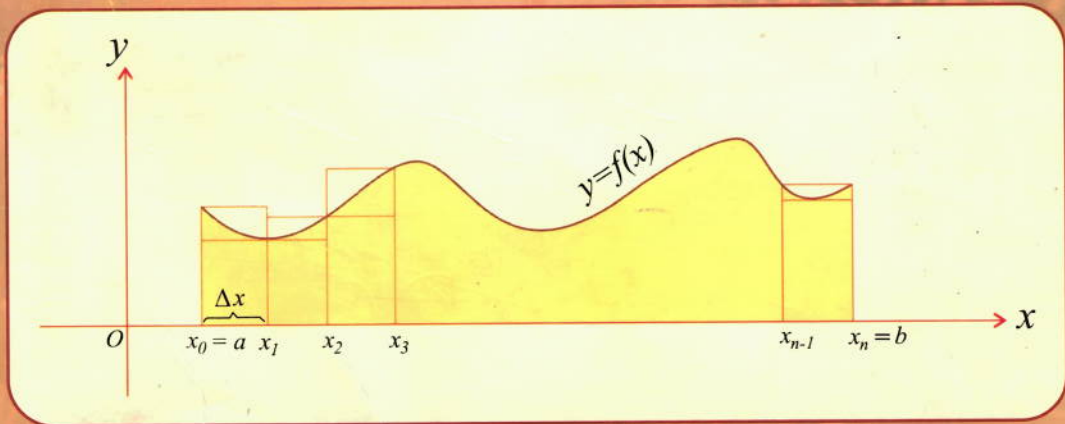


(نوی نصاب)

عمومي رياضي

له اووم ټولگې څخه تر دولسم ټولگې پورې



کوشي



اسحاق نيوتن



محمد بن موسی



اريتوستنس



ارشمیدس

مؤلف: استاد سردار محمد (خوږياڼی)

عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږيانی)



کتاب پښندنه

د کتاب نوم /

عمومي رياضي (نوی نصاب)

مؤلف /

سردار محمد (خوږياڼی)

ډيزاين /

الله يار تسلي

خپرنډوی /

ميهن خپرنډويه ټولنه

چاپکال /

۱۳۹۵ ال

چاپشمبر /

۱۰۰۰ ټوکه

آدرس

ميهن خپرنډويه ټولنه پېښور - جلال آباد

جلال آباد: اسحاقزی مارکیټ لاندې پور، لومړی دوکان

Email: Khorshidhimat@yahoo.com

Abdurashid.himat@gmail.com

Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱

۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له ميهن خپرنډويې ټولنې سره خوندي دي.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمه

الحمد لله الذي فهمنا بعلوم الاشياء والحوادث و علمنا بزيادات هم و التواقص و الصلوة و سلام على رسوله بفهم الانسان يشرع في الاعمال و المباحث.

اما بعد:

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهربانۍ باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه بشوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لنډیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی دغه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیگرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شويدي څو څو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غواړي که څه هم مونږ دا کتاب څو څو واره په غور سره کتلي او کمۍ او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود و، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار تالاشۍ چوک د حاجي زر خان پلازه

سردار محمد خوریانی

د نصرت عالي لېسې د ریاضاتو استاد

لیک لږ

حساب

اول فصل

1	حساب
1	د حساب د علم موضوع
1	د مکمل اعدادو سیټ
2	د طبیعي اعدادو سیټ
2	د حساب د علم د زده کړې غرض
2	د حساب اصطلاحات
2	واحد
2	عدد
4	ارقام
5	طبعي
6	د صحیح عددونو څلور ګوني عمليې
6	1- د صحیح عددونو جمع
8	2- د صحیح عددونو تفریق
10	3- د صحیح عددونو ضرب
12	اضافې معلومات
16	4- د صحیح عددونو تقسیم

دویم فصل

21	کسر
21	اعشار کسر
21	د اعشار کسر څلور ګوني عمليې
24	عام کسر
26	د کسرونو مقایسه
26	تجنیس
27	د کسرونو اختصار
33	د عام کسر څلور ګوني عمليې

37	کسر الکسر
39	د کسرونو تبادله
	دریم فصل
42	طاقت لرونکی عددونه
44	تجزیه
49	جذر
59	د اعدادو سیستمونه
60	د 2 په قاعده د اعدادو سیستم
61	د 5 په قاعده د اعدادو سیستم
	څلورم فصل
63	نسبت
83	تناسب
	پنځم فصل
72	فیصد
73	تخفیف
75	احدیت
76	ریحه
79	تنزیل
80	مشارکت
	شپږم فصل
84	سیت
84	د سیت د لیکلو طریقې
86	د سیت اقسام
86	د روابطو له مخې د سیتونو اقسام
89	د سیتونو عمليې
	الجبر
	اول فصل
93	الجبر
94	د الجبر اصطلاحات

95	پولينوم.....
97	د الجبري عددونو څلور گوني عمليې.....
100	د پولينومونو څلور گوني عمليې.....
102	د باقي مانده د عوه.....
104	ترکيبي تقسيم.....
	دويم فصل
106	مساوات.....
106	مطابقت.....
110	تجزيه.....
116	الجبري کسرونه.....
116	د الجبري کسرو خواص.....
117	د الجبري کسرونو جمع.....
117	د الجبري کسرونو تفريق.....
118	د الجبري کسرونو اختصار.....
118	د الجبري کسرونو تقسيم.....
119	د کسرونو گويا کول.....
122	قسمي کسرونه.....
	درېم فصل
127	معادله يا شرطيه مساوات.....
127	د معادلې اقسام.....
127	يو مجهوله اوله درجه معادله.....
128	د معادلې خواص.....
129	جذري معادلې.....
	څلورم فصل
133	دوه مجهوله معادلې.....
133	د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل.....
138	متریکس.....
139	د متریکس ډولونه.....
141	د متریکسونو جمع.....

141	د متريکس تفريق
143	د دوه متريکسونو ضرب
144	د يوه متريکس ترانسپوز متريکس
145	ديترمینانت
145	د ديترمینانت د حل طريقه
147	د ديترمینانت خواص
148	الحاقی متريکس

پنځم فصل

151	دويمه درجه يو مجهوله معادلی
152	د دويمه درجه يو مجهوله معادلې د عمومي شکل د حل طريقې
161	د جذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول
162	د دويمه درجه يو مجهوله معادلې د جذرو مطالعه کول
163	د دیکارت قاعده

شپږم فصل

173	غیر مساوات
173	د غیر مساوات خواص
175	د غیر مساوات اقسام
177	مطلقه قيمت
177	د بېنوم د اشارې خپل
183	د يو مجهوله غیر مساوات سیستم
184	د دوه مجهوله غیر مساوات
185	د دوه مجهوله غیر مساوات سیستم
185	د دوه مجهوله غیر مساوات د سیستم د حل طريقه
186	يو مجهوله دويمه درجه غیر مساوات
187	د دويمه درجه غیر مساوات د حل طريقه

اووم فصل

190	پارا متریک معادلې
-----	-------------------

اتم فصل

199	اکسپوننشل (نمائي) معادلې
-----	--------------------------

فہم فصل

203	لوگاریتمی معادلی
206	دقاعدی د بدللو فارمول
207	د لوگاریتم اقسام
208	دیوہ عدد د لوگاریتم پیدا کول
209	دیوہ او صفر تر منځ د کسرونو لوگاریتم
210	انتی لوگاریتم
211	انٹریولیشن
212	کولوگاریتم
213	د لوگاریتمی معادلو د حل طریقہ
	لسم فصل
220	توابع
221	د تابع اقسام
221	ناطقہ تابع
221	خطی تابع
222	د خطی تابع د تعریف ناحیه
224	د مستقیم کرني مېل
225	دمېل معادلہ
227	محوري معادلہ
231	پولینومی تابعگانی
	یوولسم فصل
233	دویمہ درجہ تابع
233	د دویمہ درجہ تابع گراف
233	د دویمہ درجہ تابع د گراف ترسیم
235	د گراف انتقال
248	هوموگرافیک تابع
248	متجانب
250	د هوموگرافیک تابع د گراف ترسیم
253	اکسپوننشل تابع
255	لوگاریتمی تابع

