برهم‌کنش گرانشی نمی‌تواند عامل تشکیل مولکول هیدروژن باشد. نتایج مشابهی نیز برای مولکول‌های پیچیده‌تر به دست می‌آیند.

در مورد یک آبگون، انرژی لازم برای بخار کردن یک مول آب (۱۸g) یا $10^{23} \times 2.3 \times 10^3 \text{ J}$ برابر $10^3 \times 4.06 \text{ J}$ است، که متناظر با یک انرژی جدایی در حدود $10^{-21} \times 6 \text{ J}$ به ازای هر مولکول است. فاصله متوسط مولکول‌های آب در حدود 10^{-10} m و جرم یک مولکول آن برابر $10^{-26} \times 3 \text{ kg}$ است که متناظر است با یک انرژی پتانسیل گرانشی حدود $10^{-52} \times 2 \text{ J}$ ، که باز هم خیلی کوچکتر از آن است که وجود آب مایع را توجیه کند.

بنابراین نتیجه می‌گیریم نیروهایی که موجب تشکیل مولکول‌ها از اتم‌ها یا ماده کپه‌ای از مولکول‌ها می‌شوند، نمی‌توانند نیروهای گرانشی باشند. در چهار فصل بعدی که در جلد دوم خواهند آمد، نیروهای دیگری که به نظر می‌رسد موجب این اجتماع می‌شوند، یعنی برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی، را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

با وجود این، چون برهم‌کنش گرانشی یک اثر جرم می‌باشد، در مورد اجسام خیلی سنگین و از نظر الکتریکی خنثی، مانند سیاره‌ها، بسیار مهم است. به همین دلیل، هر چند که نیروهای گرانشی ضعیف‌ترین نیروهای شناخته شده در طبیعت می‌باشند، ولی بزرگترین نیرویی است که در سطح زمین احساس می‌کنیم. نیروهای گرانشی پاسخگوی تعداد زیادی از پدیده‌های عادی است که در زندگی روزمره ما اثر می‌گذارند. به عنوان مثال، کشند (جزر و مد) به طور کامل ناشی از برهم‌کنش گرانشی ماه و خورشید با زمین است.

فهرست منابع

1. «The Homocentric Spheres of Eudoxus,» H. Swenson; *Am. J. Phys.* 31, 456 (1963).
2. «The Celestial Palace of Tycho Brahe,» J. Christianson; *Sci. Am.*, February 1961, page 118.
3. «Johannes Kepler's Universe: Its Physics and Metaphysics,» G. Holton; *Am. J. Phys.* 24, 340 (1956).
4. «Newton and the Cause of Gravity,» M. Evans; *Am. J. Phys.* 26, 619 (1958).
5. «The Eotvos Experiment,» R. Dicke; *Sci. Am.* December 1961, page 84.
6. «Gravitational and Inertial Mass,» G. B. Bronson; *Am. J. Phys.* 28, 475 (1960).
7. «Guidelines to Antigravity,» R. Forward; *Am. J. Phys.* 31, 166 (1963).
8. *Introduction to Engineering Mechanics*, by J. Huddleston. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961, Section 6.8.
9. *Vector Mechanics*, by D. Christie. New York: McGraw-Hill, 1964, Chapter 17.
10. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, by R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 7.
11. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963; page 92, Newton; page 105, Cavendish.

۱۲. سایمون، کیث، ر. مکانیک، ترجمه اعظم نیرومندراد و غلامحسین همدانی، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۶، فصل ۶.

۱۳. گاموف، ژرژ، نیروی ثقل، ترجمه رضا اقصی، تهران، شرکت سهامی کتابهای جیبی، ۱۳۴۷.

مسئله‌ها

۱۰۱۳. نیروی جاذبه گرانشی بین زمین و (الف) ماه، (ب) خورشید را حساب کنید. نسبت بین این دو نیرو را پیدا کنید.

۲۰۱۳. جاذبه گرانشی بین دو پروتون را در یک مولکول هیدروژن حساب کنید. فاصله آنها برابر است با $10^{-10} \text{ m} \times 10^4$.

۳۰۱۳. نیروی جاذبه گرانشی بین پروتون و الکترون را در یک اتم هیدروژن حساب کنید. فرض کنید الکترون یک مدار دایره‌ای به شعاع $10^{-10} \text{ m} \times 53$ دور پروتون می‌پیماید.

۴۰۱۳. فاصله میانگین بین دو اتم هلیوم را در یک مول در شرایط متعارفی دما و فشار برآورد کنید. با استفاده از این فاصله، جاذبه گرانشی بین دو اتم هلیوم مجاور را برآورد کنید. جرم اتم هلیوم را می‌توان 4 amu در نظر گرفت.

۵۰۱۳. فاصله میانگین بین دو مولکول آب را در حالت مایع برآورد کنید. با استفاده از این فاصله جاذبه گرانشی بین دو مولکول مجاور آب را حساب کنید. یک مولکول آب از دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن تشکیل شده است.

۶.۱۳. دو گوی آهنی، هر کدام به جرم 10 kg ، در تماس با هم قرار دارند. جاذبه گرانشی بین آنها را حساب کنید. آن را با جاذبه گرانشی زمین روی هریک از گویها مقایسه کنید. اگر بخواهیم دو گوی را از هم جدا کنیم آیا جاذبه بین آنها را «احساس» می‌کنیم؟ [دانه‌مایی: ممکن است چگالی آهن را لازم داشته باشید. مقدار آن در جدول ۲.۲ آمده است.]

۷.۱۳. جاذبه گرانشی ایجاد شده روی یک جسم به جرم m را که در سطح زمین واقع است با جاذبه گرانشی تولید شده روی همین جرم توسط (الف) ماه، (ب) خورشید، مقایسه کنید. در مورد امکان مشاهده تغییر وزن یک جسم بر اثر حرکت چرخشی زمین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۸.۱۳. کره‌ای به جرم 50 kg در یک کفه ترازویی با طول بازوهای برابر قرار دارد و ترازو در حالت ترازمندی است. یک جرم کروی بزرگتر (با جرم 10^3 kg $\times 58$) را می‌غلطانند تا درست در زیر این جرم قرار گیرد. در این وضع، فاصله بین مراکز کره‌ها 50 m است. برای برقراری مجدد ترازمندی چه جرمی باید در کفه دیگر ترازو قرار داده شود؟ g را برابر 980 ms^{-2} بگیرید. در قرن گذشته، جی. فون جولی^۱ برای تعیین مقدار g ، از این روش استفاده کرد.

۹.۱۳. شخصی 687 N وزن دارد. به فرض دو برابر شدن شعاع زمین، وزن این شخص چقدر می‌شود اگر (الف) جرم زمین تغییر نکند؛ (ب) اگر چگالی میانگین زمین ثابت بماند؟

۱۰.۱۳. شتاب گرانی را در سطح خورشید حساب کنید. شعاع خورشید 110 برابر شعاع زمین و جرم آن 330000 برابر جرم زمین است. همین محاسبه را در مورد زهره، مشتری و ماه انجام دهید.

۱۱.۱۳. شخصی 1080 N وزن دارد. حساب کنید این شخص در سطح خورشید و در سطح ماه چقدر وزن خواهد داشت؟ جرم او در این دو محل چقدر می‌شود؟

۱۲.۱۳. شخصی در تراز دریا 785 N وزن دارد. جرم و وزن این شخص را در ارتفاع 8000 m بالای سطح دریا پیدا کنید.

۱۳.۱۳. با استفاده از داده‌های جدول ۱۰.۱۳ در مورد شعاع و دوره حرکت مداری سیاره‌ها، جرم خورشید را پیدا کنید. تنها سه سیاره (زهره، زمین و مشتری) را به کار ببرید.

۱۴.۱۳. در یک آزمایش کلاوندیش (شکل ۳.۱۳)، هریک از دو کره کوچک 100 gr جرم، و میله (با جرم قابل اغماض) 50 m طول دارد. دوره نوسانهای پیچشی دستگاه 770 s است. هریک از دو کره بزرگ 100 kg جرم دارد و فاصله مرکز کره‌های بزرگ و کوچک 10 m است. انحراف زاویه‌ای میله را پیدا کنید.

۱۵.۱۳. تا چه ارتفاعی باید بالا رفت تا شتاب گرانی به اندازه 1% تغییر کند؟ برای به دست آوردن همین تغییر تا چه عمقی باید در ژرفای زمین فرو رفت؟

۱۶.۱۳. ارتفاع و سرعت یک ماهواره (روی یک مدار دایره‌ای در صفحه استوا) چقدر

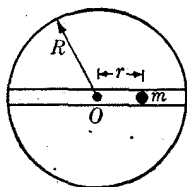
باید باشد تا همیشه بالای یک نقطه از سطح زمین باقی بماند؟

۱۷۰۱۳. ماهواره‌ای در ارتفاع 300 km از زمین در یک مدار دایره‌ای در گردش است. (الف) سرعت، (ب) دوره گردش آن دور زمین، و (ج) شتاب مرکز‌گرایی آن را حساب کنید.

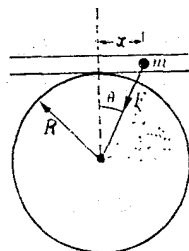
۱۸۰۱۳. نتیجه قسمت (ج) مسئله فوق را با مقدار g در این ارتفاع، که مستقیماً از روش مثال ۹۰۱۳ محاسبه شده باشد، مقایسه کنید.

۱۹۰۱۳. دوره ماهواره‌ای که در مداری با شعاع $1/4$ شعاع مدار ماه دور زمین بگردد چقدر می‌شود؟ دوره گردش ماه در حدود ۲۸ روز است. نسبت سرعت ماهواره به سرعت ماه چقدر است؟

۲۰۰۱۳. ذره‌ای به جرم m در داخل یک لوله افقی (شکل ۲۹۰۱۳) بر اثر جاذبه گرانشی زمین می‌تواند بدون مالش حرکت کند. به فرض اینکه x در مقایسه با R خیلی کوچک باشد، ثابت کنید که ذره دارای یک حرکت هماهنگ ساده با دوره $P = 2\pi\sqrt{R/g}$ است. مقدار P را پیدا کنید. این بزرگترین دوره یک آونگ در سطح زمین است. می‌توانید آن را ثابت کنید؟

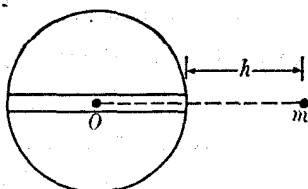


شکل ۳۰۰۱۳

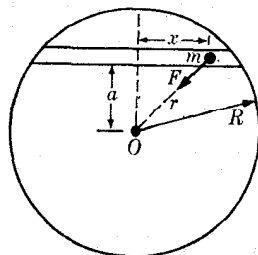


شکل ۲۹۰۱۳

۲۱۰۱۳. فرض کنید چاهی در طول یک قطر زمین کنده شده باشد. (شکل ۳۰۰۱۳). (الف) اگر چگالی زمین یکنواخت فرض شود، ثابت کنید که نیروی وارد بر جرم m در فاصله r از مرکز زمین برابر است با $F = -mgr/R$. (ب) نشان دهید که حرکت جرم m هماهنگ ساده و دوره آن در حدود ۹۰ دقیقه است. (ج) معادلات مکان، سرعت و شتاب را به صورت توابعی از زمان، با مقادیر عددی ثابتها، بنویسید.



شکل ۳۲۰۱۳



شکل ۳۱۰۱۳

۲۲.۱۳. ثابت کنید که حرکت بدون مالش در یک تونل که در طول وتری از زمین کنده شده است، (شکل ۳۱.۱۳) هماهنگ ساده است. دوره حرکت را حساب کنید.

۲۳.۱۳. جرم m از ارتفاع زیاد h در بالای تونلی که مطابق شکل ۳۲.۱۳ در داخل زمین کنده شده، رها می‌شود. (الف) m با چه سرعتی از مرکز زمین می‌گذرد؟ (ب) آیا حرکت هماهنگ ساده است؟ (ج) آیا حرکت دوره‌ای است؟ دلیلهای مربوط به پاسخ خود را ذکر کنید.

۲۴.۱۳. با استفاده از داده‌های مربوط به حرکت خورشید در کهکشان راه شیری (شکل ۱۰.۷)، و به فرض اینکه کهکشان به صورت یک توده کروی از ستارگان باشد، جرم کل کهکشان را برآورد کنید. با فرض اینکه، به طور میانگین، جرم همه ستارگان برابر جرم خورشید ($10^30 \times 1998$ kg) است، تعداد و فاصله میانگین آنها را برآورد کنید.

۲۵.۱۳. معادله‌ای بنویسید که به طور جبری انرژی کل دستگاه (الف) زمین - ماه، (ب) خورشید - زمین - ماه، را بیان کند.

۲۶.۱۳. انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی کل زمین را در حرکت آن دور خورشید برآورد کنید (تنها انرژی پتانسیل گرانشی نسبت به خورشید را در نظر بگیرید).

۲۷.۱۳. با استفاده از قضیه ویرال (بخش ۱۳.۸)، رابطه انرژی کل یک مدار دایره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانشی [معادله (۶.۱۳)] را پیدا کنید.

۲۸.۱۳. یکی از موشکهای پایونیر توانست تا حدود ارتفاع 125000 km برسد. با صرف نظر کردن از اثر ماه، سرعتی را که این موشک در برگشت، هنگام ورود به جو زمین داشته است پیدا کنید. فرض کنید موشک در راستای قائم شلیک شده بود و جو تا ارتفاع 130 km بالای سطح زمین ادامه دارد.

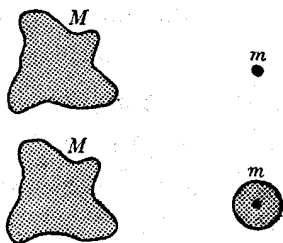
۲۹.۱۳. اگر h ارتفاع جسمی در بالای زمین باشد، $r = R + h$ می‌شود. با استفاده از بسط دوجمله‌ای (پ. ۲۱)، تحقیق کنید که اگر h در مقایسه با R خیلی کوچک باشد، معادله (۱۰.۱۳) به صورت $v^2 = 2gh$ درمی‌آید.

۳۰.۱۳. سرعت فرار را برای عطارد، زهره، مریخ و مشتری حساب کنید. [دانهمایی: برای ساده کردن محاسبه، ابتدا سازه $\sqrt{2\gamma}$ را حساب کنید. سپس برای هر سیاره کافی است آن را در $\sqrt{M/R}$ ضرب کنید.]

۳۱.۱۳. (الف) سرعت فرار از منظومه شمسی را برای ذره‌ای که فاصله آن از خورشید برابر فاصله آن از زمین است حساب کنید. (ب) این نتیجه را به دست آوردن حداقل سرعت فرار ذره‌ای که از زمین پرتاب می‌شود به کار ببرید. سرعت زمین را به حساب آورید، ولی از میدان گرانشی آن صرف نظر کنید.

۳۲.۱۳. ذره‌ای روی سطح زمین در حالت سکون قرار دارد. (الف) با به حساب آوردن جاذبه گرانشی زمین و خورشید، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ذره را نسبت به خورشید پیدا کنید. (ب) سرعت فرار از منظومه شمسی را پیدا کنید. آن را با مسئله ۳۱.۱۳ مقایسه کنید.

۳۳.۱۳. با به کار بردن نتیجه‌های بخش ۷.۱۳، نشان دهید که برهم‌کنش گرانشی بین جرمی به شکل دلخواه M (شکل ۳۳.۱۳) و یک جرم نقطه‌ای m ، و بین M و یک جسم کروی همگن و دارای همان جرم m ، با هم یکسان‌اند، به شرطی که مرکز جسم کروی در مکان ذره نقطه‌ای قرارگیرد.



شکل ۳۳.۱۳

۳۴.۱۳. انرژی پتانسیل بین زحل و حلقه‌هایش را حساب کنید. فرض کنید جرم حلقه‌ها $۳۵ \times 10^{18} \text{ kg}$ است و در فاصله میانه‌گین $۱۰^8 \times ۱۲۱ \text{ km}$ از مرکز زحل متمرکزند.

۳۵.۱۳. انرژی پتانسیل گرانشی داخلی λ جسم را، که جرم هریک m و هر کدام در یک رأس مکعبی به ضلع a قرار دارند، حساب کنید. حالتی را در نظر بگیرید که هر جرم از مرتبه بزرگی جرم خورشید و طول هر ضلع مکعب یک پارسک باشد. (به مسئله ۱۶.۲ مراجعه کنید.)

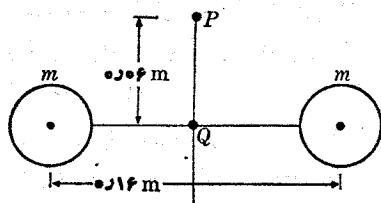
۳۶.۱۳. ثابت کنید که انرژی لازم برای ساختن یک جسم کروی به شعاع R با افزودن پیاپی لایه‌های ماده به صورت یک پیاز، تا رسیدن به شعاع نهایی (با حفظ یکنواختی چگالی) برابر است با $E_p = -3\gamma M^2 / \Delta R$.

۳۷.۱۳. مقدار انرژی پتانسیل گرانشی کهکشان ما را برآورد کنید. فرض کنید که تمام اجرام تشکیل دهنده کهکشان تقریباً دارای جرم یکسان با خورشید و فاصله آنها از هم از مرتبه ۱۰^{21} m است. [داهنمایی: کهکشان را کروی فرض کنید و از نتیجه مسئله ۳۶.۱۳ استفاده کنید.]

۳۸.۱۳. با به کار بردن قضیه ویریال و نتایج مسئله پیش، مقدار انرژی جنبشی کهکشان را (به استثنای انرژی داخلی ستاره‌ها) برآورد کنید.

۳۹.۱۳. یک سنگ آسمانی در آغاز در فاصله ۶ برابر شعاع زمین از مرکز زمین در حالت سکون قرار دارد. سرعت آن را هنگام رسیدن به سطح زمین حساب کنید.

۴۰.۱۳. دو جرم برابر ۴۰ kg در فاصله ۱۶ m از یکدیگر قرار دارند (شکل ۳۴.۱۳). جرم سومی از نقطه P به فاصله برابر از دو جرم و به فاصله ۱۶ m از خط واصل آن دو رها می‌شود. سرعت جرم سوم را هنگام گذر از نقطه Q تعیین کنید. اگر جرم آن ۱ kg باشد، شتاب آن را در نقطه P و در نقطه Q حساب کنید.



شکل ۳۴.۱۳

۴۱.۱۳. موشکی در راستای قائم از سطح زمین به سمت ماه پرتاب می‌شود. سوخت آن در مدت نسبتاً کوتاهی بعد از پرتاب مصرف می‌شود. (الف) درجه نقطه‌ای از مسیر، شتاب آن برابر صفر است؟ (ب) حداقل سرعت اولیه موشک چقدر باید باشد تا به این نقطه برسد و بر اثر جاذبه ماه روی آن سقوط کند؟ (ج) در این صورت، موشک با چه سرعتی به سطح ماه می‌رسد؟

۴۲.۱۳. نشان دهید که زمان لازم برای اینکه جسمی از فاصله r از مرکز زمین، روی زمین بیفتد برابر است با

$$t = (r^{3/2}/R\sqrt{2g})[-V(R/r)(1 - R/r) + \sin^{-1}V(R/r)].$$

تحقیق کنید که اگر r در مقایسه با R خیلی بزرگ باشد، $t = (V(R/r)/2g)^{1/2}$ می‌شود. [دانه‌مایی: از معادله (۱۰.۱۳) استفاده کنید؛ v را مساوی dr/dt قرار دهید، معادله را برای dt حل کنید و سپس انتگرال بگیرید.]

۴۳.۱۳. ماهواره‌ای به جرم 5000 kg در یک مسیر دایره‌ای به شعاع 8000 km دور زمین می‌چرخد. اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی جنبشی، پتانسیل و کل آن را پیدا کنید.