دولسم فصل

257	ردیف یا تصاعد
257	حسابي ردیف
257	د حسابي ردیف فارمول
259	حسابي ردیف ته د حدونو داخلول
260	هندسي ردیف
260	د هندسي ردیف فارمول
262	د هندسي ردیف خصوصیات
263	هارمونيکي ردیف
265	سلسلې
265	حسابي سلسله
265	د حسابي سلسلې فارمول
266	د مسلسلو عددونو فارمول
267	د جفتو عددو فارمول
267	د طاق عددونو فارمول
269	هندسي سلسله
269	د هندسي سلسلې فارمول

ديارلسم فصل

274	د رياضي استقراء
-----	-----------------

خوارلسم فصل

277	فکتوريل
279	د بېنوم قضيه

پنځلسم فصل

281	لیمیت
281	اتېروال
288	د لیمیت تعریف
284	د لیمیت د استعمال ځایونه
285	د لیمیت پیدا کول
287	په (∞) کې د یوې تابع لیمیت

288	د لیمیت قضیې
295	ابهام
295	د ابهام رفع کول
302	د مثلثاتي تابعگانو لیمیت
305	د تابعگانو متمادیت (اتصال)
305	متمادي تابع
305	غیر متمادي تابعگانې
306	د متمادیت شرطونه
307	د ښي لاس لیمیت
307	د چپ لاس لیمیت
309	د متمادي تابعگانو خواص
	شپاړلسم فصل
311	مشتق
312	منځنۍ یا وسطي تعبیر
313	د یوې تابع مشتق
314	د مشتق تعریف
315	د مشتق هندسي تعبیر
318	د مشتق قوانین
318	د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق
319	د دوه تابعگانو د حاصل جمع مشتق
320	د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق
321	د دوه تابعگانو د حاصل ضرب مشتق
322	د دوه تابعگانو د حاصل تقسیم مشتق
324	د جذري تابع مشتق
326	د مرکبې تابع مشتق
329	د مثلثاتي تابعگانو مشتق
333	ضمني مشتقات
334	د تابع دویم ضمنی مشتق
336	متوالي مشتقات

337	د مشتق د استعمال ځايونه
339	د يوې تابع بحراني ټكي
340	د انعطاف نقطه
343	د تابع د گراف د ترسيم طريقه
344	د انعطاف د نقطې پيدا كول
345	د دويمه درجه تابع گراف
348	هوموگرافيك تابع
351	د مجانب د ټاكلو عمومي لار
352	د دريمه درجه يوه مجهوله تابع گراف
355	د رول قضيه
357	د متوسط قيمت قضيه
358	د لوه پيټال قاعده
359	د بحراني ټكو تطبيق
	اولسم فصل
363	انتیگرال
363	د زېمان مجموعه
368	د انتیگرال مفهوم
368	د انتیگرال اقسام
368	غیر معین انتیگرال
369	د غیر معین انتیگرال خواص
373	معین انتیگرال
375	د معین انتیگرال خواص
382	د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې
385	په تعویضي طریقی سره د انتیگرال نیول
386	قسمي انتیگرالونه
387	د لوگاریتمي او اکسپوننشل تابعگانو مشتق
388	د اعشاري لوگاریتم مشتق
392	د معکوسو تابعگانو مشتق
392	د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق

394	قسمي کسرونه
396	د اکسپوننشل تابعگانو انتيگرالونه
397	د لوگاريتمي تابعگانو انتيگرال
401	د منحنی سطحی د مساحت پیدا کول
410	د کروي اجسامو د حجمو محاسبه
411	د انتيگرال پواسطه د گری د حجم پیدا کول
411	د انتيگرال پواسطه د مخروط د حجم پیدا کول
412	د انتيگرال پواسطه د بیضوي د حجم پیدا کول
416	د قوس د اوږدوالي محاسبه
419	تفاضلي معادلې
420	د ديفرينشيال ترتيب
420	د ديفرينشيال معادلې درجه
421	خطي ديفرينشيال معادلې
	احصائیه
	اتلسم فصل
425	احصائیه
425	د اطلاعاتو د راټولو طریقه
426	ټولنه او جامعه
426	تصادفي نمونه
426	تصادفي متحول او د ولونه یي
427	د فریکونسي جدول
427	انځوريز گراف يا تصويري گراف
428	مود
428	اوسط
429	د میجزا داتا گانو د کثرت جدول
429	د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه
430	ډله ایز (تجمعي) کثرت
430	نسبي کثرت
431	میله ايزي گراف

431	دمنکسري کرښي گراف
432	د گسسته يا غير متصلو داتاگانو اوسط
433	د جدول په مرسته د نښتو داتاگانو اوسط
434	د داتاگانو د گډې کولو طريقه
434	وسعت
434	د گډې اوږدوالي
434	ميله ټي گراف
434	د متصلو داتاگانو دسته بندي
435	وزني اوسط يا منځنۍ قيمت
436	مستطيلي گراف
437	دايروي گراف
438	ميانه
438	د تحول ساحه
439	د انحراف اوسط
440	د څو ضلعي فريکونسي گراف
441	د ساقۍ او پانۍ گراف
442	ربغۍ
443	صند وچه يي گراف
446	ربغي انحراف
446	وار يانس
448	معياري انحراف (مطلق تیتوالی)
450	د بدلون ضريب يا نسبي پراگنده گي
451	په نورمال منحني کې تیتوالی
452	د نورماله توزيع مشخصات
453	څو متحوله ټولنې
454	د پراگنده گي گراف
454	پېوستون او د پېوستون ضريب
456	د خطي مېلان معادله
459	د احتمال د تابع توزيع

461	د دوه جمله يي توزيع او د برنولي آزمایښت
462	د پواسن د احتمال توزيع
463	د نورمال توزيع
467	نمونه اخيستل
468	د نمونې د اوسط توزيع
	احتمالات
	نوولسم فصل
471	احتمالات
471	چانس
471	تصادفي پېښه
471	تجربوي احتمال
471	نظري احتمال
472	نسبي کثرت او احتمال
472	په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس
472	د يوې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه
474	د احتمال قاعدې
475	ونه ايز دياگرام
475	د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده
476	د ناڅاپي پېښو اتحاد
477	د ناڅاپي پېښو تقاطع
478	د سيټونو او مډل جوړونه
479	د شمېرنې اصل
480	ترتيب (پرموتېشن)
480	ترکيب
481	وريشن (تبدیل)
483	د بينوم قضيه
484	د دوه جمله يي احتمال
486	متمادي او غير متمادي فضاگانې
487	هم چانس پېښې

488	د متمدني فضاگانو احتمال
488	مشروط احتمال
493	د ناڅاپه پېښو استقلاليت
	شلم فصل
495	موهومي عددونه
496	د اعدادو سيټونه
497	د موهومي عددونو څلورگوني عمليي
498	صفرې مختلط عدد
498	د مختلطو عددونو څلورگوني عمليي
500	د مختلط عدد مزدوج
500	د مختلط عدد ضري معکوس
501	د يوه مختلط عدد د مزدوج خاصيت
505	د مختلطو عددونو دويم جذر پيدا کول
	يووېشتم فصل
507	د رياضي منطق
507	د رياضي استدلال
507	تمثيلي استدلال
507	استقرائي استدلال
509	استنتاجي استدلال
509	د جکم د نفی کولو استدلال
510	د رياضي منطق او د بيان استنتاج
510	د بيانونو ترکیب

حساب

بسم الله الرحمن الرحيم

اول فصل

رياضي

رياضي د رياض څخه اخیستل شویده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتی ده ریاض د روضه مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه یا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کیفیتو ، کمیتو ، تغیراتو ، ارتباطاتو او تاثیراتو څخه بحث کوي.

رياضي ډېرې څانگې لري لکه :

- | | | |
|----------|-----------|-------------|
| 1- حساب | 2- الجبر | 3- نجوم |
| 4- هندسه | 5- مثلثات | 6- علم هیئت |

او داسې نور.

څرنگه چې زمونږ د وطن په تعلیمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول لیکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شیان په دی کتاب کې لیکو.

1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايي او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې یوه عملیه اجراء کوي او مجهول عدد پیدا کوي.

د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سیټ دی .

د مکمل اعدادو سیټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وايي.



د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.



د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخیستل، خرڅول، په صحيح ډول د دواگانو ترکیب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غیر په فزیک، کیمیا، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي یوې دانې ته واحد وايي. لکه یو موټر، یوه طیاره یوه کبستی او داسې نور.

عدد:

واحد یا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي. لکه (1)، 13، 159 او داسې نور. عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د یوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه، 107 شاگردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسیمېږي جفت عددونه دي لکه 170، 532، 714، 326، 748 او داسې نور،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ویشل کېږي لکه: 3، 41، 587 او داسې نور.

5- لمړنې عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ویشل کېږي په نورو عددو پوره نه ویشل کېږي. لکه 2، 3، 5، 7 او داسې نور.

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دي. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273-192) ق م کی یې یونان کی ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړی ؤ

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پرېښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پرېښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کی پاتی شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

6- مرکب عددونه: هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کیږي مرکب عددونه بلل کیږي. لکه 4, 6, 8, 9, 10 او داسې نور.

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدات پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداونې 15، روپی.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم کړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج ویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ ، چې $\frac{3}{4} = 0.75$ او $\frac{2}{5} = 0.4$ کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مگر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ او داسې نور.

چې $\frac{1}{3} = 0.33\bar{3}$ او $\frac{1}{6} = 0.16\bar{6}$ کیږي.

c- غیر مختوم غیر متوالي کسر: که د یوه کسر صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي او د خارج قسمت رقمونه یې هم تکراري نه وي دی کسر ته غیر مختوم غیر متوالي کسر وایي لکه $\frac{13}{47}$ چې $0.276595744680851 \dots = \frac{13}{47}$ کیږي.

9- ناطق عدد: صحیح عدد، متوالي کسر او مختوم کسر ناطق عددونه دي. لکه $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غیر ناطق عدد: غیر مختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غیر ناطق عددونه دي لکه $\frac{11}{47}$ ، $\frac{13}{49}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د لیکنې سمبول ته رقم وایي.

په ډېرو ممالکو کې د اعدادو د لیکنې لپاره سمبولونه ټاکل شوي دي چې په هغه ممالکو کې استعمالیږي. مگر هغه رقمونه چې د نړۍ په زیاتو ممالکو کې استعمالیږي دري دي.

1- رومي رقمونه 2- هندو عربي رقمونه 3- اریک رقمونه.

1- رومي رقمونه:

د هندو عربيک رقمو تر لیکنې د مخه رومي رقمونه زیات استعمالیدل. اوس رومي رقمونه په کتابونو کې د مختلفو مقاصدو لپاره استعمالیږي. خو په حسابي او الجبري عملیو کې نه استعمالیږي. I د یو لپاره V د 5 لپاره X د 10 لپاره L د 50 لپاره C د 100 لپاره D د 500 لپاره او M د 1000 لپاره په سمبولیک ډول استعمالیږي.

که یو رقم دري واړه څنګ په څنګ ولیکل شي جمع کیږي لکه II دوه دي III دري دي که X درې واړه ولیکل شي (30) کیږي که L درې واړه ولیکل شي 150 کیږي که دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ ولیکل شي که د بني خوا عدد زیات و د چېې خوا عدد ور څخه منفي کیږي IV چې څلور دي IX نه دی XL = 40 دي XC = 90 دي او که د چېې خوا عدد زیات و د بني خوا عدد ورسره جمع کیږي.

VI = 6 ، VII = 7 او VIII = 8 دی XIX = 19 او CX = 110 ، LX = 60 دي CXXX = 130 او MDCXIX = 1619 دي.

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي، دې رقمونه شرقي رقمونه هم وایي. اریک رقمونه په لاتنډي ډول دي ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹.

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربيک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصريانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هنډیانو لیکل دي دغه رقمونه غربي رقمونه هم وایي. دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شوي دي.

1- معنی دار رقمونه 2- بی معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمونه معنی دار رقمونه وایي.

2- بی معنی رقم : صفر بی معنی رقم دی ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه 0000000

او که د عدد چې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیريږي او نه کمیږي.

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلې دي چې هر طبقه درې مرتبې ده هر طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شوي دي.

1- احدات طبقه	9- کوادريليون	17- اوکتيليون
2- زرو طبقه	10- کوادريليارد	18- اوکتيليارد
3- ميليون طبقه	11- کوينتيليون	19- نونيليون
4- ميليار دو طبقه	12- کوينتيليارد	20- نونيليارد
5- بيليون طبقه	13- سکستيليون	21- د سيليون
6- بيلياردو طبقه	14- سکستيليارد	22- د سيليارد
7- تريلون طبقه	15- سپتيليون	
8- تريليارد طبقه	16- سپتيليارد	

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شويدي يعنې تر تريليارد پورې طبقې استعمال شويدي.

د عدد لوستل : عدد د بڼې خوا څخه په طبقو ويشو او د چېې خوا څخه يې لولو اول د طبقې عدد لولو بيا د طبقې نوم اخلو. که طبقه يا مرتبه صفر وه نوم يې نه اخيستل کيږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ويل کيږي څلور سوه اوينځوس تريليارد درې سوه او اوه څلوېښت تريلونه اته سوه او پنځه ويشت بيليارد شپږ سوه او يو بيلونه دوه سوه او څلور دېرش بيليارد څلور ميلونه او اته سوه او يو.

د عددو ليکل : عدد د چېې خوا څخه ليکل کيږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کې ليکل کيږي که د کومې طبقې يا مرتبې نوم وانه خيستل شي پر ځای صفرونه ليکل کيږي لکه.

درې سوه څوارلس تريليارد اته تريلونه نه ويشت بيلونه يو سل او دولس ميلارد نه څلوېښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

د صحيح عددونو څلور گونې عمليې:

1- د صحيح عددونو جمع:

جمع په لغت کې يو ځای کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شيانو يو ځای کولو ته جمع وايي.

هغه عددونه چې جمع کيږي د جمع عوامل ورته وايي او هر عدد ته عامل وايي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتيجه کې لاس ته راځي د جمع حاصل ورته وايي.

د جمع د عمليې طريقه :

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د يويز مرتبو رقمونه جمع کوو که د جمع حاصل يې دوه رقمي شو لمړی رقم يې ليکو او دويم رقم يې دلسميز مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r}
 +456783456 \\
 789432187 \\
 \hline
 1246215643
 \end{array}$$

د جمع د عمليې میزان:

1- د جمع میزان په جمع:

عوامل د لاتدي خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحیح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 12349391 \\
 +7894321 \\
 2578092 \\
 1876978 \\
 \hline
 12349391
 \end{array}$$

2- د جمع میزان په تفریق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه یو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحیح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 -1165759 \\
 675974 \\
 \hline
 489785
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + 489785 \\
 675974 \\
 \hline
 1165759
 \end{array}$$

3- د جمع میزان په طرح نه:

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو. بیا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 + 5689247 \\
 7563785 \\
 \hline
 13253032
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$

$\frac{41}{41} = 1$

د جمع د عمليې اساسي اصول:

- 1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.
لکه:

$$\begin{array}{r} +451 \\ 238 \\ \hline 689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +238 \\ 451 \\ \hline 689 \end{array}$$

- 2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په گروپو ويشو د هر گروپ د جمع حاصل پيدا کوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

- 3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

- 4- د جمع د عمليې خنثی عنصر صفر دی.