۴۴.۱۳. ماهواره‌ای به جرم 5000 kg در ارتفاع 8000 km بالای سطح زمین یک مدار دایره‌ای را می‌پیماید. بعد از چند روز، به علت مالش جو، ارتفاع مدار به 650 km می‌رسد. تغییرات (الف) سرعت، (ب) سرعت زاویه‌ای، (ج) انرژی جنبشی، (د) انرژی پتانسیل، و (ه) انرژی کل را حساب کنید. مسیر را در هر لحظه دایره‌ای فرض کنید، زیرا کاهش ارتفاع بسیار کند است.

۴۵.۱۳. با مراجعه به مسئله پیش فرض کنید که مقاومت هوا را می‌توان با نیروی میانگین 175 N نشان داد. (الف) گشتاور ناشی از این نیرو را حساب کنید و به کمک این نتیجه، زمان لازم برای سقوط فاصله ذکر شده در بالا را برآورد کنید. (ب) آهنگ اتلاف انرژی را پیدا کنید. از اینجا نیز زمان محاسبه شده در سؤال (الف) را برآورد کنید. (ج) با استفاده از میانگین دوره حرکت، تعداد کل دورهایی را که ماهواره در این مدت پیموده است پیدا کنید.

۴۶.۱۳. با در نظر گرفتن جرم کاهیده، در نتایج بخش ۵.۱۳ تصحیحات لازم را به عمل آورید.

۴۷.۱۳. در یک ستاره دوتایی، جرم یک ستاره $3 \times 10^{33}\text{ kg}$ و جرم دیگری $4 \times 10^{33}\text{ kg}$

است. اگر بدانیم که فاصله این دو ستاره 10^{17} m است، سرعت زاویه‌ای آنها را حول مرکز جرمشان پیدا کنید. همچنین اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی داخلی کل آنها را به دست آورید.

۴۸۰۱۳. با استفاده از یک کاغذ رسم قطبی، معادله (12.13) را به ازای $d = 1$ و (الف) $\epsilon = 0.5$ ، (ب) $\epsilon = 1$ و (ج) $\epsilon = 2$ رسم کنید. نظر به اینکه منحنی مقارن است، تنها باید r را برای θ بین 0° و 180° محاسبه و منحنی را زیر محور x ها تکرار کرد. مهمترین خصوصیات هر منحنی را مشخص کنید. [دانهمایی: مقادیر θ را 20° به 20° به کار ببرید.]

۴۹۰۱۳. نشان دهید که نسبت بین سرعت یک جسم دلخواه در حضیض^۱ (کمترین فاصله از مرکز نیرو) و اوج^۲ (بزرگترین فاصله از مرکز) برابر است با $(1 - \epsilon)/(1 + \epsilon)$. [دانهمایی: توجه داشته باشید که در هر دو نقطه سرعت بر شعاع عمود است.]

۵۰۰۱۳. یک ستاره دنباله دار روی یک بیضی با خروج از مرکز 0.8 حرکت می‌کند. نسبت بین (الف) فاصله تا خورشید، (ب) سرعتهای خطی، (ج) سرعتهای زاویه‌ای این ستاره را در حضیض و در اوج پیدا کنید.

۵۱۰۱۳. خروج از مرکز ϵ و نصف قطر بزرگ a مربوط به مدار بعضی سیاره‌ها در جدول زیر آمده‌اند. (یادآوری می‌کنیم که $1 \text{ AU} = 1.495 \times 10^{11} \text{ m}$)

عطارد	زمین	مریخ	
۰۰۲۰۶	۰۰۵۱۷	۰۰۰۹۳	ϵ
۰۳۸۷	۱۰۰۰۰	۱۵۲۴	$a(\text{AU})$

(الف) کوتاهترین فاصله نزدیک شدن به خورشید، (ب) بیشترین فاصله از خورشید، (ج) انرژی کل حرکت انتقالی، (د) اندازه حرکت زاویه‌ای، (ه) دوره حرکت گردشی، (و) سرعت در اوج و در حضیض را برای هریک از این سیاره‌ها حساب کنید.

۵۲۰۱۳. ماهواره‌ای در فاصله‌ای برابر با شعاع زمین در یک مدار بیضی قرار داده شده است. سرعت افقی اولیه‌ای که به آن داده شده 1.7 برابر سرعتی است که برای به حرکت درآوردن آن در یک مدار دایره‌ای در این فاصله لازم است. پیدا کنید (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای ماهواره را، (ب) انرژی کل آن را، (ج) خروج از مرکز مدار ماهواره را، (د) حداکثر و حداقل فاصله آن را از سطح زمین، (ه) نصف قطر بزرگ مدار آن را، و (و) دوره حرکت گردشی آن را. (جرم ماهواره را $m = 50 \text{ kg}$ بگیرید.)

۵۳۰۱۳. مسئله ۵۲.۱۳ را، به فرض اینکه سرعت افقی اولیه ماهواره 0.9 سرعت

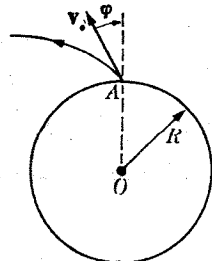
لازم برای ایجاد یک مدار دایره‌ای باشد، از نو حل کنید.

۵۴.۱۳. هنگام پرواز جمینی ۱۵ [۲۱ تا ۲۹ اوت ۱۹۶۵ (۳۰ مرداد تا ۷ شهریور ۱۳۴۴ ه. ش.)]، ارتفاع اوج و حضیض نسبت به سطح زمین بترتیب عبارت بودند از ۳۵۲ km و ۱۰۷ km. خروج از مرکز مدار، سرعت بیشینه و سرعت کمینه این سفینه فضایی و تغییرات میدان گرانشی بین اوج و حضیض را حساب کنید.

۵۵.۱۳. یک ماهواره مصنوعی روی مداری حرکت می‌کند که فاصله اوج و حضیض آن از زمین بترتیب ۴۰۰۰ km و ۶۴۰ km است. (الف) نصف قطر بزرگ، (ب) خروج از مرکز، (ج) معادله مدار، (د) سرعت ماهواره در اوج و در حضیض، (ه) دوره گردش، (و) انرژی کل آن را اگر جرم ۱۰۰ kg باشد، حساب کنید. (ز) با استفاده از یک کاغذ رسم قطبی مسیر ماهواره را رسم کنید.

۵۶.۱۳. ماهواره آمریکایی کشف ۲۳ دارای یک مدار بیضوی با حضیضی در ۱۷۵ کیلومتری بالای سطح زمین و سرعت آن در حضیض $۸۷۳ \text{ km s}^{-۱}$ بود. (الف) خروج از مرکز مدار، (ب) نصف قطر بزرگ آن، (ج) دوره گردش ماهواره، و (د) سرعت و ارتفاع آن را در اوج حساب کنید.

۵۷.۱۳. در رصدی مشاهده می‌شود که یک ستاره دنباله‌دار به جرم m در فاصله $۱۰^{۱۱} \text{ m}$ از خورشید با سرعتی برابر $۱۰^۴ \text{ m s}^{-۱} \times ۱۶$ که با بردار شعاع از خورشید زاویه ۴۵° می‌سازد به سمت خورشید در حرکت است. برای این ستاره دنباله‌دار، (الف) انرژی کل و اندازه حرکت زاویه‌ای، (ب) معادله مدار، (ج) کمترین فاصله نزدیک شدن به خورشید را حساب کنید. توجه کنید که کدام یک از نتایج به جرم ستاره دنباله‌دار بستگی دارند؛ و کدام یک به جرم بستگی ندارند. با به کار بردن یک کاغذ رسم قطبی، مسیر ستاره را رسم کنید.



شکل ۳۵.۱۳

۵۸.۱۳. یک موشک پرتابی به جرم m (شکل ۳۵.۱۳) از نقطه A با سرعت اولیه v_0 که با راستای قائم یا شعاعی، زاویه ϕ می‌سازد شلیک می‌شود. (الف) اندازه حرکت زاویه‌ای، و (ب) انرژی کل آن را پیدا کنید. (ج) ثابت کنید که خروج از مرکز مدار آن با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\epsilon^2 = 1 + (R^2 v_0^2 \sin^2 \varphi / \gamma^2 M^2) (v_0^2 - 2\gamma M/R).$$

[داهنمایی: برای یافتن پاسخ (ج) از آخرین نتیجه مثال ۵۰.۱۳ استفاده کنید.]

۵۹.۱۳. با مراجعه به مسئله پیش، ثابت کنید که معادله مسیر موشک عبارت است از

$$r = R^2 v_0^2 \sin^2 \varphi_0 / \gamma M (1 + \epsilon \cos \theta).$$

[داهنمایی: از مثال ۵۰.۱۳ به خاطر بیاورید که $L^2 = \gamma m^2 m' \epsilon d$ است.]

۶۰.۱۳. با مراجعه به مسئله‌های ۵۸.۱۳ و ۵۹.۱۳، فرض کنید که $v_0 = \sqrt{\gamma M/R}$ و $\varphi = 30^\circ$ است. (الف) خروج از مرکز مدار موشک را پیدا کنید. (ب) معادله مدار آن را بنویسید. (ج) ثابت کنید که موشک در نقطه‌ای روی زمین می‌افتد که فاصله آن تا A در سطح زمین برابر $\pi R/3$ است. با استفاده از یک کاغذ رسم قطبی، مسیر موشک را رسم کنید.

[داهنمایی: بعد از محاسبه ϵ ، مقادیر θ را که به ازای آنها $r = R$ می‌شود تعیین کنید. یکی از این مقادیر مربوط به محل پرتاب و دیگری مربوط به نقطه برگشت است. اختلاف این دو زاویه، جابجایی زاویه‌ای بین دو نقطه را به دست می‌دهد.]

۶۱.۱۳. با مراجعه به مسئله ۶۰.۱۳ ثابت کنید که ارتفاع بیشینه موشک از سطح زمین حدود $R/92$ است. (توصیه می‌کنیم دانشجویان نتایج مسئله‌های ۶۰.۱۳ و ۶۱.۱۳ را با نتیجه‌هایی که با به کار بردن روشهای بخش ۷.۵ به دست آمده‌اند، مقایسه کنند.)

۶۲.۱۳. با مراجعه به مسئله ۵۸.۱۳، نشان دهید که هرگاه سرعت پرتاب موشک برابر سرعت فرار باشد، مسیر آن یک سهمی می‌شود و به موجب مسئله ۵۹.۱۳، بستگی به راستای داده شده به موشک ندارد، و مسیر باز است و موشک هرگز به زمین بر نمی‌گردد.

۶۳.۱۳. یک موشک پرتابی با سرعتی برابر سرعت فرار پرتاب شده است، به گونه‌ای که مسیر آن یک سهمی است. معادله مسیر را هنگامی که $\varphi = 45^\circ$ و $\varphi = 90^\circ$ باشد، پیدا کنید. با به کار بردن یک کاغذ رسم قطبی، برای هر حالت شکل مسیر را رسم کنید.

۶۴.۱۳. سرعت یک ستاره دنباله‌دار خیلی دور از خورشید، $\sqrt{2gR}$ و پارامتر برخورد آن $\sqrt{2}R$ است (به مثال ۱۶.۷ مراجعه کنید)، که R شعاع خورشید است. ستاره دنباله‌دار تا چه فاصله‌ای به خورشید نزدیک می‌شود؟

۶۵.۱۳. ذره‌ای بر اثر یک نیروی جاذبه به بزرگی k/r^2 حرکت می‌کند. سرعت آن در یکی از نقاط انتهایی برابر $\sqrt{k/2mr}$ است که r فاصله ذره از مرکز نیرو است. فاصله r_p مربوط به وضع انتهایی دیگر، نصف قطر بزرگ و خروج از مرکز آن را حساب کنید.

۶۶.۱۳. ذره‌ای بر اثر یک نیروی دافعه مرکزی، به صورت $F = k/r^2$ ، حرکت می‌کند. این ذره از نقطه‌ای خیلی دور از مرکز نیرو و با سرعت v و فراسنج برخورد b (به مثال ۱۶.۷ مراجعه کنید) پرتاب شده است. تعیین کنید (الف) معادله مسیر را، (ب) کمترین فاصله

نزدیک شدن آن را به مرکز نیرو، (ج) زاویه ای را که راستای اولیه آن با راستای دور شدن می سازد. پاسخها را با نتایج به دست آمده در مثال ۱۶.۷ مقایسه کنید.

[دانه‌مایی: توجه داشته باشید که با قراردادن $\gamma mm'$ — به جای k ، می توان معادله های این فصل را به کار برد.]

۶۷.۱۳. شدت میدان گرانشی و پتانسیل ناشی از زمین را در سطح آن حساب کنید.

۶۸.۱۳. مقدار میدان گرانشی زمین و شتاب مرکز گرا را برای جسمی واقع در فاصله (الف) $R/2$ ، (ب) $R/2$ از مرکز زمین برآورد کنید. زمین را همگن فرض کنید.

۶۹.۱۳. بزرگی میدان گرانشی و پتانسیل حاصل از خورشید را در طول مدار زمین حساب کنید. این مقادیر را با میدان گرانشی و پتانسیل حاصل از ماه روی زمین مقایسه کنید.

۷۰.۱۳. دو جسم به جرمهای m و $3m$ به فاصله a از یکدیگر قرار دارند. نقاطی را پیدا که در آن نقاط، (الف) میدان گرانشی برآیند برابر صفر است؛ (ب) دو جرم میدانهای برابر و در یک سو ایجاد می کنند؛ (ج) دوجرم پتانسیل گرانشی یکسان ایجاد می کنند.

۷۱.۱۳. دوجسم به جرمهای m و $3m$ را در فاصله $13a$ از یکدیگر قرار دارند. میدان گرانشی برآیند و پتانسیل را در نقطه P واقع در فاصله $5a$ از جرم اول پیدا کنید. می دانیم خطهایی که P را به دوجرم وصل می کنند برهم عمودند.

۷۲.۱۳. دوجسم به جرمهای m و $2m$ در دو رأس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرار دارند. میدان گرانشی و پتانسیل را (الف) در نقطه وسط این دو، (ب) در رأس سوم مثلث پیدا کنید.

۷۳.۱۳. سه جرم یکسان در رأسهای یک مثلث متساوی الاضلاع قرار داده شده اند. طرحی از سطوح هم پتانسیل (درواقع محلهای تقاطع آنها با صفحه مثلث) و خطهای نیروی میدان گرانشی رسم کنید. آیا نقطه ای وجود دارد که در آنجا میدان گرانشی برابر صفر باشد؟

۷۴.۱۳. میدان گرانشی و پتانسیل حاصل از یک حلقه به جرم m و شعاع R را روی نقاط محوری که بر حلقه عمود است و از مرکز آن می گذرد، پیدا کنید.

۷۵.۱۳. با مراجعه به مسئله پیش، ذره ای از نقطه ای به فاصله h از مرکز حلقه رها می شود. (الف) سرعت ذره هنگام گذر از مرکز چقدر می شود؟ (ب) در سمت دیگر تا چه فاصله ای خواهد رفت؟ (ج) آیا حرکت حاصل دوره ای است؟ در چه شرایطی حرکت ذره عملاً هماهنگ ساده خواهد بود؟ بسامد مربوط به حالت اخیر را تعیین کنید.

۷۶.۱۳. دو ورقه مادی نازک به فاصله a از یکدیگر قرار دارند. میدان گرانشی که در بین آنها و در هر طرف به وجود می آید حساب کنید.

۷۷.۱۳. نشان دهید که میدان گرانشی و پتانسیل حاصل از یک سیم نازک که جرم واحد طول آن برابر λ است بترتیب عبارتند از

$$G = -(\gamma\lambda/R)u_R$$

$$V = 2\gamma\lambda \ln R$$

که R فاصله نقطه از سیم است. [دانهمایی: ابتدا، با توجه به تقارن، راستای میدان و متغیرهایی که آن را مشخص می‌کنند پیدا کنید. سپس سیم را به قطعات کوچک، هریک به طول dx ، تقسیم کنید و مؤلفه میدان هریک از آنها را در راستای نهایی حساب کنید. هنگامی که با انتگرال‌گیری میدان گرانشی را به دست آوردید، می‌توانید با استفاده از معادله (۲۱.۱۳)، پتانسیل گرانشی را پیدا کنید.]

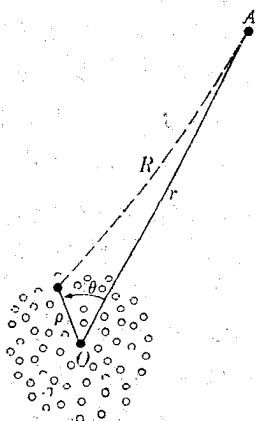
۷۸.۱۳. سرعت و انرژی کل ذره‌ای را که دور سیم مسئله ۷۷.۱۳ یک مدار دایره‌ای می‌پیماید و زیر تأثیر میدان گرانشی آن قرار دارد، تعیین کنید.

۷۹.۱۳. مثال ۸.۱۳ را برای حالتی که در آن یک ورقه مادی به ضخامت D جانشین لایه نازک شده باشد مجدداً مورد بررسی قرار دهید.

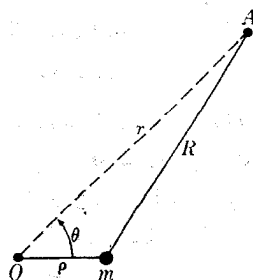
۸۰.۱۳. فرض کنید جرم m در فاصله ρ از یک نقطه مشخص O که به عنوان مرجع به کار می‌رود قرار دارد (شکل ۳۶.۱۳). نشان دهید که پتانسیل گرانشی در نقطه A ، به فاصله R از جرم m (بزرگتر از ρ است) را می‌توان برحسب فاصله $r = OA$ و زاویه θ به صورت رشته زیر نوشت:

$$V = -(\gamma m/r)[1 + \rho \cos \theta / r + \rho^2(3 \cos^2 \theta - 1)/2r^2 + \dots].$$

[دانهمایی: با توجه به قانون کسینوسها R را برحسب ρ ، r و θ بنویسید و $1/R$ را به یاری بسط دوجمله‌ای به دست آورید.]



شکل ۳۷.۱۳



شکل ۳۶.۱۳

۸۱.۱۳. مجموعه جرمهای $m_1, m_2, m_3, \dots$ (شکل ۳۷.۱۳) را در نظر بگیرید. نشان دهید که پتانسیل گرانشی را در نقطه A ، در فاصله‌ای که در مقایسه با ابعاد مجموعه بسیار زیاد

است، می توان به صورت زیر نوشت:

$$V = -\gamma[M/r + P/r^2 + Q/r^3 + \dots].$$

در این رابطه $M = \sum_i m_i$ جرم کل، $P = \sum_i \rho_i \cos \theta_i$ گشتاورد دو قطبی^۱ توزیع جرم نسبت به OA ، و $Q = \sum_i [\rho_i (3 \cos^2 \theta_i - 1)]/2$ گشتاورد چهار قطبی^۲ توزیع جرم، و غیره، نام دارند. [داهنمایی: از نتیجه های مسئله ۸۵.۱۳ برای هر جرم استفاده کنید و باهم جمع کنید.] اصطلاحات «دو قطبی» و «چهار قطبی» در فصل ۱۴ (جلد دوم) توضیح داده خواهند شد.

پیوست:

رابطه‌های ریاضی و جدولها

واژه‌نامه

فهرست راهنما

این پیوست، که برخی از فرمولهای ریاضی را که بیشتر در این کتاب به کار رفته‌اند در بر- می‌گیرد، به عنوان مرجعی که بتواند سریعاً در دسترس دانشجویان قرار گیرد فراهم شده است. در موارد نادری نیز برخی یادداشتهای ریاضی را در داخل متن کتاب گنجانیده‌ایم. بحث و اثبات اغلب این فرمولها در هر کتاب آنالیز ریاضی یافت می‌شود. از آن جمله‌اند کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، نوشته جرج، ب. توماس (چاپ و انتشار دانشگاه صنعتی شریف) و

Quick Calculus: A Short Manual of self Instruction, by D. Kelpner and N. Ramsey (John Wiley and Sons, New York, 1963)

که می‌توان مقدمه کوتاهی از مفاهیم پایه‌ای حساب دیفرانسیل و انتگرال را، به صورت برنامه ریزی شده، در آن یافت. دانشجو نیازمند به مراجعه به شماری از جدولهاست که به صورت کتابند. از میان آنها کتابهای زیر را می‌توان نام برد:

C.R.C. Standard Mathematical Tables (Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio, 1963); *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, by H. B. Dwight (Macmillan Company, New York, 1961).