- 2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقي ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچني عدد ته مفروق وايي. د مفروق منه څخه د مفروق د کمیدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.
د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يویز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يویز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې د لسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

د تفریق د عملیې میزان:

1- د تفریق میزان په جمع:

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شوی دی.

$$\begin{array}{r} +30368784 \\ 17987998 \\ \hline 48356782 \end{array} \quad \begin{array}{r} -48356782 \\ 17987998 \\ \hline 30368784 \end{array}$$

2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغی سوال صحیح حل شوی دی.

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ 1789756798 \\ \hline 6064564748 \end{array}$$

میزان

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ 6064564748 \\ \hline 1789756798 \end{array}$$

3- د تفریق میزان په طرح نه:

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو. او منفي کوو یې او په دریم طرف کې یې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو د دریم او څلورم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شوی دی.

$$\begin{array}{r} -43756832109 \\ 12898098734 \\ \hline 30858733375 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 7 \\ 5 \quad \times \quad 3+9=12 \\ 7 \end{array}$$

که د مفروق منډه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم و د مفروق منډه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.
د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منډه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ \underline{250} \\ 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

2- که مفروق منډه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ \underline{150} \\ 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منډه زیات شي د تفریق حاصل ډیریږي.

$$\begin{array}{r} -500 \\ \underline{200} \\ 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منډه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ \underline{200} \\ 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منډه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیز نه راځي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ \underline{200} \\ 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ \underline{250} \\ 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د مساوی عددونو د جمع لاندې طریقي ته ضرب وایي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فیه او د دویم عدد ته مضروب وایي. په مضروب فیه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وایي.

د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بيا د مضروب دويم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوی عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي

$$\begin{array}{r}
 \times 4587 \\
 \hline
 896 \\
 27522 \\
 41283 \\
 36696 \\
 \hline
 4109952
 \end{array}$$

د ضرب د عمليې ميزان:

1- د ضرب ميزان په تقسيم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ويشو که مضروب لاس ته راځي سوال صحيح حل شوی دی او يا د ضرب حاصل په مضروب ويشو که مضروب فيه لاس ته راځي سوال حل شوی دی.

2- د ضرب ميزان په طرح نه:

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو او ضربوو يې که د ضرب حاصل يې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو يې په دريم طرف کې يې ليکو بيا د راکړ شوی عدد د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو که د دريم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحيح دی.

$$\begin{array}{cc}
 & 0 \\
 0 & \times & 2 \\
 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 56783 \\
 \hline
 5238 \\
 454264 \\
 170349 \\
 113566 \\
 283915 \\
 \hline
 297429354
 \end{array}$$

د ضرب د عمليې اساسي اصول:

- 1- د اعدادو سمیت د ضرب د عمليې لاندې یو تړلی سمیت دی.
- 2- د ضرب عملیه د تبدیلی د قانون پیروي کوي.
- 3- د ضرب عملیه د اتحادی قانون پیروي کوي.
- 4- د ضرب عملیه د توزیعي خاصیت پیروي کوي.
- 5- د ضرب د عمليې ځنثی عنصر (1) دی.

اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصه الحساب کې لیکلي دي. مونږ د شاگردان د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدین محمد بن الحسین چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زیږیدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شوی دی اصلاً د لبنان و عامل په لبنان کې یو غړی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده:

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

یو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفریق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$

$$10 - 9 = 1$$

$$1 \times 7 = 7$$

$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 6 = 12$$

$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$

$$10 \times 4 = 40$$

$$10 - 6 = 4$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 4 = 8$$

$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

دیو رقمی او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو یو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې یې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه یې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$

$$16 \times 10 = 160$$

$$10 - 7 = 3$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$

$$15 \times 10 = 150$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 7 = 14$$

$$150 - 14 = 136$$

څلورمه قاعده:

د 10 او 20 ترمنځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد د يويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} 18 \times 3 &= 21 \\ 21 \times 10 &= 210 \\ 3 \times 8 &= 24 \\ 210 + 24 &= 234 \end{aligned}$$

پنځمه قاعده:

په 5، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه:

$$\begin{aligned} 5 \times 28 &= 10 \times 14 = 140 \\ 50 \times 36 &= 100 \times 18 = 1800 \\ 500 \times 32 &= 1000 \times 16 = 16000 \end{aligned}$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 ترمنځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} 7 \times 5 &= 35 \\ 35 + 59 &= 94 \\ 94 \times 10 &= 940 \\ 7 \times 9 &= 63 \\ 940 + 63 &= 1003 \end{aligned}$$

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسيز يې مساوي وي
 د يوه عدد يويز د بل عدد سره جمع کوو او په لسيز رقم کې يې ضربوو او 10 چنده کوو يې او د
 يويز رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.
 مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}68 + 3 &= 71 \\71 \times 6 &= 426 \\426 \times 10 &= 4260 \\4260 + 24 &= 4284\end{aligned}$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسيز مرتبې يې مختلفي وي.
 د کوچني عدد لسيز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د يويز مرتبې او د لوی عدد د لسيز
 مرتبې د ضرب حاصل ورسره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د ضرب حاصل
 ورسره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.
 مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}69 \times 2 &= 138 \\7 \times 6 &= 42 \\138 + 42 &= 180 \\180 \times 10 &= 1800 \\7 \times 9 &= 63 \\1800 + 63 &= 1863\end{aligned}$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}87 \times 3 &= 261 \\5 \times 8 &= 40 \\261 + 40 &= 301 \\301 \times 10 &= 3010 \\5 \times 7 &= 35 \\3010 + 35 &= 3045\end{aligned}$$

مثال: 47 او 95 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$

$$7 \times 9 = 63$$

$$380 + 63 = 443$$

$$443 \times 10 = 4430$$

$$7 \times 5 = 35$$

$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحيح عددونو تقسيم:

تقسيم په لغت کې ویشلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه عدد څخه د مساوي عددونو د تفريقولو لنډې طريقې ته تقسيم وايي. هغه عدد چه ویشل کيږي مقسوم بلل کيږي هغه عدد چې مقسوم پرې ویشل کيږي مقسوم عليه بلل کيږي په مقسوم عليه باندې د مقسوم د تقسيميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کيږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم عليه څخه کمه شي او په مقسوم عليه نه ویشل کيږي باقي بلل کيږي.

د تقسيم د عمليې طريقه:

د مقسوم عليه مرتبې شمېرو د مقسوم د چېپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوؤ د مقسوم عليه سره يې مقايسه کوو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ویشو يې حاصل يې په خارج قسمت کې ليکو په مقسوم عليه کې يې ضريو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې ليکو او منفي کوو يې. د تفريق د حاصل مخې ته د مقسوم يو رقم را کښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ویشو يې او که کم و خارج قسمت ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه يو بل رقم را کښته کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او يا د مقسوم عليه څخه کم شي دغې کمې شوي برخې ته باقي وايي.