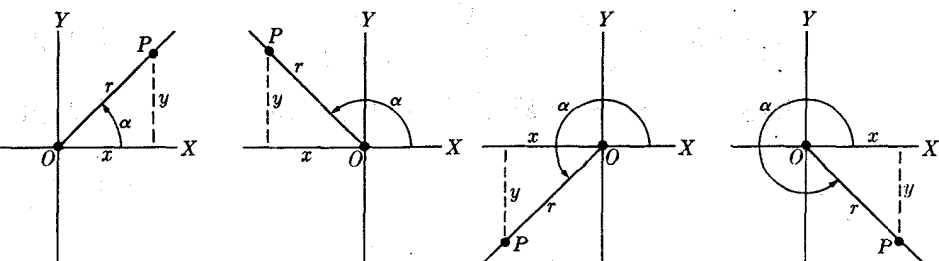
به دانشجو توصیه می‌کنیم که کتاب *Handbook of Chemistry and Physics* را که همه ساله از طرف Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio منتشر می‌شود در دم دست باشد. این کتاب مقادیر معتدایی از داده‌های ریاضی، شیمی و فیزیک را نیز دربردارد.

۱. رابطه‌های مثلثاتی

بر اساس نمادهای شکل پ. ۱ می‌توان رابطه‌های زیر را تعریف کرد:

$$\sin \alpha = y/r, \quad \cos \alpha = x/r, \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x \quad (۱.پ)$$

$$\operatorname{csc} \alpha = r/y, \quad \operatorname{sec} \alpha = r/x, \quad \operatorname{cotg} \alpha = x/y \quad (۲.پ)$$



شکل پ. ۱

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha \quad (۳.پ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sec^2 \alpha - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (۴.پ)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (۵.پ)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (۶.پ)$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta) \quad (۷.پ)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (۸.پ)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (۹.پ)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (۱۰.پ)$$

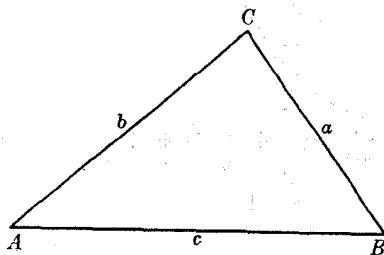
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (۱۱.پ)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (۱۲.پ)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (۱۳.پ)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha), \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha). \quad (۱۴.پ)$$

در هر مثلثی براساس نمادهای شکل پ. ۲، داریم



شکل پ. ۲

$$\text{پ. ۱۵: قانون سینوسها} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{پ. ۱۶: قانون کسینوسها} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

۲. لگاریتم

(الف) تعریف e :

$$\text{پ. ۱۷:} \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ۲.۷۱۸۲۸۱۸\dots$$

تابعهای نمایی $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ در شکل پ. ۳ رسم شده‌اند.

(ب) لگاریتم طبیعی، لگاریتم در پایه e (به شکل پ. ۴ مراجعه کنید):

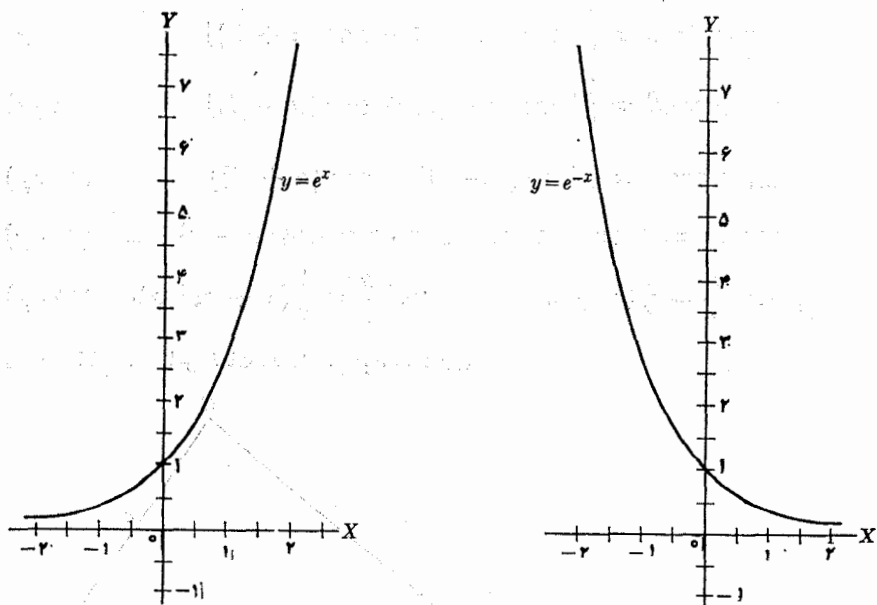
$$\text{پ. ۱۸:} \quad y = \ln x \quad \text{اگر} \quad x = e^y$$

لگاریتم اعشاری یا لگاریتم در پایه ده:

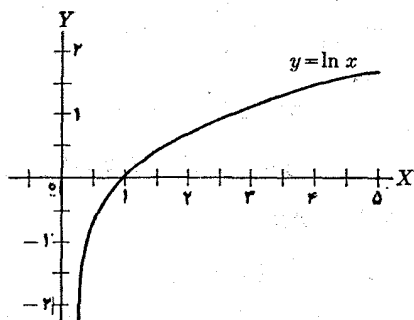
$$\text{پ. ۱۹:} \quad y = \log x \quad \text{اگر} \quad x = ۱۰^y$$

لگاریتم طبیعی و اعشاری با رابطه زیر به هم مربوطند:

$$\text{پ. ۲۰:} \quad \ln x = ۲.۳۰۳ \log x, \quad \log x = ۰.۴۳۴ \ln x$$



شکل پ. ۳



شکل پ. ۴

۳. بسط توان

(الف) بسط دوجمله‌ای:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}a^{n-p}b^p + \dots \quad (\text{پ. ۲۱})$$

اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد، بسط، دارای $(n-1)$ جمله است. در تمام موارد دیگر شمار جمله‌های بسط بینهایت است. حالتی که در آن $a=1$ و b یک کمیت x باشد بوفور در متن کتاب آمده است. بنا براین بسط $(1+x)^n$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (\text{پ. ۲۲})$$

(ب) چند بسط سری مفید دیگر:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (\text{پ. ۲۳})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (\text{پ. ۲۴})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots \quad (\text{پ. ۲۵})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots \quad (\text{پ.۲۶})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \dots \quad (\text{پ.۲۷})$$

برای $x \ll 1$ ، تقریبهای زیر می توانند قابل قبول باشند:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \quad (\text{پ.۲۸})$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1+x) \approx x \quad (\text{پ.۲۹})$$

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \quad \operatorname{tg} x \approx x. \quad (\text{پ.۳۰})$$

در نظر داشته باشید که در رابطه‌های (پ.۲۵)، (پ.۲۶)، (پ.۲۷) و (پ.۳۰)، x باید بر حسب رادیان باشد.

(ج) بسط به صورت سری تیلور:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_0 + \dots + \frac{1}{n!} (x - x_0)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_0 + \dots \quad (\text{پ.۳۱})$$

اگر $(x - x_0) \ll 1$ باشد تقریب زیر را می توان به کار برد:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0. \quad (\text{پ.۳۲})$$

۴. اعداد مختلط

با توجه به تعریف $i^2 = -1$ یا $i = \sqrt{-1}$ ، داریم

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{پ.۳۳})$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (\text{پ.۳۴})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (\text{پ.۳۵})$$

۵. توابع هذلولوی

برای تجسم رابطه‌های زیر به شکل پ.۵ مراجعه کنید:

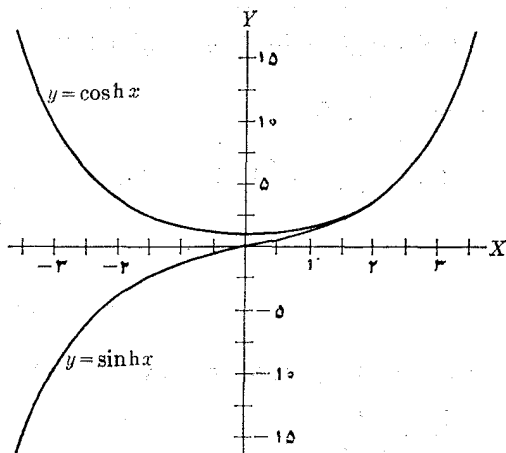
$$\cosh \theta = \frac{1}{2} (e^\theta + e^{-\theta}) \quad (\text{پ.۳۶})$$

$$\sinh \theta = \frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}) \quad (\text{پ. ۳۷})$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \quad (\text{پ. ۳۸})$$

$$\sinh \theta = -i \sin(i\theta), \quad \cosh \theta = \cos(i\theta) \quad (\text{پ. ۳۹})$$

$$\sin \theta = -i \sinh(i\theta), \quad \cos \theta = \cosh(i\theta) \quad (\text{پ. ۴۰})$$



شکل پ. ۵

۶. تابع اصلی، مشتق و انتگرال آن

$f(u)$	df/dx	$\int f(u) du$
u^n	$nu^{n-1} du/dx$	$u^{n+1}/(n+1) + C \quad (n \neq -1)$
u^{-1}	$-(1/u^2) du/dx$	$\ln u + C$
$\ln u$	$(1/u) du/dx$	$u \ln u - u + C$
e^u	$e^u du/dx$	$e^u + C$
$\sin u$	$\cos u du/dx$	$-\cos u + C$
$\cos u$	$-\sin u du/dx$	$\sin u + C$
$\operatorname{tg} u$	$\sec^2 u du/dx$	$-\ln \cos u + C$
$\operatorname{cotg} u$	$-\csc^2 u du/dx$	$\ln \sin u + C$

$f(u)$	df/dx	$\int f(u)du$
$\arcsin u$	$(du/dx)/\sqrt{1-u^2}$	$u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
$\sinh u$	$\cosh u \, du/dx$	$\cosh u + C$
$\cosh u$	$\sinh u \, du/dx$	$\sinh u + C$

یک قاعده سودمند برای انتگرال گیری، به نام انتگرال گیری جزء به جزء، عبارت است از

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du. \quad (\text{پ. ۴۱})$$

این روش، برای به دست آوردن مقدار انتگرال سمت چپ به کمک انتگرال سمت راست، بوفور به کار می رود.

۷. مقدار میانگین یک تابع

مقدار متوسط یا میانگین تابعی مانند $y = f(x)$ در بازه (a, b) مطابق رابطه زیر تعریف می شود:

$$y_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y \, dx. \quad (\text{پ. ۴۲})$$

همچنین مقدار میانگین y^2 چنین تعریف می شود:

$$(y^2)_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y^2 \, dx. \quad (\text{پ. ۴۳})$$

کمیت $\sqrt{(y^2)_{\text{ave}}}$ مقدار دیشه میانگین مربعی $y = f(x)$ در بازه (a, b) نام دارد و معمولاً با y_{ave} اختلاف دارد و آن را با y_{rms} نشان می دهند.

۸. روابط اساسی نسبیت

در رابطه های زیر، v سرعت چارچوب S' نسبت به چارچوب S و محورها های X' و X موازی با v در نظر گرفته شده اند. مقدار k برابر است با $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.
(الف) تبدیل لورنتس برای مکان و زمان:

$$\begin{aligned} x' &= k(x - vt) & x &= k(x' + vt') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ t' &= k(t - vx/c^2) & t &= k(t' + vx'/c^2) \end{aligned} \quad (\text{پ. ۴۵})$$

(ب) تبدیل لورنتس برای اندازه حرکت و انرژی:

$$\begin{aligned} p'_x &= k(p_x - vE/c^2) & p_x &= k(p'_x + vE'/c^2) \\ p'_y &= p_y & p_y &= p'_y \\ p'_z &= p_z & p_z &= p'_z \\ E' &= k(E - vp_x) & E &= k(E' + vp'_x) \end{aligned} \quad (\text{پ. ۴۵})$$

(ج) تبدیل لورنتس برای نیرو (ذره به طور لحظه‌ای نسبت به چارچوب S' ساکن فرض می‌شود):

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = kF_y, \quad F'_z = kF_z \quad (\text{پ. ۴۶})$$

(د) تعریف اندازه حرکت:

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2} = km_0 \mathbf{v}$$

(ه) رابطه بین انرژی و اندازه حرکت:

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

جدول نگاریم

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	۰۰۰۰	۰۰۰۰	۳۰۱۰	۴۷۷۱	۶۰۲۱	۶۹۹۰	۷۷۸۲	۸۴۵۱	۹۰۳۱	۹۵۴۲
۱	۰۰۰۰	۰۴۱۴	۰۷۹۲	۱۱۳۹	۱۴۶۱	۱۷۶۱	۲۰۴۱	۲۳۰۴	۲۵۵۳	۲۷۸۸
۲	۳۰۱۰	۳۴۱۴	۳۷۹۲	۴۱۳۹	۴۴۶۱	۴۷۶۱	۵۰۴۱	۵۳۰۴	۵۵۵۳	۵۷۸۸
۳	۴۷۷۱	۴۹۱۴	۵۰۵۱	۵۱۸۵	۵۳۱۵	۵۴۲۱	۵۵۶۳	۵۶۸۲	۵۷۹۸	۵۹۱۱
۴	۶۰۲۱	۶۱۲۸	۶۲۳۲	۶۳۳۵	۶۴۳۵	۶۵۳۲	۶۶۲۸	۶۷۲۱	۶۸۲۲	۶۹۰۲
۵	۶۹۹۰	۷۰۹۶	۷۱۶۰	۷۲۳۴	۷۳۲۴	۷۴۰۴	۷۴۸۲	۷۵۵۹	۷۶۳۴	۷۷۰۹
۶	۷۷۸۲	۷۸۵۲	۷۹۲۴	۷۹۹۳	۸۰۶۲	۸۱۲۹	۸۱۹۵	۸۲۶۱	۸۳۲۵	۸۳۸۸
۷	۸۴۵۱	۸۵۱۳	۸۵۷۳	۸۶۳۳	۸۶۹۲	۸۷۵۱	۸۸۰۸	۸۸۶۵	۸۹۲۱	۸۹۷۶
۸	۹۰۳۱	۹۰۸۵	۹۱۳۸	۹۱۹۱	۹۲۴۳	۹۲۹۴	۹۳۴۵	۹۳۹۵	۹۴۴۵	۹۴۹۴
۹	۹۵۴۲	۹۵۹۰	۹۶۳۸	۹۶۸۵	۹۷۳۱	۹۷۷۷	۹۸۲۳	۹۸۶۸	۹۹۱۲	۹۹۵۶
۱۰	۰۰۰۰	۰۰۴۳	۰۰۸۶	۰۱۲۸	۰۱۷۰	۰۲۱۲	۰۲۵۳	۰۲۹۴	۰۳۳۴	۰۳۷۴
۱۱	۰۴۱۴	۰۴۵۳	۰۴۹۲	۰۵۳۱	۰۵۶۹	۰۶۰۷	۰۶۴۵	۰۶۸۲	۰۷۱۹	۰۷۵۵
۱۲	۰۷۹۲	۰۸۳۸	۰۸۶۴	۰۸۹۹	۰۹۳۳	۰۹۶۹	۱۰۰۴	۱۰۳۸	۱۰۷۲	۱۱۰۶
۱۳	۱۱۳۹	۱۱۷۳	۱۲۰۶	۱۲۳۹	۱۲۷۱	۱۳۰۳	۱۳۳۵	۱۳۶۷	۱۳۹۹	۱۴۳۰
۱۴	۱۴۶۱	۱۴۹۲	۱۵۲۳	۱۵۵۳	۱۵۸۴	۱۶۱۴	۱۶۴۴	۱۶۷۳	۱۷۰۳	۱۷۳۲
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۶	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸	۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹
۱۷	۲۳۰۴	۲۳۳۰	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰	۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۹
۱۸	۲۵۵۳	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۵	۲۶۴۸	۲۶۷۱	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵
۱۹	۲۷۸۸	۲۸۱۰	۲۸۳۳	۲۸۵۶	۲۸۷۸	۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۹۱
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۳۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۳	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۵	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴
۲۲	۳۴۴۴	۳۴۶۴	۳۴۸۴	۳۵۰۴	۳۵۲۲	۳۵۴۲	۳۵۶۱	۳۵۸۰	۳۵۹۹	۳۶۱۸
۲۳	۳۶۱۷	۳۶۳۶	۳۶۵۵	۳۶۷۴	۳۶۹۲	۳۷۱۱	۳۷۲۹	۳۷۴۷	۳۷۶۶	۳۷۸۴
۲۴	۳۸۰۲	۳۸۲۰	۳۸۳۸	۳۸۵۶	۳۸۷۴	۳۸۹۲	۳۹۰۹	۳۹۲۷	۳۹۴۵	۳۹۶۲
۲۵	۳۹۹۴	۴۰۱۲	۴۰۳۱	۴۰۴۸	۴۰۶۵	۴۰۸۲	۴۰۹۹	۴۱۱۶	۴۱۳۳	۴۱۵۰
۲۶	۴۱۵۰	۴۱۶۶	۴۱۸۳	۴۲۰۰	۴۲۱۶	۴۲۳۲	۴۲۴۹	۴۲۶۵	۴۲۸۱	۴۲۹۸
۲۷	۴۳۱۴	۴۳۳۰	۴۳۴۶	۴۳۶۲	۴۳۷۸	۴۳۹۳	۴۴۰۹	۴۴۲۵	۴۴۴۰	۴۴۵۶
۲۸	۴۴۷۲	۴۴۸۹	۴۵۰۲	۴۵۱۸	۴۵۳۳	۴۵۴۸	۴۵۶۴	۴۵۷۹	۴۵۹۴	۴۶۰۹
۲۹	۴۶۴۴	۴۶۶۹	۴۶۸۴	۴۶۹۹	۴۷۱۴	۴۷۲۹	۴۷۴۴	۴۷۵۹	۴۷۷۴	۴۷۸۹
۳۰	۴۷۷۱	۴۷۸۶	۴۸۰۰	۴۸۱۴	۴۸۲۹	۴۸۴۳	۴۸۵۷	۴۸۷۱	۴۸۸۶	۴۹۰۰
۳۱	۴۹۱۴	۴۹۲۸	۴۹۴۲	۴۹۵۵	۴۹۶۹	۴۹۸۳	۴۹۹۷	۵۰۱۱	۵۰۲۴	۵۰۳۸
۳۲	۵۰۵۱	۵۰۶۵	۵۰۷۹	۵۰۹۲	۵۱۰۵	۵۱۱۹	۵۱۳۲	۵۱۴۵	۵۱۵۹	۵۱۷۲
۳۳	۵۱۸۵	۵۱۹۸	۵۲۱۱	۵۲۲۴	۵۲۳۷	۵۲۵۰	۵۲۶۳	۵۲۷۶	۵۲۸۹	۵۳۰۲
۳۴	۵۳۱۵	۵۳۲۸	۵۳۴۰	۵۳۵۳	۵۳۶۶	۵۳۷۸	۵۳۹۱	۵۴۰۳	۵۴۱۶	۵۴۲۸
۳۵	۵۴۴۱	۵۴۵۳	۵۴۶۵	۵۴۷۸	۵۴۹۰	۵۵۰۲	۵۵۱۴	۵۵۲۷	۵۵۳۹	۵۵۵۱
۳۶	۵۵۶۳	۵۵۷۵	۵۵۸۷	۵۵۹۹	۵۶۱۱	۵۶۲۳	۵۶۳۵	۵۶۴۷	۵۶۵۸	۵۶۷۰
۳۷	۵۶۸۲	۵۶۹۴	۵۷۰۵	۵۷۱۷	۵۷۲۹	۵۷۴۰	۵۷۵۲	۵۷۶۳	۵۷۷۵	۵۷۸۶
۳۸	۵۷۹۸	۵۸۰۹	۵۸۲۱	۵۸۳۲	۵۸۴۳	۵۸۵۵	۵۸۶۶	۵۸۷۷	۵۸۸۸	۵۸۹۹
۳۹	۵۹۱۱	۵۹۲۲	۵۹۳۳	۵۹۴۴	۵۹۵۵	۵۹۶۶	۵۹۷۷	۵۹۸۸	۵۹۹۹	۶۰۱۰
۴۰	۶۰۲۱	۶۰۳۱	۶۰۴۲	۶۰۵۳	۶۰۶۴	۶۰۷۵	۶۰۸۵	۶۰۹۶	۶۱۰۷	۶۱۱۷
۴۱	۶۱۲۸	۶۱۳۸	۶۱۴۰	۶۱۵۰	۶۱۶۰	۶۱۸۰	۶۱۹۱	۶۲۰۱	۶۲۱۲	۶۲۲۲
۴۲	۶۲۳۲	۶۲۴۳	۶۲۵۳	۶۲۶۳	۶۲۷۴	۶۲۸۴	۶۲۹۴	۶۳۰۴	۶۳۱۴	۶۳۲۵
۴۳	۶۳۳۵	۶۳۴۵	۶۳۵۵	۶۳۶۵	۶۳۷۵	۶۳۸۵	۶۳۹۵	۶۴۰۵	۶۴۱۵	۶۴۲۵
۴۴	۶۴۳۵	۶۴۴۲	۶۴۵۲	۶۴۶۴	۶۴۷۴	۶۴۸۴	۶۴۹۴	۶۵۰۴	۶۵۱۴	۶۵۲۲
۴۵	۶۵۳۲	۶۵۴۲	۶۵۵۱	۶۵۶۱	۶۵۷۱	۶۵۸۰	۶۵۹۰	۶۵۹۹	۶۶۰۹	۶۶۱۸
۴۶	۶۶۲۸	۶۶۳۷	۶۶۴۶	۶۶۵۶	۶۶۶۵	۶۶۷۵	۶۶۸۴	۶۶۹۳	۶۷۰۲	۶۷۱۲
۴۷	۶۷۲۱	۶۷۳۰	۶۷۳۹	۶۷۴۹	۶۷۵۸	۶۷۶۷	۶۷۷۶	۶۷۸۵	۶۷۹۴	۶۸۰۳
۴۸	۶۸۱۲	۶۸۲۱	۶۸۳۰	۶۸۳۹	۶۸۴۸	۶۸۵۷	۶۸۶۶	۶۸۷۵	۶۸۸۴	۶۸۹۳
۴۹	۶۹۰۲	۶۹۱۱	۶۹۲۰	۶۹۲۸	۶۹۳۷	۶۹۴۶	۶۹۵۵	۶۹۶۴	۶۹۷۲	۶۹۸۱
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

جدول نگاریم

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
۵۱	۷۰۷۶	۷۰۸۴	۷۰۹۳	۷۱۰۱	۷۱۱۰	۷۱۱۸	۷۱۲۶	۷۱۳۵	۷۱۴۳	۷۱۵۲
۵۲	۷۱۶۰	۷۱۶۸	۷۱۷۷	۷۱۸۵	۷۱۹۳	۷۲۰۲	۷۲۱۰	۷۲۱۸	۷۲۲۶	۷۲۳۵
۵۳	۷۲۴۳	۷۲۵۱	۷۲۵۹	۷۲۶۷	۷۲۷۵	۷۲۸۴	۷۲۹۲	۷۳۰۰	۷۳۰۸	۷۳۱۶
۵۴	۷۳۲۴	۷۳۳۲	۷۳۴۰	۷۳۴۸	۷۳۵۶	۷۳۶۴	۷۳۷۲	۷۳۸۰	۷۳۸۸	۷۳۹۶
۵۵	۷۴۰۴	۷۴۱۲	۷۴۱۹	۷۴۲۷	۷۴۳۵	۷۴۴۳	۷۴۵۱	۷۴۵۹	۷۴۶۶	۷۴۷۴
۵۶	۷۴۸۲	۷۴۹۰	۷۴۹۷	۷۵۰۵	۷۵۱۳	۷۵۲۰	۷۵۲۸	۷۵۳۶	۷۵۴۳	۷۵۵۱
۵۷	۷۵۵۹	۷۵۶۶	۷۵۷۴	۷۵۸۲	۷۵۸۹	۷۵۹۷	۷۶۰۴	۷۶۱۲	۷۶۱۹	۷۶۲۷
۵۸	۷۶۳۴	۷۶۴۲	۷۶۴۹	۷۶۵۷	۷۶۶۴	۷۶۷۲	۷۶۷۹	۷۶۸۶	۷۶۹۴	۷۷۰۱
۵۹	۷۷۰۹	۷۷۱۶	۷۷۲۳	۷۷۳۱	۷۷۳۸	۷۷۴۵	۷۷۵۲	۷۷۶۰	۷۷۶۷	۷۷۷۴
۶۰	۷۷۸۲	۷۷۸۹	۷۷۹۶	۷۸۰۳	۷۸۱۰	۷۸۱۸	۷۸۲۵	۷۸۳۲	۷۸۳۹	۷۸۴۶
۶۱	۷۸۵۳	۷۸۶۰	۷۸۶۸	۷۸۷۵	۷۸۸۲	۷۸۸۹	۷۸۹۶	۷۹۰۳	۷۹۱۰	۷۹۱۷
۶۲	۷۹۲۴	۷۹۳۱	۷۹۳۸	۷۹۴۵	۷۹۵۲	۷۹۵۹	۷۹۶۶	۷۹۷۳	۷۹۸۰	۷۹۸۷
۶۳	۷۹۹۳	۸۰۰۰	۸۰۰۷	۸۰۱۴	۸۰۲۱	۸۰۲۸	۸۰۳۵	۸۰۴۱	۸۰۴۸	۸۰۵۵
۶۴	۸۰۶۲	۸۰۶۹	۸۰۷۵	۸۰۸۲	۸۰۸۹	۸۰۹۶	۸۱۰۲	۸۱۰۹	۸۱۱۶	۸۱۲۳
۶۵	۸۱۲۹	۸۱۳۶	۸۱۴۲	۸۱۴۹	۸۱۵۶	۸۱۶۲	۸۱۶۹	۸۱۷۶	۸۱۸۲	۸۱۸۹
۶۶	۸۱۹۵	۸۲۰۲	۸۲۰۹	۸۲۱۵	۸۲۲۲	۸۲۲۸	۸۲۳۵	۸۲۴۱	۸۲۴۸	۸۲۵۴
۶۷	۸۲۶۱	۸۲۶۷	۸۲۷۴	۸۲۸۰	۸۲۸۷	۸۲۹۳	۸۲۹۹	۸۳۰۶	۸۳۱۲	۸۳۱۹
۶۸	۸۳۲۵	۸۳۳۱	۸۳۳۸	۸۳۴۴	۸۳۵۱	۸۳۵۷	۸۳۶۳	۸۳۶۹	۸۳۷۶	۸۳۸۲
۶۹	۸۳۸۸	۸۳۹۵	۸۴۰۱	۸۴۰۸	۸۴۱۴	۸۴۲۰	۸۴۲۶	۸۴۳۲	۸۴۳۹	۸۴۴۵
۷۰	۸۴۵۱	۸۴۵۷	۸۴۶۳	۸۴۶۹	۸۴۷۶	۸۴۸۲	۸۴۸۸	۸۴۹۴	۸۵۰۰	۸۵۰۶
۷۱	۸۵۱۳	۸۵۱۹	۸۵۲۵	۸۵۳۱	۸۵۳۷	۸۵۴۳	۸۵۴۹	۸۵۵۵	۸۵۶۱	۸۵۶۷
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۲۱	۸۶۲۷
۷۳	۸۶۳۳	۸۶۳۹	۸۶۴۵	۸۶۵۱	۸۶۵۷	۸۶۶۳	۸۶۶۹	۸۶۷۵	۸۶۸۱	۸۶۸۶
۷۴	۸۶۹۲	۸۶۹۸	۸۷۰۴	۸۷۱۰	۸۷۱۶	۸۷۲۲	۸۷۲۷	۸۷۳۳	۸۷۳۹	۸۷۴۵
۷۵	۸۷۵۱	۸۷۵۶	۸۷۶۸	۸۷۷۴	۸۷۷۹	۸۷۸۵	۸۷۹۱	۸۷۹۷	۸۸۰۳	۸۸۰۹
۷۶	۸۸۰۸	۸۸۱۴	۸۸۲۰	۸۸۲۵	۸۸۳۱	۸۸۳۷	۸۸۴۲	۸۸۴۸	۸۸۵۴	۸۸۵۹
۷۷	۸۸۶۵	۸۸۷۱	۸۸۷۶	۸۸۸۲	۸۸۸۷	۸۸۹۳	۸۸۹۹	۸۹۰۴	۸۹۱۰	۸۹۱۵
۷۸	۸۹۲۱	۸۹۲۷	۸۹۳۲	۸۹۳۸	۸۹۴۳	۸۹۴۹	۸۹۵۴	۸۹۶۰	۸۹۶۵	۸۹۷۱
۷۹	۸۹۷۶	۸۹۸۲	۸۹۸۷	۸۹۹۳	۸۹۹۹	۹۰۰۴	۹۰۰۹	۹۰۱۵	۹۰۲۰	۹۰۲۵
۸۰	۹۰۳۱	۹۰۳۶	۹۰۴۲	۹۰۴۷	۹۰۵۳	۹۰۵۸	۹۰۶۳	۹۰۶۹	۹۰۷۴	۹۰۷۹
۸۱	۹۰۸۵	۹۰۹۰	۹۰۹۶	۹۱۰۱	۹۱۰۶	۹۱۱۲	۹۱۱۷	۹۱۲۲	۹۱۲۸	۹۱۳۳
۸۲	۹۱۳۸	۹۱۴۳	۹۱۴۹	۹۱۵۴	۹۱۵۹	۹۱۶۵	۹۱۷۰	۹۱۷۵	۹۱۸۰	۹۱۸۶
۸۳	۹۱۹۱	۹۱۹۶	۹۲۰۱	۹۲۰۶	۹۲۱۲	۹۲۱۷	۹۲۲۲	۹۲۲۷	۹۲۳۲	۹۲۳۸
۸۴	۹۲۴۳	۹۲۴۸	۹۲۵۳	۹۲۵۸	۹۲۶۳	۹۲۶۹	۹۲۷۴	۹۲۷۹	۹۲۸۴	۹۲۸۹
۸۵	۹۲۹۴	۹۲۹۹	۹۳۰۴	۹۳۰۹	۹۳۱۵	۹۳۲۰	۹۳۲۵	۹۳۳۰	۹۳۳۵	۹۳۴۰
۸۶	۹۳۴۵	۹۳۵۰	۹۳۵۵	۹۳۶۰	۹۳۶۵	۹۳۷۰	۹۳۷۵	۹۳۸۰	۹۳۸۵	۹۳۹۰
۸۷	۹۳۹۵	۹۴۰۰	۹۴۰۵	۹۴۱۰	۹۴۱۵	۹۴۲۰	۹۴۲۵	۹۴۳۰	۹۴۳۵	۹۴۴۰
۸۸	۹۴۴۵	۹۴۵۰	۹۴۵۵	۹۴۶۰	۹۴۶۵	۹۴۶۹	۹۴۷۴	۹۴۷۹	۹۴۸۴	۹۴۸۹
۸۹	۹۴۹۴	۹۴۹۹	۹۵۰۴	۹۵۰۹	۹۵۱۳	۹۵۱۸	۹۵۲۳	۹۵۲۸	۹۵۳۳	۹۵۳۸
۹۰	۹۵۴۲	۹۵۴۷	۹۵۵۲	۹۵۵۷	۹۵۶۲	۹۵۶۶	۹۵۷۱	۹۵۷۶	۹۵۸۱	۹۵۸۶
۹۱	۹۵۹۰	۹۵۹۵	۹۶۰۰	۹۶۰۵	۹۶۰۹	۹۶۱۴	۹۶۱۹	۹۶۲۴	۹۶۲۸	۹۶۳۳
۹۲	۹۶۳۸	۹۶۴۳	۹۶۴۷	۹۶۵۲	۹۶۵۷	۹۶۶۱	۹۶۶۶	۹۶۷۱	۹۶۷۵	۹۶۸۰
۹۳	۹۶۸۵	۹۶۸۹	۹۶۹۴	۹۶۹۹	۹۷۰۳	۹۷۰۸	۹۷۱۳	۹۷۱۷	۹۷۲۲	۹۷۲۷
۹۴	۹۷۳۱	۹۷۳۶	۹۷۴۱	۹۷۴۵	۹۷۵۰	۹۷۵۴	۹۷۵۹	۹۷۶۳	۹۷۶۸	۹۷۷۳
۹۵	۹۷۷۷	۹۷۸۲	۹۷۸۶	۹۷۹۱	۹۷۹۵	۹۸۰۰	۹۸۰۵	۹۸۰۹	۹۸۱۴	۹۸۱۸
۹۶	۹۸۲۳	۹۸۲۷	۹۸۳۲	۹۸۳۶	۹۸۴۱	۹۸۴۵	۹۸۵۰	۹۸۵۴	۹۸۵۹	۹۸۶۳
۹۷	۹۸۶۸	۹۸۷۲	۹۸۷۷	۹۸۸۱	۹۸۸۶	۹۸۹۰	۹۸۹۴	۹۸۹۹	۹۹۰۳	۹۹۰۸
۹۸	۹۹۱۲	۹۹۱۷	۹۹۲۱	۹۹۲۵	۹۹۳۰	۹۹۳۴	۹۹۳۹	۹۹۴۳	۹۹۴۸	۹۹۵۲
۹۹	۹۹۵۶	۹۹۶۱	۹۹۶۵	۹۹۶۹	۹۹۷۴	۹۹۷۸	۹۹۸۳	۹۹۸۷	۹۹۹۱	۹۹۹۶
۱۰۰	۰۰۰۰	۰۰۰۴	۰۰۰۹	۰۰۱۳	۰۰۱۷	۰۰۲۲	۰۰۲۶	۰۰۳۰	۰۰۳۵	۰۰۳۹
N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