456340189	56342
450736	8099
560418	
507078	
533409	
507078	
26331	

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم د عملیې میزان په ضرب:

خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

$$\begin{array}{r}
 \times 56342 \\
 8099 \\
 \hline
 507078 \\
 507078 \\
 00000 \\
 \hline
 450736 \\
 \hline
 456313858
 \end{array}$$

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه:

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.

$$\begin{array}{r}
 7+6=13 \\
 \begin{array}{cc}
 4 & \\
 8 & 2 \\
 & 4
 \end{array}
 \end{array}$$

نوټ: که د تقسیم عملیې باقی نه لرل او یا یې باقی تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

$\begin{array}{r l} 893001 & 4532 \\ 4532 & 197 \\ \hline 44980 & \\ 40788 & \\ \hline 39214 & \\ 31724 & \\ \hline 197 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 893001 & 197 \\ 788 & 4534 \\ \hline 1050 & \\ 985 & \\ \hline 650 & \\ 591 & \\ \hline 591 & \\ 394 & \\ \hline 197 & \end{array}$	
--	---	--

د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

- 1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازې باقی په هغه عدد کې ضربیږي. لکه:

$\begin{array}{r l} 300 & 50 \\ 280 & 7 \\ \hline 20 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 60 & 8 \\ 56 & 7 \\ \hline 4 & \end{array}$
---	---

- 2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازې باقی په هغه عدد تقسیميږي. مثال:

$\begin{array}{r l} 250 & 20 \\ 20 & 12 \\ \hline 50 & \\ 40 & \\ \hline 10 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 25 & 2 \\ 2 & 12 \\ \hline 5 & \\ 4 & \\ \hline 1 & \end{array}$
--	--

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده.
مثال:

$$\begin{array}{r|l} 3280 & 80 \\ \hline 320 & 41 \\ \hline 80 & \\ 80 & \\ \hline xxx & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 80 \\ \hline 160 & 25 \\ \hline 400 & \\ 400 & \\ \hline xxx & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1280 & 80 \\ \hline 80 & 16 \\ \hline 480 & \\ 480 & \\ \hline xxx & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +1280 \\ 2000 \\ \hline 3280 \end{array}$$

4- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

$$\begin{array}{r} -2000 \\ 1280 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 720 & 80 \\ \hline 720 & 9 \\ \hline xxx & \end{array}$$

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $50 \times 48 = 2400$ په 6 ویشل کیږي.

$$\begin{array}{r|l} 2400 & 6 \\ \hline 24 & 400 \\ \hline 00 & \end{array}$$

تمرین:

- 1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دویم مجموعه 105 ده د دویم او دریم مجموعه 135 ده عددونه پیدا کړئ؟
- 2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.
- 3- د دوه ښارو تر منځ فاصله 900km ده یو موټر د یو ښار څخه د 85km په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانیږي او دویم موټر د دویم ښار څخه د 95km په سرعت اول ښار ته روانیږي وواياست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.
- 4- عبدالوهاب دوه تانه رخت له یوه جنسه یو په 9000Rs او بل په 10500Rs واخیستل د تانویو فرق 5 متره دی وواياست چې هر تان څو متره دی.
- 5- یو سړي دوه بوجۍ ممیز له یوه جنسه یو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ یې په 31500Rs واخیستل که د بوجیو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پیدا کړئ؟
- 6- دوه طیارې له یوه میدان څخه په یوه وخت کې پرواز کوي د یوې سرعت 500km/h او د بلې سرعت 750km/h دی یوه د شرق او بله د غرب خواته چې پس له 2 ساعتو به یې په منځ کې فاصله څومره شي؟
- 7- یو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي یو د شمال خواته او بل جنوب خواته څي د یوه سرعت 70km/h او د بلې سرعت 90km/h دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله 960km شي.

دویم فصل

کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وايي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وویشل شي دې عمليې ته کسر وايي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر 2- عام کسر

1- اعشار کسر:

که واحد په 10 یا د 10 په طاقت وویشل شي دې کسر ته اعشار کسر وايي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ویشل شوی دی او 3 برخې ور څخه اخیستل شوی دی.

0.13 واحد په 100 برخو ویشل شوی دی او 13 برخې ترې اخیستل شوی دی. 0.007 واحد په 1000 برخو ویشل شوی دی او 7 برخې ور څخه اخیستل شوی دی.

د اعشار کسر څلور ګوني عمليې:

1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بیا یې د صحیح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +7678.3 \\ +87965.38 \\ \hline 6845.83 \\ 120852.83 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د جمع د میزان غونډې دي.

2- د اعشار کسر تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بیا یې د صحیح عددو د تفریق په شان تفریقوو.

$$\begin{array}{r} -1467.23 \\ -5345.87 \\ \hline 894.85 \\ 2586.885 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د تفریق د میزان غونډې دي.

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو. د صحیح عددونو د ضرب په شان یې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بیلوو د را کي شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r}
 4563.85 \\
 \times 3278.3 \\
 \hline
 1369155 \\
 3651080 \\
 3194695 \\
 912770 \\
 1369155 \\
 \hline
 14961669.455
 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د ضرب د میزان غونډې دی.

4- د اعشار کسر تقسیم:

د اعشار کسر تقسیم په درې حالتو کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاریه وي او په مقسوم علیه که نه وي.

لکه

$$\begin{array}{r}
 4587.5 \quad | \quad 345 \\
 \hline
 \end{array}$$

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو کله چې اعشاریې ته ورسیږو اعشاریه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عمليې ته تر درې اعشاري رقمو پوري ادامه ورکوو.

4587.5	345
345	13.297
1137	
1035	
1025	
690	
3350	
3105	
2450	
2415	
35	

2- حالت: چې په مقسوم عليه کې اعشاريه وي په مقسوم کې نه وي لکه:

7562	34.2
------	------

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ېږدو او د صحيح عدد د تقسيم په شان يې تقسيموو که باقي وکړل باقي ته صفر ېږدو او خارج قسمت کې اعشاريه ېږدو تر درې اعشاري رقمو پورې يې تقسيموو.

756920	347
--------	-----

3- چې په مقسوم او مقسوم عليه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالتونه موجود دي.
الف: چې د مقسوم او مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وي لکه:

7843.82	9.23
---------	------

د مقسوم او مقسوم عليه دواړو څخه اعشاريه حذفوو د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو که عمليې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ېږدو او په خارج قسمت کې اعشاريه ليکو تر درې اعشاري رقمو پورې يې تقسيموو.

784382	923
--------	-----

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زيات او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234	85.7
---------	------

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاريه مخ ته وړو بيا يې د اعشار کسر د تقسيم د اول حالت په څير تقسيموو.

$$\begin{array}{r} 857 \\ 8452.34 \overline{) } \end{array}$$

ج. چې د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زيات وي لکه.

$$\begin{array}{r} 0.456 \\ 87635.3 \overline{) } \end{array}$$

د مقسوم او مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخي ته صفرونه ږدوو.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 87635300 \overline{) } \end{array}$$

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو.

ميزان يې د صحيح عددونو د تقسيم د ميزان غوندي دی.

2- عام کسر:

که واحد د 10 او 10 د طاقت څخه په غېر په نورو عددو وويشل شي دی کسر ته عام کسر وايي لکه $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{11}$ ، $\frac{7}{99}$ ، $\frac{4}{101}$ ، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام کسر په څلور قسمه دی.

1- اصل کسر يا واقعي کسر

2- واحد کسر

3- غېر واجب کسر

4- واجب کسر يا کسري عدد يا مخلوط کسر

1- واقعي کسر: هغه کسر دی چې صورت يې له مخرج يې ډېر وي.