جدول توابع مثلثاتی

tg	cos	sin	زاویه		tg	cos	sin	زاویه	
			رادیان	درجه				رادیان	درجه
۱٫۰۳۶	۰٫۶۹۵	۰٫۷۱۹	۰٫۸۰۳	۴۶۰	۰٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۰	۰۰
۱٫۰۷۷	۰٫۶۸۲	۰٫۷۳۱	۰٫۸۲۰	۴۷۰	۰٫۰۱۷	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۷	۰٫۰۱۷	۱۰
۱٫۱۱۱	۰٫۶۶۹	۰٫۷۴۳	۰٫۸۳۸	۴۸۰	۰٫۰۳۵	۰٫۹۹۹	۰٫۰۳۵	۰٫۰۳۵	۲۰
۱٫۱۵۰	۰٫۶۵۶	۰٫۷۵۵	۰٫۸۵۵	۴۹۰	۰٫۰۵۲	۰٫۹۹۹	۰٫۰۵۲	۰٫۰۵۲	۳۰
۱٫۱۹۲	۰٫۶۴۳	۰٫۷۶۶	۰٫۸۷۳	۵۰۰	۰٫۰۷۰	۰٫۹۹۸	۰٫۰۷۰	۰٫۰۷۰	۴۰
۱٫۲۳۵	۰٫۶۲۹	۰٫۷۷۷	۰٫۸۹۰	۵۱۰	۰٫۰۸۷	۰٫۹۹۶	۰٫۰۸۷	۰٫۰۸۷	۵۰
۱٫۲۸۰	۰٫۶۱۶	۰٫۷۸۸	۰٫۹۰۸	۵۲۰	۰٫۱۰۵	۰٫۹۹۵	۰٫۱۰۵	۰٫۱۰۵	۶۰
۱٫۳۲۷	۰٫۶۰۲	۰٫۷۹۹	۰٫۹۲۵	۵۳۰	۰٫۱۲۳	۰٫۹۹۳	۰٫۱۲۲	۰٫۱۲۲	۷۰
۱٫۳۷۶	۰٫۵۸۸	۰٫۸۰۹	۰٫۹۴۲	۵۴۰	۰٫۱۴۱	۰٫۹۹۰	۰٫۱۳۹	۰٫۱۴۰	۸۰
۱٫۴۲۸	۰٫۵۷۴	۰٫۸۱۹	۰٫۹۶۰	۵۵۰	۰٫۱۵۸	۰٫۹۸۸	۰٫۱۵۶	۰٫۱۵۷	۹۰
۱٫۴۸۳	۰٫۵۵۹	۰٫۸۲۹	۰٫۹۷۷	۵۶۰	۰٫۱۷۶	۰٫۹۸۵	۰٫۱۷۴	۰٫۱۷۵	۱۰۰
۱٫۵۴۰	۰٫۵۴۵	۰٫۸۳۹	۰٫۹۹۵	۵۷۰	۰٫۱۹۴	۰٫۹۸۲	۰٫۱۹۱	۰٫۱۹۲	۱۱۰
۱٫۶۰۰	۰٫۵۳۰	۰٫۸۴۸	۱٫۰۱۲	۵۸۰	۰٫۲۱۳	۰٫۹۷۸	۰٫۲۰۸	۰٫۲۰۹	۱۲۰
۱٫۶۶۴	۰٫۵۱۵	۰٫۸۵۷	۱٫۰۳۰	۵۹۰	۰٫۲۳۱	۰٫۹۷۴	۰٫۲۲۵	۰٫۲۲۷	۱۳۰
۱٫۷۳۲	۰٫۵۰۰	۰٫۸۶۶	۱٫۰۴۷	۶۰۰	۰٫۲۴۹	۰٫۹۷۰	۰٫۲۴۲	۰٫۲۴۴	۱۴۰
۱٫۸۰۴	۰٫۴۸۵	۰٫۸۷۵	۱٫۰۶۵	۶۱۰	۰٫۲۶۸	۰٫۹۶۶	۰٫۲۵۹	۰٫۲۶۲	۱۵۰
۱٫۸۸۱	۰٫۴۶۹	۰٫۸۸۳	۱٫۰۸۲	۶۲۰	۰٫۲۸۷	۰٫۹۶۱	۰٫۲۷۶	۰٫۲۷۹	۱۶۰
۱٫۹۶۳	۰٫۴۵۴	۰٫۸۹۱	۱٫۱۰۰	۶۳۰	۰٫۳۰۶	۰٫۹۵۶	۰٫۲۹۲	۰٫۲۹۷	۱۷۰
۲٫۰۵۰	۰٫۴۳۸	۰٫۸۹۹	۱٫۱۱۷	۶۴۰	۰٫۳۲۵	۰٫۹۵۱	۰٫۳۰۹	۰٫۳۱۴	۱۸۰
۲٫۱۴۵	۰٫۴۲۳	۰٫۹۰۶	۱٫۱۳۴	۶۵۰	۰٫۳۴۴	۰٫۹۴۶	۰٫۳۲۶	۰٫۳۳۲	۱۹۰
۲٫۲۴۶	۰٫۴۰۷	۰٫۹۱۴	۱٫۱۵۲	۶۶۰	۰٫۳۶۴	۰٫۹۴۰	۰٫۳۴۲	۰٫۳۴۹	۲۰۰
۲٫۳۵۶	۰٫۳۹۱	۰٫۹۲۱	۱٫۱۶۹	۶۷۰	۰٫۳۸۴	۰٫۹۳۴	۰٫۳۵۸	۰٫۳۶۷	۲۱۰
۲٫۴۷۵	۰٫۳۷۵	۰٫۹۲۷	۱٫۱۸۷	۶۸۰	۰٫۴۰۴	۰٫۹۲۷	۰٫۳۷۵	۰٫۳۸۴	۲۲۰
۲٫۶۰۵	۰٫۳۵۸	۰٫۹۳۴	۱٫۲۰۴	۶۹۰	۰٫۴۲۴	۰٫۹۲۱	۰٫۳۹۱	۰٫۴۰۱	۲۳۰
۲٫۷۴۸	۰٫۳۴۲	۰٫۹۴۰	۱٫۲۲۲	۷۰۰	۰٫۴۴۵	۰٫۹۱۴	۰٫۴۰۷	۰٫۴۱۹	۲۴۰
۲٫۹۰۴	۰٫۳۲۶	۰٫۹۴۶	۱٫۲۳۹	۷۱۰	۰٫۴۶۶	۰٫۹۰۶	۰٫۴۲۳	۰٫۴۳۶	۲۵۰
۳٫۰۷۸	۰٫۳۰۹	۰٫۹۵۱	۱٫۲۵۷	۷۲۰	۰٫۴۸۸	۰٫۸۹۹	۰٫۴۳۸	۰٫۴۵۴	۲۶۰
۳٫۲۲۱	۰٫۲۹۲	۰٫۹۵۶	۱٫۲۷۴	۷۳۰	۰٫۵۱۰	۰٫۸۹۱	۰٫۴۵۴	۰٫۴۷۱	۲۷۰
۳٫۴۸۷	۰٫۲۷۶	۰٫۹۶۱	۱٫۲۹۲	۷۴۰	۰٫۵۳۲	۰٫۸۸۳	۰٫۴۶۹	۰٫۴۸۹	۲۸۰
۳٫۷۳۲	۰٫۲۵۹	۰٫۹۶۶	۱٫۳۰۹	۷۵۰	۰٫۵۵۴	۰٫۸۷۵	۰٫۴۸۵	۰٫۵۰۶	۲۹۰
۴٫۰۱۱	۰٫۲۴۲	۰٫۹۷۰	۱٫۳۲۶	۷۶۰	۰٫۵۷۷	۰٫۸۶۶	۰٫۵۰۰	۰٫۵۲۴	۳۰۰
۴٫۳۳۲	۰٫۲۲۵	۰٫۹۷۴	۱٫۳۴۴	۷۷۰	۰٫۶۰۱	۰٫۸۵۷	۰٫۵۱۵	۰٫۵۴۱	۳۱۰
۴٫۷۰۵	۰٫۲۰۸	۰٫۹۷۸	۱٫۳۶۱	۷۸۰	۰٫۶۲۵	۰٫۸۴۸	۰٫۵۳۰	۰٫۵۵۹	۳۲۰
۵٫۱۴۵	۰٫۱۹۱	۰٫۹۸۲	۱٫۳۷۹	۷۹۰	۰٫۶۴۹	۰٫۸۳۹	۰٫۵۴۵	۰٫۵۷۶	۳۳۰
۵٫۶۷۱	۰٫۱۷۴	۰٫۹۸۵	۱٫۳۹۶	۸۰۰	۰٫۶۷۰	۰٫۸۱۹	۰٫۵۵۹	۰٫۶۱۱	۳۴۰
۶٫۳۱۴	۰٫۱۵۶	۰٫۹۸۸	۱٫۴۱۴	۸۱۰	۰٫۶۹۰	۰٫۸۰۹	۰٫۵۷۴	۰٫۶۲۸	۳۵۰
۷٫۱۱۵	۰٫۱۳۹	۰٫۹۹۰	۱٫۴۳۱	۸۲۰	۰٫۷۲۷	۰٫۸۰۰	۰٫۵۸۸	۰٫۶۶۲	۳۶۰
۸٫۱۴۴	۰٫۱۲۲	۰٫۹۹۳	۱٫۴۴۹	۸۳۰	۰٫۷۵۴	۰٫۷۹۹	۰٫۶۰۲	۰٫۶۶۴	۳۷۰
۹٫۵۱۴	۰٫۱۰۵	۰٫۹۹۵	۱٫۴۶۸	۸۴۰	۰٫۷۸۱	۰٫۷۸۸	۰٫۶۱۶	۰٫۶۶۳	۳۸۰
۱۱٫۴۳۳	۰٫۰۸۷	۰٫۹۹۶	۱٫۴۸۴	۸۵۰	۰٫۸۱۰	۰٫۷۷۷	۰٫۶۸۹	۰٫۶۸۱	۳۹۰
۱۴٫۳۰۰	۰٫۰۷۰	۰٫۹۹۸	۱٫۵۰۱	۸۶۰	۰٫۸۳۹	۰٫۷۶۶	۰٫۶۹۴	۰٫۶۹۸	۴۰۰
۱۹٫۰۰۸	۰٫۰۵۲	۰٫۹۹۹	۱٫۵۱۸	۸۷۰	۰٫۸۶۹	۰٫۷۵۵	۰٫۶۵۶	۰٫۷۱۶	۴۱۰
۲۸٫۹۶۴	۰٫۰۳۵	۰٫۹۹۹	۱٫۵۳۶	۸۸۰	۰٫۹۰۰	۰٫۷۴۳	۰٫۶۶۹	۰٫۷۳۳	۴۲۰
۵۷٫۲۹۹	۰٫۰۱۷	۱٫۰۰۰	۱٫۵۵۳	۸۹۰	۰٫۹۳۳	۰٫۷۲۱	۰٫۶۸۲	۰٫۷۵۰	۴۳۰
۰٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۵۷۱	۹۰۰	۰٫۹۶۶	۰٫۷۱۹	۰٫۶۹۵	۰٫۷۶۸	۴۴۰
					۱٫۰۰۰	۰٫۷۰۷	۰٫۷۰۷	۰٫۷۸۵	۴۵۰

جدول توابع نمایی

e^{-x}	e^x	x	e^{-x}	e^x	x
۰٫۰۸۲۱	۱٫۲۱۸۲	۲٫۵	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۰٫۰۰
۰٫۰۷۴۳	۱٫۳۴۶۶	۲٫۶	۰٫۹۵۱۲	۱٫۰۵۱۳	۰٫۰۵
۰٫۰۶۷۲	۱٫۴۸۸۰	۲٫۷	۰٫۹۰۴۸	۱٫۱۰۵۲	۰٫۱۰
۰٫۰۶۰۸	۱٫۶۴۴۵	۲٫۸	۰٫۸۶۰۷	۱٫۱۶۱۸	۰٫۱۵
۰٫۰۵۵۰	۱٫۸۱۷۴	۲٫۹	۰٫۸۱۸۷	۱٫۲۲۱۴	۰٫۲۰
۰٫۰۴۹۸	۲٫۰۰۸۶	۳٫۰	۰٫۷۷۸۸	۱٫۲۸۴۵	۰٫۲۵
۰٫۰۴۵۰	۲٫۲۱۹۸	۳٫۱	۰٫۷۴۰۸	۱٫۳۴۹۹	۰٫۳۰
۰٫۰۴۰۸	۲٫۴۵۳۳	۳٫۲	۰٫۷۰۴۷	۱٫۴۱۹۱	۰٫۳۵
۰٫۰۳۶۹	۲٫۷۱۱۳	۳٫۳	۰٫۶۷۰۳	۱٫۴۹۱۸	۰٫۴۰
۰٫۰۳۳۴	۲٫۹۹۶۴	۳٫۴	۰٫۶۳۷۶	۱٫۵۶۸۳	۰٫۴۵
۰٫۰۳۰۲	۳۳۱۱۵	۳٫۵	۰٫۶۰۶۵	۱٫۶۴۴۷	۰٫۵۰
۰٫۰۲۷۳	۳۶۵۹۸	۳٫۶	۰٫۵۷۶۹	۱٫۷۳۳۳	۰٫۵۵
۰٫۰۲۴۷	۴۰۳۴۷	۳٫۷	۰٫۵۴۸۸	۱٫۸۲۲۱	۰٫۶۰
۰٫۰۲۲۴	۴۴۷۰۱	۳٫۸	۰٫۵۲۲۵	۱٫۹۱۵۵	۰٫۶۵
۰٫۰۲۰۲	۴۹۴۰۲	۳٫۹	۰٫۴۹۶۶	۲٫۰۱۳۸	۰٫۷۰
۰٫۰۱۸۳	۵۴۵۹۸	۴٫۰	۰٫۴۷۲۴	۲٫۱۱۷۰	۰٫۷۵
۰٫۰۱۶۶	۶۰۳۴۰	۴٫۱	۰٫۴۴۹۳	۲٫۲۲۵۵	۰٫۸۰
۰٫۰۱۵۰	۶۶۶۸۶	۴٫۲	۰٫۴۲۷۴	۲٫۳۳۹۶	۰٫۸۵
۰٫۰۱۳۶	۷۳۷۰۰	۴٫۳	۰٫۴۰۶۶	۲٫۴۵۹۶	۰٫۹۰
۰٫۰۱۲۳	۸۱۴۵۱	۴٫۴	۰٫۳۸۶۷	۲٫۵۸۵۷	۰٫۹۵
۰٫۰۱۱۱	۹۰۳۰۱۷	۴٫۵	۰٫۳۶۷۹	۲٫۷۱۸۳	۱٫۰
۰٫۰۱۰۱	۹۹۴۸۴	۴٫۶	۰٫۳۳۲۹	۳٫۰۰۴۲	۱٫۱
۰٫۰۰۹۱	۱۰۹۹۵	۴٫۷	۰٫۳۰۱۲	۳٫۳۲۰۱	۱٫۲
۰٫۰۰۸۲	۱۲۱۵۱	۴٫۸	۰٫۲۷۲۵	۳٫۶۶۹۳	۱٫۳
۰٫۰۰۷۴	۱۳۴۲۹	۴٫۹	۰٫۲۴۶۶	۴٫۰۵۵۲	۱٫۴
۰٫۰۰۶۷	۱۴۸۴۱	۵	۰٫۲۲۳۱	۴٫۴۸۱۷	۱٫۵
۰٫۰۰۵۲	۱۶۳۴۳	۶	۰٫۲۰۱۹	۴٫۹۵۳۰	۱٫۶
۰٫۰۰۰۹	۱۰۹۶٫۶	۷	۰٫۱۸۲۷	۵٫۴۷۳۹	۱٫۷
۰٫۰۰۰۳	۲۹۸۱٫۰	۸	۰٫۱۶۵۳	۶٫۰۴۹۶	۱٫۸
۰٫۰۰۰۱	۸۱۰۳٫۱	۹	۰٫۱۴۹۶	۶٫۶۸۵۹	۱٫۹
۰٫۰۰۰۰۵	۲۲۰۲۶	۱۰	۰٫۱۳۵۳	۷٫۳۸۹۱	۲٫۰
			۰٫۱۲۲۵	۸٫۱۶۶۲	۲٫۱
			۰٫۱۱۰۸	۹٫۰۲۵۰	۲٫۲
			۰٫۱۰۰۳	۹٫۹۲۴۲	۲٫۳
			۰٫۰۹۰۷	۱۱٫۰۲۳	۲٫۴

واژه نامه

انگلیسی به فارسی

absolute temperature	دمای مطلق
acceleration	شتاب
adhesion	دوشش
advance of the perihelion	پیشروی حضیض
alpha - particle	ذره آلفا
ampere	آمپر
amplitude	دامنه
Andromeda	امراة المسلسله
Angstrom	آنگستروم
angular acceleration	شتاب زاویه‌ای
angular frequency	بسامد زاویه‌ای
angular momentum	اندازه حرکت زاویه‌ای
angular velocity	سرعت زاویه‌ای
anharmonic oscillatory motion	حرکت نوسانی ناهماهنگ
anharmonic terms	جملات ناهماهنگی
antiproton	پاد پروتون
aphelion	اوج
apogee	اوج
Archimedes' principle	اصل ارشمیدوس
Aristarchus	اریستارخوس
Aristotle	ارسطو
astronomical unit	یکای نجومی
atmosphere	آتمسفر
atomic clock	ساعت اتمی

atomic mass unit	یکای اتمی جرم
Atwood's machine	ماشین آتوود
average	میانگین
Avogadro's number	عدد آووگادرو
axial force	نیروی محوری
axis	محور
ballistic missile	موشک پرتابی
ballistic pendulum	آونگ پرتابی
bandwidth	پهنای نوار
barometric equation	معادله توزیع جو
barrier	سد
beat	زنش
Bernoulli's theorem	قضیه برنولی
Boltzmann constant	ثابت بولتزمن
bond length	طول پیوند
bound orbit	مدار مقید
Boyle's law	قانون بویل
Brahe, Tycho	تیکو براهه
buoyancy	شناوری
calorie	کالری
capture reaction	واکنش گیراندازی
Cavendish torsion balance	ترازوی پیچشی کاوندیش
Celsius temperature	دمای سلسیوس
center of gravity	گرانیگاه
center of mass	مرکز جرم
center of percussion	مرکز ضربه
center of symmetry	مرکز تقارن
centigrade	سانتیگراد
central force	نیروی مرکزی
centrifugal acceleration	شتاب گریز از مرکز
centrifugal potential	پتانسیل گریز از مرکز
centripetal acceleration	شتاب مرکزگرا
centripetal force	نیروی مرکزگرا

C - frame of reference	چارچوب مرجع C
cgs system	دستگاه cgs
charge	بار الکتریکی
Charles' law	قانون شارل
chemical energy	انرژی شیمیایی
circular motion	حرکت دایره‌ای
circulation	گردش
coefficient of friction	ضریب مالش
cohesion	همدوشش
collision	برخورد
component	مؤلفه
compound pendulum	آونگ مرکب
conic section	مقطع مخروطی
conservation	بقا (پایستگی)
conservative force	نیروی پایستار
contravariant components	مؤلفه‌های پادوردا
Copernicus, Nicolaus	نیکلاس کپرنیک
Coriolis acceleration	شتاب کوریولی
Coulomb	کولن
couple	جفت
coupling energy	انرژی جفت شدگی
coupling term	جمله جفت شدگی
coupled oscillators	نوسانگرهای جفت شده
covariant components	مؤلفه‌های هموردا
critical damping	میرایی بحرانی
curvilinear motion	حرکت منحنی الخط
cycloid	چرخزاد (سیکلوئید)
cycloidal pendulum	آونگ چرخزادی
Dalitz diagram	نمودار دالیتز
damped oscillatory motion	حرکت نوسانی میرا
deferent	فلک حامل (دفرنٹ)
degree Kelvin	درجه کلوین
del	دل
density	چگالی

derivative	مشتق
determinant	دترمینان
deuteron	دوترون
deviation	انحراف
differential equation	معادله دیفرانسیل
dipole moment	گشتاور دو قطبی
directional derivative	مشتق راستایی
directrix	خط هادی
displacement	جابجایی
dynamics	دینامیک
dynamometer	دینامومتر (نیروسنج)
dyne	دین
eccentricity	خروج از مرکز
ecliptic	دایرة البروج
Einstein, Albert	البرت اینشتین
elastic collision	برخورد کشسان
elastic constant	ثابت کشسانی
electron volt	الکترون ولت
ellipse	بیضی
elliptical orbits	مدارهای بیضوی
endoergic	انرژی گیر
energy	انرژی
epicycle	فلک تدویر (ابی سیکل)
epicycloid	ابی سیکلوئید
equation of continuity	معادله پیوستگی
equilibrium	ترازندی
equipotential surfaces	سطحهای هم پتانسیل
equivalence	هم ارزی
erg	ارگ
escape velocity	سرعت فرار
ether	اتر
event	رویداد
exoergic	انرژی زا
expansion ratio	نسبت انبساط

experimental error	خطای تجربی
external force	نیروی خارجی
field	میدان
fission	شکافت
fluid	شاره
focus	کانون
force	نیرو
forced oscillatory motion	حرکت نوسانی واداشته
Foucault	فوکو
foucault pendulum	آونگ فوکو
four - vectors	چهار - بردار
Fourier	فوریه
Fourier series	رشته فوریه
Fourier theorem	قضیه فوریه
Fourier transform	تبدیل فوریه
frame of reference	چارچوب مرجع
free particle	ذره آزاد
frequency	بسامد
friction	مالش
galaxy	کهکشان
Galilean transformation	تبدیل گاليله
gas constant	ثابت گاز
gas thermometer	دماسنج گازی
Gaussian distribution	توزیع گاوسی
Gay-Lussac's law	قانون گی - لوساگ
general principle of relativity	اصل عام نسبیت
gradient	گرادیان
gravitational field	میدان گرانشی
gravitational field strength	شدت میدان گرانشی
gravitational mass	جرم گرانشی
gravitational potential	پتانسیل گرانشی
gravity	گرانی
gyroscope	ژیروسکوپ

gyroscopic compass

قطب‌نمای ژيروسکوپی

harmonics

هماهنگها

heat

گرما

heavy water

آب سنگین

Hertz

هرتز

Hipparchus

ابرخس

histogram

نمودار ستونی

hydrogen atom

اتم هیدروژن

ideal gas

گاز کامل

impact parameter

فراسنج برخورد

impedance

پاگیری

impulse

تکان

inelastic collision

برخورد ناکششان

inertia

لختی

inertial force

نیروی لختی

inertial frame of reference

چارچوب مرجع لخت

inertial mass

جرم لخت

inertial observer

ناظر لخت

instantaneous acceleration

شتاب لحظه‌ای

instantaneous power

توان لحظه‌ای

instantaneous velocity

سرعت لحظه‌ای

integral

انتگرال

interaction

برهم‌کنش

interaction energy

انرژی برهم‌کنش

interference

تداخل

interferometer

تداخل‌سنج

internal energy

انرژی داخلی

internal force

نیروی داخلی

International System (of units)