لکه $\frac{5}{13}$ ، $\frac{7}{19}$ ، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد کسر: هغه کسر دی چې صورت او مخرج يې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$ ، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

3- غیر واجب کسر: هغه کسر دی چې صورت یې ډېر او مخرچ یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې د یوه صحیح عدد او یوه اصل کسر څخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.
غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وايي. طریقه یې داسې ده چې مخرچ په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرچ یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وايي. طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرچ ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \hline 25 & 5 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

تمرین:

1- غیر واجب یې کړئ؟

$$1- 5\frac{3}{4} \quad 2- 11\frac{6}{7} \quad 3- 8\frac{2}{5} \quad 4- 9\frac{1}{8}$$

2- تصحیح یې کړئ؟

$$1- \frac{19}{3} \quad 2- \frac{48}{5} \quad 3- \frac{77}{8} \quad 4- \frac{46}{11} \quad 5- \frac{117}{11}$$

د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرونه یې مساوي وي لکه:

$$\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوؤ.

تجنیس:

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عمليې ته تجنیس وايي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 9}{7 \times 9} = \frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63} > \frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$$

تمرین:

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

$$1 - \frac{6}{11} \text{ او } \frac{9}{16} \quad 2 - \frac{7}{9} \text{ او } \frac{8}{11} \quad 3 - \frac{2}{5} \text{ او } \frac{3}{7} \quad 4 - \frac{5}{7} \text{ او } \frac{7}{9} \text{ او } \frac{9}{11}$$

د کسرونو اختصار:

اختصار په لغت کې لنډولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرچ په یوه عدد ویشلو ته اختصار وايي.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرچ په (3) ویشو.

$$\frac{\frac{4}{12}}{\frac{15}{5}} = \frac{4}{5}$$

صورت او مخرچ په 7 ویشو.

$$\frac{\frac{5}{35}}{\frac{63}{9}} = \frac{5}{9}$$

صورت او مخرچ په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\frac{5}{20}}{\frac{120}{24}} = \frac{5}{6}$$

صورت او مخرج په 12 ویشو او بیا یې په (2) ویشو.

$$\frac{\frac{10}{120}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسیم د قابلیتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقم صفر یا جفت وي په (2) ویشل کیږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد رقمو مجموعه په 3 ویشل کیدله دا عدد په (3) ویشل کیږي.

لکه 11124، 1032، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقمونه صفرونه وه یا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ویشل کیږي نو دا ټول په څلور ویشل کیږي. لکه 300، 712، 520، 316، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقم صفر یا 5 وي دا عدد په 5 ویشل کیږي لکه 310، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 2 او 3 ویشل کیدلو دا عدد په (6) هم ویشل کیږي لکه 312، 414، 276، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په (7) ویشل کیږي.

لکه: 359156 په 7 ویشل کیږي او که نه:

$$\begin{array}{r} 359156 \\ 12 \\ \hline 35903 \\ 6 \\ \hline 3584 \\ 8 \\ \hline 350 \end{array}$$

- څرنگه چې 350 په 7 ویشل کېږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کېږي.
- 7- په (8) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کېدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کېږي.
لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.
- 8- په (9) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کېدله نو دا عدد په 9 ویشل کېږي.
لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.
- 9- په 10 باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کېږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.
- 10- په 11 باندې د ویش قابلیت : د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو د بل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کېږي.
لکه : 558998
- 11- په 12 باندې د ویش قابلیت : که یو عدد په 3 او 4 ویش کېدلو دا عدد په 12 هم ویشل کېږي لکه 8016
- 12- په 13 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کېدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کېږي.
لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.
- 13- په 17 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کېږي.
لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

14- په 19 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد په لاس راغی چې په 19 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 19 ویشل کیږي لکه (871701) او داسې نور.

15- په 23 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متبقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ویشل کیږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي درې چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ویشل کیدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ویشل کیږي.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ویشل کیږي لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد په په لاس راغی په 37 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 37 ویشل کیږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ویشل کیږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کېږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ټول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کېږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کېږي لکه 13383825 ، 24220311 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کېږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کېږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر و نو دا عدد په 67 ویشل کېږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

26- په 71 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي اوه چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو که د عمليې په اخر کې که صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ویشل کېږي نو دا ټول په 71 ویشل کېږي.
لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي عدد 22 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که د عمليې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ویشل کېدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ویشل کېږي.
لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي 8 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو که د عمليې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 79 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 79 ویشل کېږي.
20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي 25 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخري عدد په 83 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 83 ویشل کېږي.
لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفو د حذف شوي (9) چنده د متبقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ویشل کېدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ویشل کېږي.
لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسیم قابلیت: لمړی رقم حذفو د حذف شوي عدد 29 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخري عدد صفر شو او یا داسې یو عدد شو چې په 97 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ویشل کېږي.
لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

د عام کسر څلور گوني عمليې

1- د عام کسر جمع او تفریق:

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرچ مشترک پیدا کوو مخرچ مشترک د هر کسر په مخرچ ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرچ مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو. او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي. خود مخرچ مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پېژندل ضرور دي. مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه: مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وايي.

$$4\frac{5}{9} + 3\frac{7}{9} + 8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9} + \frac{34}{9} + \frac{80}{9} = \frac{41 + 34 + 80}{9} = \frac{155}{9} = 17\frac{2}{9}$$

155	9
9	17
65	
63	
2	

$$19\frac{3}{5} - 8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5} - \frac{44}{5} = \frac{98 - 44}{5} = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5}$$

54	5
5	10
4	

2- متداخل مخرجونه: هغه مخرجونه دي چې لوي مخرچ په کوچني مخرچ پوره تقسیم شي لکه:

$$5\frac{7}{12} + 8\frac{3}{4} + 7\frac{5}{6} + 8\frac{1}{2}$$

مخرج مشترک یې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12} + \frac{35}{4} + \frac{47}{6} + \frac{17}{2} = \frac{67 + 105 + 94 + 102}{12} = \frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12} = 30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ 36 & 30 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8} - 4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8} - \frac{19}{4} = \frac{93 - 38}{8} = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ 48 & 6 \\ \hline 7 & \end{array}$$

3- متوافق مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کېږي لکه $8\frac{5}{9} + 7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک یې په ذواضعاف اقل پيدا کېږي.

$$15\frac{5}{6} - 7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ 96 & 8 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$2 \left\{ \frac{95}{6} + \frac{31}{4} = \frac{190 - 93}{12} = \frac{97}{12} = 8\frac{1}{12} \right.$$

4- متباين مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3} + 7\frac{3}{4} + 7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک یې په حاصل ضرب پيدا کېږي.

$$\frac{29}{3} + \frac{31}{4} + \frac{37}{5} = \frac{580 + 456 + 444}{60} = \frac{1480}{60} = 24\frac{40}{60} = 24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1480 \\ 120 \\ \hline 280 \\ 240 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ 24 \\ \hline \end{array}$$

$$19\frac{1}{2} - 8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2} - \frac{26}{3} = \frac{117 - 52}{6} = \frac{65}{6} = 10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ 6 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 10 \\ \hline \end{array}$$

تمرین :

لاڻدي سوالونہ حل ڪري

$$9\frac{4}{11} + 8\frac{5}{11} + 4\frac{7}{11} \quad 1.$$

$$12\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3} \quad 2.$$

$$9\frac{5}{6} + 4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} \quad 3.$$

$$14\frac{5}{8} - 7\frac{1}{2} \quad 4.$$

$$6\frac{2}{9} + 4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} \quad 5.$$

$$8\frac{1}{4} - 3\frac{5}{6} \quad 6.$$

2- د عام ڪسر ضرب :

ڪه ڪسرونه واجب وه غير واجبوو يي بيا صورت په صورت ڪي او مخرج په مخرج ڪي ضربوو.

$$-9\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{4}$$

$$\frac{29}{3} \times \frac{21}{4} = \frac{29 \times 21}{3 \times 4} = \frac{609}{12} = 50 \frac{9}{12} = 50 \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r} 609 \\ 60 \quad \overline{) 12} \\ 9 \end{array}$$

تمرین:

لاڻدي سوالونه حل ڪري؟

$$12 \frac{3}{4} \times 8 \frac{7}{9} - 1$$

$$6 \frac{1}{8} \times \frac{11}{13} - 2$$

$$2 \times 4 \frac{3}{4} - 3$$

$$6 \frac{1}{8} \times 7 - 4$$

3- د عام ڪسرتقسيم:

ڪه ڪسرونه واجب وه غير واجبوو يي. بيا د تقسيم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم عليه سرچپه ڪوؤ.

$$19 \frac{1}{2} \div 3 \frac{1}{8} - 1$$

$$\frac{39}{2} \div \frac{25}{8} = \frac{39}{2} \times \frac{8}{25} = \frac{312}{50} = 6 \frac{12}{50} = 6 \frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r} 312 \\ 300 \quad \overline{) 50} \\ 12 \end{array}$$

$$8 \frac{1}{4} \div \frac{2}{3} - 2$$

$$\frac{33}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{99}{8} = 12 \frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 8 \quad \overline{) 12} \\ 19 \\ 16 \\ 3 \end{array}$$

$$15\frac{4}{9} \div 3 = 5\frac{4}{27}$$

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ 135 & 5 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$$

تمرین:

$$20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6} = 2$$

$$41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5} = 13$$

$$16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = 24$$

$$111 \div 1\frac{1}{2} = 74$$

$$14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3} = 8\frac{4}{5}$$

کسر الکسریا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسروي لکه:

$$\frac{7}{8}, \frac{5}{3}, \frac{2}{4}, \frac{11}{13}$$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3 \times 1}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3 \times \frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$$

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفینو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطینو حاصل ضرب په مخرج کې لیکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}} = \frac{1 \times 2}{3 \times 7} = \frac{2}{21}$$

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{4 \times 5}{3 \times 1} = \frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}} = \frac{7 \times 13}{8 \times 11} = \frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسرونه وایي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرین: لاندې کسرونه ساده کړئ؟

$$-1 \quad \frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$$

$$-2 \quad \frac{9\frac{1}{8} + 5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$$

$$-3 \quad \frac{11\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$$

$$-4 \quad \frac{4\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4} \div 2\frac{1}{3}}$$

$$-5 \quad \frac{6 + 7\frac{1}{2}}{9 - 3\frac{1}{4}}$$

$$-6 \quad \frac{\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} \div \frac{1}{4}}$$

د کسرونو تبادله :

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرچ ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوي؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

40	5
40	0.8
4	

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوي؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\bar{6}$$

10	6
6	0.16
40	
36	
4	

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوي؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

30	8
24	0.375
60	
56	
40	
40	
xx	

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندې خط کشو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاري د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وویي.

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \cancel{15} \\ \cancel{75} \\ 0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8} \end{array}$$

2- مثال: $0.\bar{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شوی دی د 0.3 لاندې خط کښوونکي صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10} = \frac{3 \times 3 + 1}{10 \times 3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال: 0.16 عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100} = \frac{16 \times 6 + 4}{100 \times 6} = \frac{96 + 4}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$

2- $\frac{3}{5}$

3- $\frac{7}{8}$

4- $\frac{5}{6}$

5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$

2- $0.\overline{73}$

3- $0.95\overline{45}$

4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$

6- $0.4\overline{16}$

7- $0.9\overline{1}$

8- $0.8\overline{14}$

عبارتي سوالونه:

- 1- احمد د یوې هنداونۍ $\frac{3}{7}$ برخه واخیسته پاتې شوي برخه یې پیدا کړئ؟
- 2- د تیلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د 200li گنجایش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تیل څومره وي؟
- 3- د غوړیو د بیلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړیو څخه ډکه ده د ډکې برخې دریمه برخه یې $30kg$ ده د بیلر گنجایش څو دی؟
- 4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپۍ یې چای د $700\frac{3}{4}$ روپۍ غوښه $30\frac{1}{2}$ روپۍ یې مالګه او اورلګیت واخیست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟
- 5- امین $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخیسته که غوښه کیلو ګرام په $300\frac{1}{4}$ روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخیستي دي؟
- 6- چای خرڅوونکي د چایو یو پیټۍ چې $50kg$ چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چای عمود ته یې $3\frac{1}{4}kg$ چای او یو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کیلو ګرام چای واخیستی ووست چې په پیټۍ کې څومره چای پاتې دی؟

دويم فصل

طاقت، تجزيه او جذر

طاقت لرونکي عددونه:

هغه عددونه دي چې څو وار په خپل ځان کې ضرب شوي وي لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربېږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايي او د ضربېدو کړتو ته توان وايي.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

د طاقت قوانین:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي. د قاعدو څخه يوه قاعده لیکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفې او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربېږي او د توانو څخه يو توان راځلي.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه يوه قاعده لیکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مختلفې او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې يو پر بل لیکو او د توانو څخه يو توان راځلي.

$$1 - \frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$$

$$2- \frac{16^7}{12^7} = \left(\frac{16}{12}\right)^7 = \left(\frac{4}{3}\right)^7$$

$$3- \frac{5^8}{3^8} = \left(\frac{5}{3}\right)^8$$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه یې ضربیږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر یو کیږي.

$$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

$$5^3$$

$$\frac{5^3}{5^3} = 1 \dots \dots \dots I$$

$$5^3$$

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \dots \dots \dots II$$

د I او II رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي. یعنې د $5^0 = 1$ کیږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرګ ته یا د مخرګ څخه صورت ته ویول شي د توان علامه یې تغیر خوري.

$$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$$

$$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$$

$$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

$$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

تجزیه :

تجزیه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوه مرکب عدد د ضربی عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وايي.
د تجزیه طریقه:

عدد لیکو خط یې لاندې کښوو چېپې خواته یې عمودي خط رسموو د عمودي خط چېپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د راګر شوي عدد په ضربی عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راګر شوی پدې لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو په همدې ترتیب عملیې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوو ترڅو چې د عدد په ستون کې یو لاس ته راشي. د عمودي خط د چېپې خوا عددونه د راګر شوي عدد ضربی عوامل دي.

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزیه کړئ؟

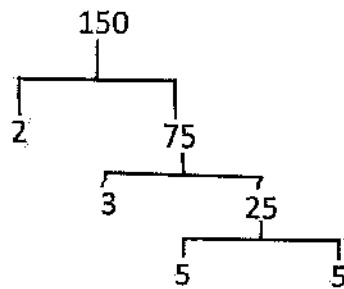
3	55125
3	18375
5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

د دیاگرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسی ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول د مرکب عدد ضربی عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاگرام په طریقه تجزیه کړئ؟



$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم: د څو عددو لوی مشترک قاسم هغه عدد دی چې تر هغه په بل لوی عدد باندي دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچنی مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندي تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی. ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندي ویشل شي.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول: عددونه تجزیه کوو په ضربی عواملو کې یې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو په مشترکو ضربی عواملو کې د کوچنی توان والا ضربی عوامل راځلو ضربووي لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربی عواملو کې د لوی توان والا ضربی او غیر مشترک ضربی عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	150
3	75
5	25
5	5
	1

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

2	840
2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

تمرین :

د لاندې عددونو ل مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 450 او 630

2- 540 او 780

3- 660 او 960

5- 1260 او 1440

د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچنی عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقی وکړي مقسوم علیه په باقی ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقی صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دي

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 1080 \\
 780 \\
 \hline
 300
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 780 \\
 1 \\
 \hline
 180
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 780 \\
 600 \\
 \hline
 180
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 300 \\
 180 \\
 \hline
 120
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 300 \\
 180 \\
 \hline
 120
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 180 \\
 120 \\
 \hline
 60
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 180 \\
 120 \\
 \hline
 60
 \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي.