دستگاه (یکاهای) بین‌المللی

invariant

ناوردا

inverse - square force

نیروی عکس مجذوری

isotope

ایزوتوپ

Joule	ژول
Kelvin	کلوین
Kepler's laws	قوانین کپلر
kilogram	کیلوگرم
kilowatt-hour	کیلووات ساعت
kinetic coefficient of friction	ضریب جنبشی مالش
kinetic energy	انرژی جنبشی
laboratory frame of reference	چارچوب مرجع آزمایشگاه
law of areas	قانون مساحات
low of inertia	قانون لختی
law of motion	قانون حرکت
law of universal gravitation	قانون گرانش عمومی
length contraction	انقباض طول
Lennard - Jones potential	پتانسیل لنارد - جونز
lever arm	بازوی اهرم
L -frame of reference	چارچوب مرجع L
light year	سال نوری
line integral	انتگرال خطی
line of equinoxes	خط اعتدالین
linear momentum	اندازه حرکت خطی
lines of force	خطهای نیرو
Lissajous figures	شکلهای لیسازو
Lorentz transformation	تبدیل لورنتس
Lorentz - Fitzgerald hypothesis	فرضیه لورنتس - فیتزجرالد
Loschmidt number	عدد لوشمیت
macroscopic	ماکروسکوپیکی
mass	جرم
matter	ماده
mean solar day	روز شمسی میانگین
mechanical energy	انرژی مکانیکی
mechanics	مکانیک
meter	متر

metric system	دستگاه متری
Michelson - Morley experiment	آزمایش مایکلسون - مورلی
Milky way	راه شیری
moderation	مهاری
moderator	مهاریگر
modulation	مدولاسیون
mole	مول
molecule	مولکول
moment of inertia	گشتاور لختی
momentum	اندازه حرکت
Morse potential	پتانسیل مورس
Newton's laws of motion	قوانین حرکت نیوتون
nonconservative force	نیروی ناپایستار
noninertial observer	ناظر غیر لخت
nonmechanical energy	انرژی غیر مکانیکی
normal acceleration	شتاب قائم
normal distribution	توزیع بهنجار
normal force	نیروی قائم
normal mode	مد بهنجار
nucleus	هسته
nutation	رقص محور
observation	مشاهده
observer	ناظر
operational definition	تعریف عملیاتی
orbit	مدار
oscillation	نوسان
oscillator	نوسانگر
oscillatory motion	حرکت نوسانی
parallax	اختلاف نظر
parallel forces	نیروهای موازی
parsec	پارسک
particle	ذره

pendulum	آونگ
perigee	حضیض
perihelion	حضیض
period	دوره
phase	فاز
physical pendulum	آونگ فیزیکی
Planck's constant	ثابت پلانک
plasma	پلازما
plastic collision	بر خورد پلاستیک
poise	پواز
polarization	قطبش
polhode	قطب راه
position vector	بردار مکان
potential	پتانسیل
potential barrier	سد پتانسیل
potential energy	انرژی پتانسیل
power	توان
precession	حرکت تقدیمی
precision	دقت
pressure	فشار
principal axes of inertia	محورهای اصلی لختی
principal moments of inertia	گشتاورهای لختی اصلی
principle of equivalence	اصل هم ارزی
principle of relativity	اصل نسبیت
products of inertia	حاصل ضربهای لختی
proper energy	انرژی خاص
proper force	نیروی خاص
proton - antiproton pair	زوج پروتون - پادپروتون
Ptolemy	بطالمیوس
pulse	تپه
Q - equation	معادله Q
quadrupole moment	گشتاور چهار قطبی
radial velocity	سرعت شعاعی

radian	رادیان
radius of curvature	شعاع انحنا
radius of gyration	شعاع ژیراسیون
reactance	پاگیری انگاری
reciprocal vectors	بردارهای متقابل
rectilinear motion	حرکت مستقیم الخط
reduced mass	جرم کاهشده
reference	مرجع
relative translational motion	حرکت انتقالی نسبی
relative velocity	سرعت نسبی
relativistic mechanics	مکانیک نسبیتی
relativity	نسبیت
relaxation time	زمان واهلش
renormalization	باز بهنجارش
repulsive inverse-square force	نیروی دافعه عکس مجذوری
resistance	مقاومت
resonance	بازآوایی (تشدید)
rest	سکون
rest energy	انرژی سکون
rest mass	جرم سکون
restitution	بازگشت
right-handed screw	پیچ راستگرد
rigid body	جسم سخت
rms deviation	انحراف rms
root-mean-square velocity	سرعت ریشه میانگین مربعی
rotating vector	بردار چرخان
rotation	چرخش
rotational power	توان چرخشی
scalar	اسکالر
scalar product	ضرب اسکالر
scattering	پراکندگی
second	ثانیه
semimajor axis	نیم قطر بزرگ
semiminor axis	نیم قطر کوچک

sidereal day	روز نجومی
significant figures	ارقام بامعنی
simple harmonic motion (SHM)	حرکت هماهنگ ساده
simple pendulum	آونگ ساده
sliding friction	مالش لغزشی
solar system	منظومه شمسی
special principle of relativity	اصل خاص نسبیت
speed	تندی، سرعت
spin	اسپین
stable equilibrium	ترازمندی پایدار
static coefficient of friction	ضریب ایستایی مالش
stationary motion	حرکت ایستور
statistical mechanics	مکانیک آماری
steady state	حالت دائم (پابرجا)
Steiner's theorem	قضیه اشتاینر
stradian	استرادیان
Stokes' law	قانون استوکس
streamlines	خطهای جریان
superposition	برهم نهش
system velocity	سرعت دستگاه
tangential acceleration	شتاب مماسی
tangential force	نیروی مماسی
Taylor's theorem	قضیه تایلور
tensor	تانسور
temperature	دما
theoretical physics	فیزیک نظری
thermal equilibrium	تعادل گرمایی
thermodynamics	ترمودینامیک
thremometer	دماسنج
threshold energy	انرژی آستانه
thrust	پیشران
time	زمان
time dilation	اتساع زمان
time interval	فاصله زمانی

top	فر فزه
torque	گشتاور نیرو
torsion pendulum	آونگ پیچشی
total energy	انرژی کل
transformation	تبدیل
transient term	جمله گذرا
translation	انتقال
translational motion	حرکت انتقالی
transverse velocity	سرعت عرضی
turning point	نقطه برگشت
uniform circular motion	حرکت دایره ای یکنواخت
uniform motion	حرکت یکنواخت
unit	یکا
unstable equilibrium	تراز مندی ناپایدار
vector	بردار
vector product	ضرب برداری
velocity	سرعت
Venturi meter	پیمانه ونتوری
virial theorem	قضیه ویریال
viscosity	وشکسانی
Watt	وات
weight	وزن
work	کار
Yukawa potential	پتانسیل یوکاوا
zero momentum frame	چارچوب اندازه حرکت صفر
zero rest mass	جرم سکون صفر

فهرست راهنما

heavy water	آب سنگین ۳۲۶
Hipparchus	ابرخس ۳۹۰
ether	اتر ۱۴۶
time dilation	اتساع زمان ۱۷۲
atom	اتم ۷
hydrogen atom	اتم هیدروژن
reduced mass of —	جرم کاهشده — ۳۰۲
atmospher	اتمسفر ۳۳۰
Atwood	آتوود
—'s machine	ماشین — ۲۰۱
parallax	اختلاف منظر ۳۳
vibration	ارتعاش
normal—	— بهنجار ۴۶۹
CO ₂ —	CO ₂ — ۴۷۲
Aristotle	ارسطو
Archimedes	ارشیمیدوس
—' principle	اصل — ۳۵۸، ۲۰۷
significant figures	ارقام با معنی ۲۹
erg	ارگ ۲۵۰
Aristarchus	اریستارخوس ۵۰۶
Michelson - Morley experiment	آزمایش مایکلسون - مورلی ۱۷۵، ۴۰۶
laboratory	آزمایشگاه
— frame of reference	چارچوب مرجع — ۲۹۴
spin	اسپین ۳۰۸
threshold	آستانه

- energy	انرژی - ۴۲۸
stradian	استرادیان ۲۶
Stokes	استوکس
- ' law	قانون - ۲۰۵
scaler	اسکالر ۳۹
- product	ضرب - ۵۴
Steiner	اشتاینر
- 's theorem	قضیه - ۳۶۹
principle	اصل
Archimedes' -	- ارشمیدوس ۳۵۸، ۲۰۷
- of the conservation of momentum	- بقای اندازه حرکت ۱۹۱
special - of relativity	- خاص نسبیت ۴۰۶، ۱۶۴
general - of relativity	- عام نسبیت ۵۴۲
classical - of relativity	- کلاسیک نسبیت ۴۰۳
- of relativity	- نسبیت ۱۶۴
- of equivalence	- هم ارزی ۵۴۰
equinoxes	اعتدالین
precession of -	حرکت تقدیمی - ۳۸۹
line of -	خط - ۳۹۰
electron-volt	الکترون ولت ۲۵۴
statistical	آماري
- mechanics	مکانیک - ۳۲۷
Amper	آمپر ۲۲
Andromeda	امراهه المسلسله ۱۱
expansion	انبساط
- ratio	نسبت - ۳۳۰
translation	انتقال ۷۲، ۳۶۲
translational	انتقالی
- kinetic energy	انرژی جنبشی - ۳۱۶
integral	انتگرال
line -	- خطی ۲۴۷
deviation	انحراف ۳۰
mean -	- میانگین ۳۰
root - mean - square -	- ریشه میانگین مربعی ۳۰
curvature	انحناء
radius of -	شعاع - ۱۲۵

center of _	مرکز - ۱۲۵
momentum	اندازه حرکت
conservation of _	بقای - ۱۹۱
linear _	خطی - ۱۸۹
angular _	زاویه‌ای - ۲۱۸
conservation of _	بقای - ۳۰۶
internal _	داخلی - ۳۰۸
_ of rigid body	جسم سخت - ۳۶۳
relativistic _	نسبیتی - ۴۰۷
measurement	اندازه گیری - ۱۸
_ of temperature	دما - ۳۳۸
energy	انرژی - ۱۰۱
threshold _	آستانه - ۴۲۸
_ of proton-antiproton pair	زوج پروتون - پاد پروتون - ۴۲۸
_ resonance	بازآوایی - ۴۸۱
interaction _	برهم‌کنش - ۴۷۱
conservation of _	بقای - ۳۱۴
potential _	پتانسیل - ۲۵۹
internal _	داخلی - ۳۱۲
_ of SHM	حرکت هماهنگ ساده - ۴۴۷
gravitational _	گرانشی - ۵۱۳
centerifugal _	گریز از مرکز - ۲۷۰
curves of _	منحنیهای - ۲۷۲
vaporization _ of H ₂ O	تبخیر آب - ۵۴۳
Lorentz transformation of _	تبدیل لورنتس - ۴۳۶، ۴۱۸
coupling _	جفت شدگی - ۴۷۱
kinetic _	جنبشی - ۲۵۳
translational _	انتقالی - ۳۱۶
rotational _	چرخشی - ۳۸۱
_ of SHM	حرکت هماهنگ ساده - ۴۴۶
internal _	داخلی - ۳۱۶
relativistic _	نسبیتی - ۴۱۳
proper _	خاص - ۳۱۳
internal _	داخلی - ۳۱۵
rest _	سکون - ۴۱۴

chemical —	شیمیایی ۳۳۲
nonmechanical —	غیر مکانیکی ۳۳۲
total —	کل ۴۱۴، ۳۳۲، ۳۱۴، ۲۶۶
mechanical —	مکانیکی ۳۳۲
exoergic	انرژی زا ۳۲۰
endoergic	انرژی گیر ۳۲۰
high energy	انرژی های بالا
— collision	برخورد در — ۴۲۶
length contraction	انقباض طول ۱۷۱
Angstrom	آنگستروم ۷
aphelion	اوج ۲۴۰
apogee	اوج ۵۵۰
pendulum	آونک
viscous damping —	بامیرایی و شکسان — ۴۷۷
ballistic —	پرتابی ۳۵۰
torsion —	پیچشی ۴۵۶
cycloidal —	چرخزادی ۴۵۲
energy relations in —	روابط انرژی در — ۲۵۸
simple —	ساده ۴۵۰
Foucault —	فوکو ۱۶۱
physical —	فیزیکی ۴۵۳
conical —	مخروطی ۲۱۵
compound —	مرکب ۴۵۳
Avogadro	آووگادرو
—'s number	عدد — ۳۵۵، ۳۳
lever	اهرم
— arm	بازوی — ۷۳
isotope	ایزوتوپ ۷
static	ایستایی
— coefficient of friction	ضریب — مالش ۲۰۳
stationary	ایستوار
— motion	حرکت — ۳۴۲
Einstein, Albert	اینشتین، آلبرت ۴۰۶
charge	بار الکتریکی ۱۹

resonance	بازآوایی
energy -	- انرژی ۴۸۱
amplitude -	- دامنه ۴۸۰
renormalization	بازبهنجارش ۵۳۳
restitution	بازگشت
coefficient of -	ضریب - ۳۵۱
lever arm	بازوی اهرم ۷۳
critical	بحرانی
damping	میرایی - ۴۹۵
collision	برخورد ۳۱۸، ۱۹۴
plastic -	- پلاستیک ۳۵۲
high energy -	- در انرژیهای بالا ۴۲۶
α - particle -	- ذره آلفا ۳۲۲، ۱۹۴
elastic -	- کشسان ۳۲۰
Q of -	Q ی - ۳۲۰
inelastic -	- ناکشسان ۳۲۰
Q -equation for -	معادله Q برای - ۳۲۲
impact	برخورد
- parameter	فراسنج - ۲۲۵
range	برد ۱۲۲
vector	بودار ۳۹
difference between -s	تفاضل - ها ۴۲
sum of -s	جمع - ها ۴۰
rotating -	- چرخان ۴۵۸
- for interference	- برای تداخل ۴۵۸
- for SHM	- برای حرکت هماهنگ ساده ۴۴۲
position -	- مکان ۴۶
components of -	مؤلفه‌های - ۴۴
reciprocal -s	- های متقابل ۶۸
unit -	- یکا ۴۰
turning	برگشت
- point	نقطه - ۲۷۳
Bernoulli	برنولی
-'s theorem	قضیه - ۳۴۳
interaction	برهم‌کنش ۵۰۲، ۱۸۷، ۱۰۱، ۱۰

energy of —	انرژی — ۴۷۱
superposition	برهم نهش
— of tow SHM	— دو حرکت هماهنگ ساده ۴۶۰، ۴۶۲، ۴۵۷
frequency	— بسامد ۴۲۸، ۴۴۱
angular —	— زاویه‌ای ۴۴۱
Ptolemy	بطلمیوس ۵۰۵
conservation	بقا
— of momentum	— ی اندازه حرکت ۱۹۱
angular —	— زاویه‌ای ۳۰۶
— of energy	— ی انرژی ۳۱۴
— in fluid	— در شار ۳۴۳
— of particle	— ذره ۲۶۵
Boltzmann	بولتزمن
—'s constant	ثابت — ۳۳۷
Boyle	بویل
—'s law	قانون — ۳۵۸
normal	بهنجار
— vibration	ارتعاش — ۴۶۹
— distribution	توزیع — ۳۱
— mode	مد — ۴۶۹
elliptical	بیضوی
— polarization	قطبش — ۴۶۴
— orbit	مدار — ۵۱۵
ellipse	بیضی
area of —	مساحت — ۵۲۴
antiproton	پاد پروتون ۴۲۸
parsec	پارسک ۳۳
impedance	پاگیری ۴۸۳
reactance	پاگیری انگاری ۴۸۳
stable	پایدار
— equilibrium	ترازندی — ۲۷۳
conservative	پایستار
— force	نیروی — ۲۵۹

potential	پتانسیل
— energy	انرژی — ۲۵۹
— barrier	سد — ۲۷۳
gravitational —	— گرانشی ۵۲۸
centrifugal —	— گریز از مرکز ۲۷۰
Lennard - Jones —	— لنارد - جونز ۲۷۶
Morse —	— مورس ۴۹۵
Yukawa —	— یوکاوا ۲۹۰
scattering	پراکندگی ۳۱۸، ۲۲۵
proton - antiproton	پروتون - پادپروتون ۴۲۸
threshold energy of —	انرژی آستانه — ۴۲۸
plastic	پلاستیک
— collision	برخورد — ۳۵۲
plasma	پلازما ۹
Planck	پلانک
—'s contant	ثابت — ۲۲۴
poise	پواز ۲۰۶
pound - force	پوند - نیرو ۷۱
bandwidth	پهنای نوار ۴۹۶
right - handed screw	پیچ راستگرد ۵۷
tortion(al)	پیچشی
— pendulum	آونگ — ۴۵۶
Cavendish - balance	ترازوی — کاوندیش ۵۰۹
thrust	پیشرانده ۵۱۸، ۲۱۱
advance of perihelion	پیشروی حضیض ۵۲۲
Venturi meter	پیمانه ونتوری ۳۴۵
continuity	پیوستگی
equation of —	معادله — ۳۴۴
pion	پیون ۶
tensor	تانسور ۴۲۰
Taylor	تایلور
—'s theorem	قضیه — ۴۷۴
vaporization of H ₂ O	تبخیر آب
energy of —	انرژی — ۵۴۳

transform(ation)	تبدیل
Fourier —	— فوریه ۴۸۸
Galilean —	— گالیلئ ۱۴۹
Lorentz —	— لورنتس ۱۸۳، ۱۶۶
— of energy	— انرژی ۴۳۶، ۴۱۸
— of velocity	— سرعت ۱۶۸
inverse of —	عکس — ۱۶۷
— of force	— نیرو ۴۳۵
relativistic — of acceleration	— نسبیتی شتاب ۱۸۳
pulse	تپه ۴۸۹
Fourier analysis	تحلیل فوریه ۴۸۵
interference	تداخل ۴۵۷
interferometer	تداخل سنج ۱۷۵
equilibrium	ترازمندی ۸۵
stable —	— پایدار ۲۷۳
— of rigid body	— جسم سخت ۸۷
— of particle	— ذره ۸۵
unstable —	— ناپایدار ۲۷۳
— and rest	— وسکون ۲۲۷
balance	ترازو
Cavendish torsion —	— ی پیچی کاوندیش ۵۰۹
spring —	— ی فنری ۲۵۲
quadrature	تربیع
tow SHM in —	دوحرکت هماهنگ ساده در — ۴۵۹
thermodynamics	ترمودینامیک ۳۲۷
first law of —	قانون اول — ۳۳۳
thermal equilibrium	تعادل گرمایی ۳۳۲، ۳۲۸
operational definition	تعریف عملیاتی ۱۹
difference between vectors	تفاضل بردارها ۴۲
opposition	تقابل
tow SHM in —	دوحرکت هماهنگ ساده در — ۴۵۹
symmetry	تقارن
axis of —	محور — ۸۵
center of —	مرکز — ۸۵
precession of the equinoxes	تقدیم اعتدالین ۳۸۹

precession	تقدیمی [حرکت] ۳۸۷
impulse	تکان ۲۴۴
speed	تندی (سرعت) ۱۰۶
power	توان ۲۴۹
dissipation of _	اتلاف - ۲۹۶
rotational _	- چرخشی ۳۹۹
instantaneous _	- لحظه‌ای ۲۴۹
average _	- میانگین ۲۵۰
- of oscillator	- نوسانگر ۳۸۱
- of forced oscillator	- نوسانگر واداشته ۴۸۴
units of _	یکاهای - ۲۵۰
distribution	توزیع
normal _	- بهنجار ۳۱
Gaussian _	- گاوسی ۳۱
constant	ثابت
Boltzmann _	- بولتزمن ۳۳۷
Planck's _	- پلانک ۲۲۴
elastic _	- کشسانی ۴۴۶
gas _	- گاز ۳۵۵
second	ثانیه ۲۱
displacement	جابجایی ۱۱۵، ۳۹
table	جدول
prefixes of powers of ten	- پیشوند توانهای ده ۲۳
density, (relative to water)	- چگالی (نسبت به آب) ۲۵
basic data of the solar system	- داده‌های اساسی منظومه شمسی ۵۰۷
relations of systems of particles	- روابط دستگاههای ذرات ۳۱۷
acceleration of gravity	- شتاب گرانی ۱۵۹
radius of gyration	- شعاع ژیراسیون ۳۷۱
coefficient of friction	- ضریب مالش ۲۰۳
coefficient of viscosity	- ضریب شکسانی ۲۰۶
center of mass	- مرکز جرم ۸۴
mass	جرم ۱۸۹، ۲۰
dynamic definition of _	تعریف دینامیکی - ۱۹۴

rest —	— سکون ۴۰۷، ۱۸۹
zero —	— صفر ۴۱۶
reduced —	— کاهشده ۳۰۱
— of hydrogen atom	— اتم هیدروژن ۳۰۲
— of deuteron	— دوترون ۳۰۲
gravitational —	— گرانشی ۵۱۲، ۲۰
inertial —	— لخت ۲۰
center of —	— مرکز ۸۳
rigid body	— جسم سخت ۳۶۲
angular momentum of —	— اندازه حرکت زاویه‌ای — ۳۶۳
equilibrium of —	— ترازمندی ۸۷
couple	— جفت ۷۸
coupling	— جفت شدگی
— energy	— انرژی ۴۷۱
— term	— جمله ۴۶۸
coupled	— جفت شده
— oscillators	— نوسانگرهای — ۴۶۷
sum of vectors	— جمع بردارها ۴۰
term	— جمله
coupling —	— جفت شدگی ۴۶۸
transient —	— گذرا ۴۷۹
anharmonic —	— ناهماهنگی ۴۷۴
kinetic	— جنبشی
— energy	— انرژی ۲۵۳
— coefficient of friction	— ضریب — مالش ۲۰۳
frame of referenc	— چارچوب مرجع ۱۴۶، ۱۰۳
laboratory —	— آزمایشگاه ۲۹۴
zero momentum —	— اندازه حرکت صفر ۲۹۴
inertial —	— لخت ۱۸۸
center of mass —	— مرکز جرم ۲۹۴
rotating	— چرخان
— vector	— بردار ۴۵۸
cycloid	— چرخزاد ۴۵۲
cycloidal	— چرخزادی

- pendulum	آونگ - ۴۵۲
rotation	چرخش ۷۷، ۳۶۲
kinetic energy of -	انرژی جنبشی - ۳۸۱
rotational	چرخشی
- power	توان - ۳۹۹
density	چگالی ۲۴
table of -	جدول - ۲۵
relative -	- نسبی ۲۴
four-vector	چهار - بردار ۴۱۹
quadrupole	چهار قطبی
- moment	گشتاور - ۵۵۵
products of inertia	حاصل ضربهای لختی ۴۰۱
state	حالت
steady -	- دائم (پایرجا) ۲۷۹
equation of - of gas	معادله - گاز ۳۳۵
-s of matter	- های ماده ۹
limiting	حد
- velocity	سرعت - ۲۰۷
motion	حرکت ۱۰۱
uniform translational relative -	- انتقالی نسبی یکنواخت ۱۴۸
stationary -	- ایستور ۳۴۲
precession	- تقدیمی ۳۸۷
- of the equinoxes	- اعتدالین ۳۸۹
accelerated -	- تند شونده ۱۰۸
circular -	- دایره‌ای ۱۲۷
uniform -	- یکنواخت ۱۲۸
gyroscopic -	- ژيروسکوپی ۳۸۵
fluid -	- شاره ۳۴۰
decelerated -	- کند شونده ۱۰۸
rectilinear -	- مستقیم الخط ۱۰۴
uniformly accelerated -	- با شتاب ثابت ۱۱۰
uniform -	- یکنواخت ۱۱۰
curvilinear -	- منحنی الخط ۱۱۵، ۱۳۴، ۲۱۲

- of rocket	- موشک ۲۱۰
oscillatory -	- نوسانی
damped -	- میرا ۴۷۵، ۴۹۵
anharmonic -	- ناهماهنگ ۴۷۳
forced -	- واداشته ۴۷۸
simple harmonic -	- هماهنگ ساده
potential energy of -	- انرژی پتانسیل - ۴۴۷
kinetic energy of -	- انرژی جنبشی - ۴۴۶
superposition of two -	- برهم نهش دو - ۴۵۷، ۴۶۰، ۴۶۲
- in quadrature	- در تربیع ۴۵۹
- in opposition	- در تقابل ۴۵۹
differential equation of -	- معادله دیفرانسیل - ۴۴۸
- in phase	- همفاز ۴۵۹
uniform -	- یکنواخت ۱۰۷
perigee	- حضیض ۵۵۰
perihelion	- حضیض ۲۴۰
advance of -	- پیشروی - ۵۲۲
external	- خارجی
- force	- نیروی - ۲۹۵
proper	- خاص
- energy	- انرژی - ۳۱۳
- force	- نیروی - ۴۲۱
eccentricity	- خروج از مرکز ۵۲۳
line	- خط
- of equinoxes	- اعتدالین ۳۹۰
directrix -	- هادی ۵۲۳
stream - s	- های جریان ۳۴۲
- s of force	- های نیرو ۵۲۸
experimental error	- خطای تجربی ۱۸
linear	- خطی
- integrel	- انتگرال - ۲۴۷
- momentum	- اندازه حرکت - ۱۸۹
- polarization	- قطبش - ۴۶۳

internal	داخلی
- energy	انرژی - ۳۱۵
potential -	- پتانسیل ۳۱۲
kinetic -	- جنبشی ۳۱۶
- force	نیروی - ۲۹۵
repulsive	دافعه
- inverse-square force	نیروی - عکس مجذوری ۲۲۵
Dalitz	دالیتز
- diagram	نمودار - ۳۵۹
amplitude	دامنه ۴۴۱
- rasonance	بازآوایی - ۴۸۰
ecliptic	دایرة البروج ۳۸۹
circular	دایره‌ای
- motion	حرکت - ۱۲۷
- polarization	قطبش - ۴۶۴
detarminant	دترمینان ۵۹
Kelvin degree	درجه کلوین ۳۲۸
system	دستگاه
cgs -	- cgs ۲۳
MKSA -	- MKSA ۲۲
MKSC -	- MKSC ۲۰
International -	- بین‌المللی ۲۲
- velocity	سرعت - ۲۹۳
metric -	- متری ۲۲
absolute - of reference	- مرجع مطلق ۱۴۶
virial of -	ویریال - ۳۳۵
precision	دقت ۲۷
del	دل ۲۶۴
temperature	دما ۳۲۷
measurment of -	اندازه‌گیری - ۳۳۸
Centigrade -	- ی سانتیگراد ۳۲۸
Celsius -	- ی سلزیوس ۳۲۸
absolute -	- ی مطلق ۳۳۶، ۳۲۸
thermometer	دماسنج ۳۳۹
gas -	- گازی ۳۳۹

deuteron	دوترون
reduced mass of _	جرم کاهشده - ۳۰۲
period	دوره ۲۹، ۱۲۸، ۴۴۱
adhesion	دوسش ۲۰۲
dipole	دوقطبی
_ moment	گشتاور - ۵۵۵
dyne	دین ۱۹۹
dynamics	دینامیک ۱۸۷
particle	ذره
free _	آزاد ۱۸۷
alpha _	آلفا
_ collision	برخورد - ۱۹۴، ۳۲۲
equilibrium of _	ترازندی - ۸۵
virial of _	ویرال - ۲۸۱
radian	رادیان ۲۵
reference direction	راستای مرجع ۳۸
directional	راستایی
_ derivative	مشتق - ۲۶۱
Milky way	راه شیری ۹، ۱۸۸
Fourier series	رشته فوریه ۴۸۷
rotation	رقص محور ۳۸۹
day	روز
mean solar _	شمسی میانگین ۲۱
sidereal _	نجومی ۱۳۵
experimental method	روش تجربی ۱۳
event	رویداد ۱۷۱
root-mean-square	ریشه میانگین مربعی
_ deviation	انحراف - ۳۰
_ velocity	سرعت - ۳۲۷
bond angle	زاویه پیوند
_ of NH_3	NH_3 - ۳۹۳
_ of H_2O	H_2O - ۳۹۳

solid angle	زاویه فضایی ۲۶
angular	زاویه‌ای
- momentum	اندازه حرکت - ۲۱۸
- frequency	بسامد - ۴۴۱
- velocity	سرعت - ۱۲۷
- of the earth	- زمین ۱۳۰
time	زمان ۱۹
- delation	اتساع - ۱۷۲
- of flight	- پرواز ۱۲۱
relaxation -	- واهلش ۲۰۹، ۴۹۶
beat	زنش ۴۶۱
proton-antiproton pair	زوج پروتون-بادپروتون ۴۲۸
Joule	ژول ۲۵۰
gyration	ژیراسیون
radius of -	شعاع - ۳۷۰
table of -	جدول - ۳۷۱
gyroscope	ژیروسکوپ ۳۸۵
gyroscopic	ژیروسکوپی
- motion	حرکت - ۳۸۵
- compass	قطب‌نمای - ۳۹۰
simple	ساده
- pendulum	آونگ - ۴۵۰
- harmonic motion	حرکت هماهنگ - ۴۴۱
atomic clock	ساعت اتمی ۲۱
light year	سال نوری ۳۳
Centigrade	سانتیگراد
- temperature	دمای - ۳۲۸
potential barrier	سد پتانسیل ۲۷۳
velocity	سرعت
Lorentz transformation of -	تبدیل لورنتس - ۱۶۸
limiting -	- حد ۲۰۷
system -	- دستگاه ۲۹۳
relativistic -	- نسبیتی ۴۲۳

rms _	ریشه میانگین مربعی ۳۲۷
angular _	زاویه‌ای ۱۲۷
radial _	شعاعی ۱۳۴
transverse _	عرضی ۱۳۴
escape _	فرار ۵۱۷
instantaneous _	لحظه‌ای ۱۰۴، ۱۱۶
center of mass _	مرکز جرم ۲۹۳
average _	میانگین ۱۰۴، ۱۱۶
_ of approach	نزدیک شدن ۵۱۵
relative _	نسبی ۱۴۶
_ of light	نور ۴۰۶
terminal _	نهایی ۲۰۷
area	سطح
vector representation of _	نمایش برداری ۶۱
equipotential surfaces	سطوح هم پتانسیل ۵۳۰
rest	سکون ۱۰۳
_ energy	انرژی ۴۱۴
_ mass	جرم ۱۸۹، ۴۰۷
_ and equilibrium	و ترازمندی ۲۲۷
Celsius	سلزیوس
_ temperature	دمای ۳۲۸
cycloid	سیکلوئید (چرخزاد) ۴۵۲
Charles	شارل
_ law	قانون ۳۵۸
fluid	شاره ۳۴۰
conservation of energy in _	بقای انرژی در ۳۴۳
_ motion	حرکت ۳۴۰
_ friction	مالش ۲۰۵
acceleration	شتاب ۱۰۷
relativistic transformation of _	تبدیل نسبیتی ۱۸۳
angular _	زاویه‌ای ۱۳۱
normal _	قایم ۱۲۴
Coriolis _	کوریولی ۱۵۵

- of gravity	- گرانی ۵۳، ۱۲۱
table of -	جدول - ۱۵۹
effective -	- مؤثر ۱۵۶
centrifugal -	- گریز از مرکز ۱۵۶
instantaneous -	- لحظه‌ای ۱۰۷، ۱۱۹
centripetal -	- مرکزگرا ۱۳۲، ۱۵۵
tangential -	- مماسی ۱۲۴، ۱۳۱
average -	- میانگین ۱۰۷، ۱۱۸
gravitational field strength	شدت میدان گرانشی ۵۲۷
radius	شعاع
- of curvature	- انحنا ۱۲۵
- of gyration	- ژیراسیون ۳۷۰
table of -	جدول - ۳۷۱
radial	شعاعی
- velocity	سرعت - ۱۳۴
fission	شکافت ۳۲۳
Lissajous figures	شکل‌های لیسازو ۴۶۷
buoyancy	شناوری ۳۵۸
chemical	شیمیایی
- energy	انرژی - ۳۳۲
zero	صفر
- momentum frame	چارچوب اندازه حرکت - ۲۹۴
- rest mass	جرم سکون - ۴۱۶
sound	صوت
quality of -	کیفیت - ۴۸۷
product	ضرب
scalar -	- اسکالر ۵۴
vector -	- برداری ۵۷
percussion	ضربه
center of -	مرکز - ۳۹۷
coefficient	ضریب
static - of friction	- ایستایی مالش ۲۰۳
- of restitution	- بازگشت ۳۵۱

kinetic — of friction	— جنبشی مالش ۲۰۳
Fourier —	— فوریه ۴۸۷
— of friction	— مالش ۲۰۲
table of —	جدول — ۲۰۳
— of viscosity	— وشکسانی ۲۰۶
table of —	جدول — ۲۰۶
length	طول ۱۹
— contraction	انقباض — ۱۷۱
bond length	طول پیوند
OH —	OH — ۳۹۳
CO —	CO — ۳۴۸
NH —	NH — ۳۹۳
H ₂ —	H ₂ — ۵۴۳
HCl —	HCl — ۳۹۳، ۳۴۸
number	عدد
Avogadro's —	— آووگادرو ۳۳، ۳۵۵
Loschmidt —	— لوشمیت ۳۵۶
inverse Lorentz transformation	عکس — تبدیل لورنتس ۱۶۷
inverse-square	عکس مجذوری
repulsive — force	نیروی دافعه — ۲۲۵
transverse	عرضی
— velocity	سرعت — ۱۳۴
noninertial	غیر لخت
— observer	ناظر — ۴۰۵
nonmechanical	غیر مکانیکی
— energy	انرژی — ۳۳۲
phase	فاز ۴۴۱
time interval	فاصله زمانی ۱۷۱
escape	فرار
— velocity	سرعت — ۵۱۷
impact parameter	فراسنج برخورد ۲۲۵

hypothesis	فرضیه
Lorentz - Fitzgerald _	_ لورنتس-فیتزجرالد ۱۷۷
top	فرقه ۳۸۷
pressure	فشار ۳۰۰
units of _	یکاهای - ۳۳۰
deferent	فلک حامل (دفرن) ۵۰۵
Fourier	فوریه
_ transformation	تبدیل - ۴۸۸
_ analysis	تحلیل - ۴۸۵
_ series	رشته - ۴۸۷
_ coefficients	ضرایب - ۴۸۷
_ theorem	قضیه - ۴۸۷
Foucault	فوکو ۱۶۱
_ pendulum	آونگ - ۱۶۱
Fitzgerald	فیتزجرالد
Lorentz - - hypothesis	فرضیه لورنتس - - ۱۷۷
physics	فیزیک ۴
theoretical _	_ نظری ۱۴
physical	فیزیکی
_ pendulum	آونگ - ۴۵۳
law	قانون
Stokes' -	- استوکس ۲۰۵
first - of thermodynamics	- اول ترمودینامیک ۳۳۳
Newton's first _	- اول نیوتون ۱۸۸
- of conservation of energy	- بقای انرژی ۴۱۴
Boyle's _	- بویل ۳۵۸
Newson's second _	- دوم نیوتون ۱۹۶
Newton's third _	- سوم نیوتون ۱۹۶
Charles' _	- شارل ۳۵۸
- of universal gravitation	- گرانش عمومی ۵۰۶
Gay - Lussac's -	- گی-لوساک ۳۵۹
- of inertia	- لختی ۱۸۷
- of areas	- مساحات ۵۰۶
Kepler's - s	- های کپلر ۵۰۶

vertical (normal)	قایم ۱۵۶
— acceleration	شتاب - ۱۲۴
theorem	قضیه
Steiner's —	— اشتاینر ۳۶۹
Bernoulli's —	— برنولی ۳۴۳
Taylor's —	— تیلور ۴۷۴
Fourier —	— فوریه ۴۸۷
virial —	— ویرال ۳۳۵، ۲۸۱
polhode	قطب راه ۳۸۰
polarization	قطبش
elliptical —	— بیضوی ۴۶۴
linear —	— خطی ۴۶۳
circular —	— دایره‌ای ۴۶۴
gyroscopic compass	قطب‌نمای ژيروسکوپ ۳۹۰
work	کار ۲۴۶
total external —	— خارجی کل ۲۳۲
units of —	یکاهای - ۲۵۰
calory	کالری ۳۳۱
focus	کانون ۵۲۳
Cavendish	کاوندیش
— torsion balance	ترازوی پیچشی - ۵۰۹
Kepler	کپلر
—'s laws	قوانین - ۵۰۶
direction cosines	کسینوسهای هادی ۴۶
elastic	کشسان
— collision	برخورد - ۳۲۰
elastic[ity]	کشسانی
— constant	ثابت - ۴۴۶
Kelvin	کلوین
— degree	درجه - ۳۲۸
Coulomb	کولن ۲۱
Coriolis	کوریولی
— acceleration	شتاب - ۱۵۵
galaxy	کهکشان ۱۸۸، ۹

quality of sound	کیفیت صوت ۴۸۷
kilogram	کیلوگرم ۲۱
kilogram force	کیلوگرم نیرو ۷۱
kilowatt - hour	کیلووات ساعت ۲۵۰
gas	گاز
- constant	ثابت - ۳۵۵
ideal -	کامل - ۳۳۷
equation of state of -	معادلهٔ حالت - ۳۳۷
equation of state of -	معادلهٔ حالت - ۳۳۵
gas	گازی
- thermometer	دماسنج - ۳۳۹
Galilean	گالیله [ای]
- transformation	تبدیل - ۱۴۹
Gaussian	گاوسی
- distribution	توزیع - ۳۱
gradient	گرادیان ۲۶۳
gravitation	گرانش ۵
universal gravitation	گرانش عمومی
law of -	قانون - ۵۰۶
gravitational	گرانشی
- potential energy	انرژی پتانسیل - ۵۱۳
- potential	پتانسیل - ۵۲۸
- mass	جرم - ۵۱۲، ۲۰
- field	میدان - ۵۲۶
- strength	شدت - ۵۲۷
gravity	گرانی
acceleration of -	شتاب - ۱۲۱، ۵۳
effective -	- مؤثر ۱۵۶
center of gravity	گرانیگاه ۸۳
circulation	گردش ۲۶۱
gram	گرم ۲۳
heat	گرما ۳۳۱
thermal	گرمایی
- equilibrium	تبادل - ۳۳۲، ۳۲۸

centrifugal	گریز از مرکز
- potential energy	انرژی پتانسیل - ۲۷۰
- acceleration	شتاب - ۱۵۶
moment	گشتاور
quadrupole -	- چہار قطبی ۵۵۵
dipole -	- دو قطبی ۵۵۵
- of inertia	- لختی ۳۶۴
principal -	- اصلی ۳۶۵
torque	گشتاور نیرو ۲۲۰، ۷۳
capture	گیراندازی
- reaction	واکنش - ۳۲۱
Gay-Lussac	گی-لوساک
- 's law	قانون - ۳۵۹
instantaneous	لحظہ ای
- power	توان - ۲۴۹
- velocity	سرعت - ۱۱۶، ۱۰۴
- acceleration	شتاب - ۱۱۹، ۱۰۷
inertial	لخت
- mass	جرم - ۲۰
- frame of reference	چارچوب مرجع - ۱۸۸
- observer	ناظر - ۱۸۸
- force	نیروی - ۴۰۵
inertia	لختی
products of -	حاصل ضربیہای - ۴۰۱
law of -	قانون - ۱۸۷
moment of -	گشتاور - ۳۶۴
principal moment of -	گشتاور اصلی - ۳۶۵
principal axis of -	محور اصلی - ۳۶۵
sliding	لغزشی
- friction	مالش - ۲۰۲
Lennard-Jones	لنارد-جونز
- potential	پتانسیل - ۲۷۶
Lorentz	لورنتس
- transformation	تبدیل - ۱۸۳، ۱۶۶

--Fitzgerald hypothesis	فرضیه -- فیتز جرال د ۱۷۷
Loschmidt	لوشمیت
-- number	عدد - ۳۵۶
Lee, T. D.	لی، تونگ دائو ۱۲
Lissajous	لیساژو
-- 'figures	شکل‌های - ۴۶۷
Atwood's machine	ماشین آتوود ۲۰۱
friction	مالش
-- in fluid	- درشاره ۲۰۵
coefficient of --	ضریب - ۲۰۲
static --	- ایستایی ۲۰۳
kinetic --	- جنبشی ۲۰۳
sliding --	- لغزشی ۲۰۲
Michelson	مایکلسون
-- Morley experiment	آزمایش -- مورلی ۱۷۵، ۴۰۶
meter	متر ۲۰
reciprocal	متقابل
-- vectors	بردارهای - ۶۸
fictitious	مجازی
-- force	نیروی - ۲۰۵
axis	محور ۳۷
principal -- of inertia	- اصلی لختی ۳۶۵
-- of symmetry	- تقارن ۸۵
axial	محوری
-- force	نیروی - ۲۲۲
conic(al)	مخروطی
-- pendulum	آونگ - ۲۱۵
-- sections	مقاطع - ۵۲۳
normal mode	مد بهنجار ۴۶۹
orbit	مدار
elliptical --	- بیضوی ۵۱۵
bound --	- مقید ۵۱۵
model	مدل ۱۴
modulated	مدوله شده ۴۶۱

reference	مرجع
frame of _	چارچوب - ۱۰۳
absolute system of _	دستگاه - مطلق ۱۴۶
compound	مرکب
- pendulum	آونگ - ۴۵۳
center	مرکز
- of curvature	- انحنای ۱۲۵
- of symmetry	- تقارن ۸۵
- of mass	- جرم ۸۳
table of _	جدول - ۸۴
frame of reference of _	چارچوب مرجع - ۲۹۴
velocity of _	سرعت - ۲۹۳
- of percussion	- ضربه ۳۹۷
- of parallel forces	- نیروهای موازی ۸۲
centripetal	مرکزگرا
- acceleration	شتاب - ۱۵۵، ۱۳۲
- force	نیروی - ۲۱۳
central	مرکزی
- force	نیروی - ۲۲۱
areas	مساحات
law of _	قانون - ۵۰۶
area of ellipse	مساحت بیضی ۵۲۴
observation	مشاهده ۱۳
directional derivative	مشتق راستایی ۲۶۱
absolute	مطلق
- system of reference	دستگاه مرجع - ۱۴۶
- temperature	دمای - ۳۲۸، ۳۳۶
equation	معادله
- of continuity	- پیوستگی ۳۴۴
barometric _	- توزیع جو ۳۵۹
- of state of a gas	- حالت گاز ۳۳۵
- ideal [gas]	- کامل ۳۳۷
- of SHM	- حرکت هماهنگ ساده ۴۴۸
Q - of collision	- Q برخورد ۳۲۲
ballistic missile _	- موشک پرتابی ۵۵۲

resistance	مقاومت ۴۸۳
conic section	مقطع مخروطی ۵۲۳
bound	مقید
-orbit	مدار - ۵۱۵
position	مکان
-vector	بردار - ۴۶
mechanics	مکانیک ۱۰۱
statistical -	- آماری ۳۲۷
relativistic -	- نسبیتی ۴۰۳
mechanical	مکانیکی
-energy	انرژی - ۳۳۲
tangential	مماسی
-acceleration	شتاب - ۱۳۱، ۱۲۴
-force	نیروی - ۲۱۲
curve	منحنی
-s of potential energy	- های انرژی پتانسیل ۲۷۲
solar system	منظومه شمسی
basic data of - , table	داده‌های اساسی - ، جدول ۵۰۷
parallel	موازی
-forces	نیروهای - ۸۱
effective	مؤثر
-acceleration of gravity	شتاب گرانی - ۱۵۶
Morse	مورس
-potential	پتانسیل - ۴۹۵
Morley	مورلی
Michelson - - experiment	آزمایش مایکلسون - - ۴۰۶، ۱۷۵
mole	مول ۳۲
component	مؤلفه
radial - of force	- شعاعی نیرو ۲۶۲
transverse - of force	- عرضی نیرو ۲۶۲
-s of vector	- های بردار ۴۴
contravariant - s	- های پادوردا ۶۸
rectangular - s	- های عمود برهم ۴۵
covariant - s	- های هموردا ۶۸
molecule	مولکول ۹
moderation	مهاری ۳۲۴

moderator	مه‌ارگر ۳۲۴
average, mean	میانگین
- deviation	انحراف - ۳۰
- power	توان - ۲۵۰
- time	زمانی - ۲۸۱
- velocity	سرعت - ۱۱۶، ۱۰۴
- acceleration	شتاب - ۱۱۸، ۱۰۷
- value	مقدار - ۳۰
field	میدان ۵۰۲
gravitational -	- گرانشی ۵۲۶
- strength	شدت - ۵۲۷
damped	میرا
- oscillatory motion	حرکت نوسانی - ۴۹۵، ۴۷۵
critical damping	میرایی بحرانی ۴۹۵
unstable	ناپایدار
- equilibrium	ترازمندی - ۲۷۳
nonconservative	ناپایستار
- forces	نیروهای - ۲۷۷
observer	ناظر
noninertial -	- غیرلخت ۴۰۵
inertial -	- لخت ۱۸۸
inelastic	ناکشسان
- collision	برخورد - ۳۲۰
invariant	ناورد ۱۵۱
anharmonic	ناهماهنگ
- terms	جمله‌های - ۴۷۴
- oscillatory motion	حرکت نوسانی - ۴۷۳
expansion ratio	نسبت انبساط ۳۳۰
relative	نسبی
- uniform translational motion	حرکت انتقالی - یکنواخت ۱۴۸
- velocity	سرعت - ۱۴۶
relativity	نسبیت
principle of -	اصل - ۱۶۴
special principle of -	اصل خاص - ۴۰۶

general principle of _	اصل عام - ۵۴۲
classical principle of _	اصل کلاسیک - ۴۰۳
relativistic	نسبیتی
- kinetic energy	انرژی جنبشی - ۴۱۳
- mechanics	مکانیک - ۴۰۳
- force	نیروی - ۴۰۹
turning point	نقطه برگشت ۲۷۳
vector representation of area	نمایش برداری سطح ۶۱
Dalitz diagram	نمودار دالیتز ۳۵۹
histogram	نمودار ستونی ۳۰
light	نور
velocity of _	سرعت - ۴۰۶
oscillation	نوسان
normal mode of _	مد بهنجار - ۴۶۹
oscillator	نوسانگر
impedance of _	پاگیری - ۴۸۳
forced	- واداشته ۴۷۸
average power of _	توان میانگین - ۴۸۴
coupled _ s	- های جفت شده ۴۶۷
oscillatory	نوسانی
damped _ motion	حرکت - میرا ۴۷۵، ۴۹۵
anharmonic _ motion	حرکت - ناهماهنگ ۴۷۳
forced _ motion	حرکت - واداشته ۴۷۸
simple harmonic _ motion	حرکت - هماهنگ ساده ۴۴۱
force	نیرو ۱۹۵
Lorentz transformation of _	تبدیل لورنتس - ۴۳۵
lines of _	خطوط - ۵۲۸
radial component of _	مؤلفه شعاعی - ۲۶۲
transverse component of _	مؤلفه عرضی - ۲۶۲
parallel _ s	- های موازی ۸۱
center of _	مرکز - ۸۲
concurrent _ s	- های هم‌رس ۷۱
coplanar _ s	- های هم‌صفحه ۷۹
conservative _	- ی پایستار ۲۵۹
internal _	- ی داخلی ۲۹۵

repulsive inverse-square _	ی دافعۀ عکس میجدوری ۲۲۵
external _	ی خارجی ۲۹۵
proper _	ی خاص ۴۲۱
inertial _	ی لختی ۴۰۵
fictitious _	ی میجازی ۴۰۵
axial _	ی محوری ۲۲۲
centripetal _	ی مرکزگرا ۲۱۳
central _	ی مرکزی ۲۲۱
tangential _	ی مماسی ۲۱۲
nonconservative _	ی ناپایستار ۲۷۷
relativistic _	ی نسبیتی ۴۰۹
units of _	یکاهای ۱۹۹
Newton	نیوتون
_'s first law of motion	قانون اول حرکت ۱۸۸
_'s second law of motion	قانون دوم حرکت ۱۹۶
_'s third law of motion	قانون سوم حرکت ۱۹۶
watt	وات ۲۵۰
forced	واداشته
-oscillatory motion	حرکت نوسانی ۴۷۸
capture reaction	واکنش گیراندازی ۳۲۱
relaxation	واهلش
-time	زمان ۴۹۶، ۲۰۹
weight	وزن ۱۹۷، ۸۳
viscosity	وشکسانی ۲۰۶
coefficient of _	ضریب ۲۰۶
table of _	جدول ۲۰۶
virial	ویریال
-theorem	قضیه ۳۳۵، ۲۸۱
-of a system	یک دستگاه ۳۳۵
-of a particle	یک ذره ۲۸۱
nucleus	هسته ۷
equivalence	هم‌ارزی
principle of _	اصل ۵۴۰

harmonic	هماهنگ ۴۸۷
simple - motion	حرکت - ساده ۴۴۱
equipotential	هم پتانسیل
- surfaces	سطوح - ۵۳۰
cohesion	همدوشش ۲۰۲
concurrent	همرس
- forces	نیروهای - ۷۱
simultaneity	همزمانی ۱۸۴
coplanar	همصفحه
- forces	نیروهای - ۷۹
in phase	همفاز
simple harmonic motions -	حرکتهای هماهنگ ساده - ۴۵۹
unit	یکا ۱۸
- vector	بردار - ۴۰
-s of power	های توان ۲۵۰
-s of pressure	های فشار ۳۳۰
-s of work	های کار ۲۵۰
-s of force	های نیرو ۱۹۹
atomic mass -	ی اتمی جرم ۳۲
astronomical - of length	ی نجومی طول ۳۳
uniform	یکنواخت
- motion	حرکت - ۱۰۷
- circular motion	حرکت دایره‌ای - ۱۲۸
- rectilinear motion	حرکت مستقیم الخط - ۱۰۹
Yukawa	یوکاوا
- potential	پتانسیل - ۲۹۰

جدول پ.۳. یکاها و نمادها

بر حسب یکاهای اصلی	نام یکا	نماد	کمیت
MKSA	MKSC		
m	متر	l, s	طول
kg	کیلوگرم	m	جرم
s	ثانیه	t	زمان
ms^{-1}		v	سرعت
ms^{-2}		a	شتاب
s^{-1}		ω	سرعت زاویه‌ای
s^{-1}		ω	پسامد زاویه‌ای
s^{-1}	هرتز (Hz)	ν	پسامد
$mkgs^{-1}$		P	اندازه حرکت
$mkgs^{-2}$	نیوتون (N)	F	نیرو
m^2kgs^{-1}		L	اندازه حرکت زاویه‌ای
m^2kgs^{-2}		τ	گشتاور نیرو
m^2kgs^{-2}	ژول (J)	W	کار
m^2kgs^{-2}	وات (W)	P	توان
m^2kgs^{-2}	ژول (J)	E_k, E_p, U, E	انرژی
m^2kgs^{-2} / درجه	درجه کلوین (°K)	T	دما
m^2s^{-1}		D	ضریب پخش
$m^2kgs^{-2} \cdot K^{-1}$		K	ضریب رسانایی گرمایی
$m^{-1}kgs^{-1}$		η	ضریب وiskسائی
$m^{-1}kgs^{-2}$		Y	مدول یانگ
$m^{-1}kgs^{-2}$		κ	مدول کپهای
$m^{-1}kgs^{-2}$		G	مدول چینی
m^2kg		I	گشتاور لختی
ms^{-2}		G	میدان گرانشی
m^2s^{-2}		V_c	پتانسیل گرانشی
As	C	q, Q	بار الکتریکی
A	$s^{-1}C$	I	شدت جریان الکتریکی
$m^2kgs^{-2}A^{-1}$	$m^2kgs^{-1}C^{-1}$	R	مقاومت الکتریکی
$mkgs^{-2}A^{-1}$	$mkgs^{-2}C^{-1}$	E	میدان الکتریکی
$m^2kgs^{-2}A^{-1}$	$m^2kgs^{-2}C^{-1}$	V	پتانسیل الکتریکی
$m^{-1}A$	$m^{-1}s^{-1}C$	j	چگالی جریان
$m^2kgs^{-2}A^{-1}$	m^2kgC^{-1}	L	القا
$m^{-1}kg^{-1}sA$	$m^{-1}kg^{-1}s^2C$	ϵ_0	ضریب دی الکتریک
$m^{-1}sA$	$m^{-1}C$	ϕ	قطبش
$m^{-1}sA$	$m^{-1}C$	$\mathcal{D}$	جابجایی دی الکتریکی
$kg s^{-1}A^{-1}$	$kg s^{-1}C^{-1}$	B	میدان مغناطیسی
$mkgs^{-2}A^{-1}$	$mkgC^{-1}$	μ_0	تراوایی ویژه مغناطیسی
$m^{-1}A$	$m^{-1}s^{-1}C$	$\mathcal{M}$	مغناطیسی کردن
$m^{-1}A$	$m^{-1}s^{-1}C$	$\mathcal{H}$	میدان مغناطیس کننده
$m^2kgs^{-2}A^{-1}$	$m^2kgs^{-2}C^{-1}$	Φ_B	شار مغناطیسی
msA	mC	P	گشتاور دو قطبی الکتریکی
m^2sA	m^2C	Q	گشتاور چهار قطبی الکتریکی
m^2A	$m^2s^{-1}C$	M	گشتاور دو قطبی مغناطیسی
m^2A	$m^2s^{-1}C$	Q	گشتاور چهار قطبی مغناطیسی
$m^{-1}kg^{-1}s^2A$	$m^{-1}kg^{-1}s^2C$	C	ظرفیت
			فاراد (F)

جدول پ.۴. ضرایب تبدیل

فشار

$$\begin{aligned} 1 \text{ Nm}^{-2} &= 9.866 \times 10^{-6} \text{ atm} \\ &= 1.450 \times 10^{-4} \text{ lbf in}^{-2} = 10 \text{ dyn cm}^{-2} \\ 1 \text{ atm} &= 1.47 \text{ lbf in}^{-2} = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2} \\ 1 \text{ bar} &= 10^5 \text{ dyn cm}^{-2} \end{aligned}$$

انرژی

$$\begin{aligned} 1 \text{ J} &= 10^7 \text{ erg} = 0.239 \text{ cal} \\ &= 6.242 \times 10^{18} \text{ eV} \\ 1 \text{ eV} &= 10^{-6} \text{ MeV} = 1.60 \times 10^{-12} \text{ erg} \\ &= 2.18 \times 10^{-10} \text{ amu} \\ 1 \text{ amu} &= 1.492 \times 10^{-10} \text{ J} \\ &= 3.826 \times 10^{-11} \text{ cal} = 931.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

دما

$$\begin{aligned} ^\circ\text{K} &= 273.15 + ^\circ\text{C} \\ ^\circ\text{C} &= (^\circ\text{F} - 32)/9 \\ ^\circ\text{F} &= 9(^\circ\text{C} + 32)/5 \end{aligned}$$

توان

$$\begin{aligned} 1 \text{ W} &= 1.341 \times 10^{-3} \text{ hp} \\ 1 \text{ hp} &= 745.7 \text{ W} \end{aligned}$$

بار الکتریکی

$$\begin{aligned} 1 \text{ C} &= 3 \times 10^9 \text{ stC} \\ 1 \text{ stC} &= 1/3 \times 10^{-9} \text{ C} \end{aligned}$$

جریان

$$\begin{aligned} 1 \text{ A} &= 3 \times 10^9 \text{ stA} \\ 1 \text{ stA} &= 1/3 \times 10^{-9} \text{ A} \\ 1 \mu\text{A} &= 10^{-6} \text{ A}, 1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A} \end{aligned}$$

میدان الکتریکی

$$\begin{aligned} 1 \text{ NC}^{-1} &= 1 \text{ Vm}^{-1} = 10^{-3} \text{ Vcm}^{-1} \\ &= 1/3 \times 10^{-3} \text{ st Vcm}^{-1} \end{aligned}$$

پتانسیل الکتریکی

$$\begin{aligned} 1 \text{ V} &= 1/3 \times 10^{-3} \text{ stV} \\ 1 \text{ stV} &= 3 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

مقاومت

$$\begin{aligned} 1 \Omega &= 10^9 \mu\Omega \\ 1 \text{ M}\Omega &= 10^6 \Omega \end{aligned}$$

ظرفیت

$$\begin{aligned} 1 \text{ F} &= 9 \times 10^{11} \text{ stF} \\ 1 \text{ stF} &= 1/9 \times 10^{-11} \text{ F} \\ 1 \mu\text{F} &= 10^{-6} \text{ F}, 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F} \end{aligned}$$

میدان مغناطیسی

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}, 1 \text{ gauss} = 10^{-4} \text{ T}$$

شار مغناطیسی

$$\begin{aligned} 1 \text{ Wb} &= 10^8 \text{ ماکسول} \\ 1 \text{ ماکسول} &= 10^{-8} \text{ Wb} \end{aligned}$$

میدان مغناطیس کننده

$$\begin{aligned} 1 \text{ Am}^{-1} &= 4\pi \times 10^{-3} \text{ اورستد} \\ 1 \text{ اورستد} &= 1/4\pi \times 10^3 \text{ Am}^{-1} \end{aligned}$$

☆ در تمام موارد، عدد ۳ عملاً به جای ۲.۹۹۸ و عدد ۹ به جای ۸.۹۸۷ به کار رفته است.

زمان

$$\begin{aligned} 1 \text{ s} &= 1.667 \times 10^{-2} \text{ min} = 2.778 \times 10^{-4} \text{ hr} \\ &= 3.169 \times 10^{-8} \text{ yr} \\ 1 \text{ min} &= 60 \text{ s} = 1.667 \times 10^{-2} \text{ hr} \\ &= 1.901 \times 10^{-6} \text{ yr} \\ 1 \text{ hr} &= 3600 \text{ s} = 60 \text{ min} = 1.141 \times 10^{-4} \text{ yr} \\ &= 3.156 \times 10^7 \text{ s} = 3.259 \times 10^5 \text{ min} \\ &= 8.766 \times 10^2 \text{ hr} \end{aligned}$$

طول

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= 10^2 \text{ cm} = 3.937 \text{ in} \\ &= 6.214 \times 10^{-4} \text{ mi} \\ 1 \text{ mi} &= 5280 \text{ ft} = 1.609 \text{ km} \\ 1 \text{ in} &= 2.540 \text{ cm} \\ 1 \text{ Å} (\text{آنگستروم}) &= 10^{-10} \text{ cm} \\ &= 10^{-10} \text{ m} = 10^{-4} \mu\text{ (میکرون)} \\ 1 \mu (\text{میکرون}) &= 10^{-6} \text{ m} \\ 1 \text{ AU} (\text{واحد نجومی}) &= 1.496 \times 10^{11} \text{ m} \\ 1 \text{ سال نوری} &= 9.46 \times 10^{15} \text{ m} \\ 1 \text{ پارسک} &= 3.084 \times 10^{16} \text{ m} \end{aligned}$$

زاویه

$$\begin{aligned} 1 \text{ rad} (\text{رادیان}) &= 57.3^\circ \\ 1^\circ &= 1.744 \times 10^{-2} \text{ rad} \\ 1' &= 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ 1'' &= 4.85 \times 10^{-6} \text{ rad} \end{aligned}$$

مساحت

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^2 &= 10^4 \text{ cm}^2 = 1.55 \times 10^{-5} \text{ in}^2 = 1.076 \text{ ft}^2 \\ 1 \text{ in}^2 &= 6.452 \text{ cm}^2 \\ 1 \text{ ft}^2 &= 144 \text{ in}^2 = 9.29 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

حجم

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^3 &= 10^6 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ liter} \\ &= 35.23 \text{ ft}^3 = 6.1 \times 10^4 \text{ in}^3 \\ 1 \text{ ft}^3 &= 2.83 \times 10^{-1} \text{ m}^3 = 28.32 \text{ liter} \\ 1 \text{ in}^3 &= 16.39 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

سرعت

$$\begin{aligned} 1 \text{ m s}^{-1} &= 10^2 \text{ cm s}^{-1} = 3.281 \text{ ft s}^{-1} \\ 1 \text{ ft s}^{-1} &= 30.48 \text{ cm s}^{-1} \\ 1 \text{ mi min}^{-1} &= 60 \text{ mi hr}^{-1} = 88 \text{ ft s}^{-1} \end{aligned}$$

شتاب

$$\begin{aligned} 1 \text{ m s}^{-2} &= 10^2 \text{ cm s}^{-2} = 3.281 \text{ ft s}^{-2} \\ 1 \text{ ft s}^{-2} &= 30.48 \text{ cm s}^{-2} \end{aligned}$$

جرم

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg} &= 10^3 \text{ g} = 2.205 \text{ lb} \\ 1 \text{ lb} &= 453.6 \text{ g} = 0.4536 \text{ kg} \\ 1 \text{ amu} &= 1.660 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

نیرو

$$\begin{aligned} 1 \text{ N} &= 10^5 \text{ dyn} = 0.2248 \text{ lbf} = 0.102 \text{ kgf} \\ 1 \text{ dyn} &= 10^{-5} \text{ N} = 2.248 \times 10^{-6} \text{ lbf} \\ 1 \text{ lbf} &= 4.448 \text{ N} = 4.448 \times 10^5 \text{ dyn} \\ 1 \text{ kgf} &= 9.81 \text{ N} \end{aligned}$$