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پیدا کوؤ.

$$L.C.M = \frac{780 \times 1080}{60} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

په یوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه په یوه کرښه کې لیکو خط ور لاندې کښوو چېپې خواته یې عمودي خط رسموو د عمودي خط چېپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د دوي په ضربې عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو تر هغو پورې عملیې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په یوه عدد ویشل کېږي د عملیې په اخر کې که د عمودي خط د چېپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	780	1080
2	390	540
3	195	270
5	65	90
	13	18

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرین:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

د لاندې عددونو کوچني مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 1530 او 960

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر:

جذر په لغت کې ولی، رېښه یا جرړې ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر: هغه عدد دی چې د (2) په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي. لکه:

$$1- \sqrt{64} = 8$$

$$8^2 = 64$$

$$2- \sqrt{169} = 13$$

$$13^2 = 169$$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د درې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $4^3 = 64$ کیږي.

د دویم جذر پیدا کول:

د یوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه 2- په عمومي طریقه

1- د تجزيې پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد تجزيه کوو په مساوي ضربي عواملو کې دوه ، دوه جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راځلو او ضربوو يې د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \left(\begin{array}{r|l} 2 & 324 \\ \hline 2 & 162 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$324 = 2 \times 3^2$$

د يوه عدد د دريم جذر پيدا کول په

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل ټي درې، درې جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راځلو ضربوو يې د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \left(\begin{array}{r|l} 2 & 1000 \\ \hline 2 & 500 \\ \hline 2 & 250 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوو، د هرې جوړې څخه یو عدد رااخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \left(\begin{array}{r|l} 2 & 1296 \\ 2 & 648 \\ 2 & 324 \\ 2 & 162 \\ 3 & 81 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزيې پواسطه، پنځم، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو بنسټ خواته یې د تقسیم علامه او چېې خواته یې یو عمودي خط رسموو بیا د عدد د بنسټ خوا څخه دوه، دوه مرتبې جوړه کوو اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتي شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چېې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخري جوړې یا اخري عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څیر یې استعمالوو د عمودي خط د چېې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ور څخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکیني عدد مخې ته او د عمودي خط د چېې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چېې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکیښته کوو د عمودي خط د چپې نوي رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$$\sqrt{209764} = 458$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & \overline{20\ 97\ 64} \\ 85 & \underline{16} \\ 805 & \underline{497} \\ & \underline{425} \\ & \underline{7264} \\ & \underline{7264} \\ & \text{XXXX} \end{array}$$

$$\sqrt{502681} = 709$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & \overline{50\ 26\ 81} \\ 1409 & \underline{49} \\ & \underline{12681} \\ & \underline{12681} \\ & \text{XXXX} \end{array}$$

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$

2- $\sqrt{318096} = ?$

3- $\sqrt{734449} = ?$

4- $\sqrt{2047.5625} = ?$

5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

تقریبي جذر:

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شوی دی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه 2- د اوسط په طریقه

1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوو که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

3	128968	359.1
65	9	
709	389	
7169	325	
	6468	
	6381	
	8600	
	7169	
	1431 باقي	

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنیو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راځي شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې و نو جذر يې د کوچنی عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راځي شوي عدد تقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې درې (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

$$\frac{2.5 + 2}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25$$

2.25 د 5 تقریبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقریبي 2.25 جذر دی د 7 او 8 تقریبي جذر 2.75 دی.

د اعشاري عدد دویم جذر پیدا کول:

صحيح عدد يې د نېټې خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه يې د چپې خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه يې طاق وي مخې ته يو صفر ږدو. کله چې د اعشاري يې د علامې څخه اوږو اعشاريه خارج قسمت ته وږو.

مثال: 903.6036 دویم جذر پیدا کړئ؟

3 6006	$\overline{9} \overline{03.6036}$ 9 036036 36036 XXXXX	$\overline{30.06}$
-----------	--	--------------------

تمرین:

لاندې عددو تقریبي جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

4716 -1 35811 -2 7504 -3 9814 -4 6763 -5

2- د لاندې عددو تقریبي جذر د اوسط په طریقه پیدا کړئ؟

11 -1 13 -2 19 -3 29 -4 34 -5

3- د لاندې اعشاري عدد دویم جذر پیدا کړئ؟

457.96 -1 1229.9049 -2 337444.81 -3 48830.25 -4
 2605.0816 -5 64.048009 -6 2711.2849 -7

د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفې وي. که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو یې بدلون د طاقت قوانین پرې تطبیقوو اخري عدد بیرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي. د طاقت د قوانینو سره سم کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[7]{30}$$

$$2^{\frac{1}{7}} \times 3^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{1}{7}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{7}} = 30^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{30}$$

3- که دوه جذري عددونه د تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفې وي د طاقت د قوانینو په اساس کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي د طاقت د قوانینو سر سم یې تر یوه جذر لاندې لیکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي.

$$(\sqrt[7]{5})^7 = 5$$

$$(\sqrt[7]{5})^7 = \left(5^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 5^{\frac{1}{7} \times 7} = 5^1 = 5$$

6- که یو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانینو سره سم یې تر یوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left\{ \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2}$$

تمرین:

تر یوه جذر یې لاندې کړئ؟

$$\sqrt[3]{2} - 3$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} - 2$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{3} - 1$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}} - 5$$

$$\sqrt[9]{5} - 4$$

د حسابي افادو د قیمت پیدا کول:

حسابي افاده: که په یوه حسابي جمله کې څو عمليې (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قیمت د پیدا کولو لپاره لمرې طاقت او جذر د منځه وړو بیا قوسونه خلاصوو دریم قدم کې د ضرب او تقسیم عمليې او په اخر د جمع او تفریق عمليې اجراء کوو.

قوس: یو سمبول دی چې څو عددونه تر یوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي:

1- کوچنې قوسونه چې شکل یې () دی.

2- منځنۍ قوسونه چې شکل یې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل یې [] دی.

مثال:

$$(8 - 11)(4 - 5) + 8 - 2 \div 2 - 11$$

$$-3(-1) + 8 - 1 - 11$$

$$3 + 8 - 12$$

$$11 - 12 = -1$$

هم درجه کول:

که خو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندې عددونه مختلفې او درجې يې هم مختلفې وي که وغواړو چې تر یوه جذر يې لاندې کړو لمړی يې هم درجه کوو. طریقه يې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د هماغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt{2} \times \sqrt[5]{3}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل: لمړی يې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[10]{2^5 \times 3^2} = \sqrt[10]{32 \times 9} = \sqrt[10]{288}$$

2- $\sqrt[7]{2}$ هم درجه يې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}} = \sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین: هم درجه يې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} - 4$$

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[4]{5} - 3$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} - 2$$

$$\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} - 7$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} - 6$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}} - 5$$

د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

هغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوی وي او د جذر درجې يې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

$$(7 + 11 + 6)\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

$$24\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

$$(24 - 15)\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$$

$$2- 20\sqrt{2} + 5\sqrt{8} + 7\sqrt{128} + 5\sqrt{32} \text{ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟}$$

$$5\sqrt{16 \times 2} + 7\sqrt{64 \times 2} + 5\sqrt{4 \times 2} - 20\sqrt{2}$$

$$5 \times 4\sqrt{2} + 7 \times 8\sqrt{2} + 5 \times 2\sqrt{2} - 20\sqrt{2}$$

$$(20 + 56 + 10 - 20)\sqrt{2} = 66\sqrt{2}$$

تمرین:

لاندې جذري عددونه جمع او تفریق کړئ؟

$$1- 11\sqrt{5} + 19\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 25\sqrt{5}$$

$$2- \sqrt{128} + 3\sqrt{8} - 5\sqrt{32}$$

$$3- 13\sqrt{27} + 5\sqrt{243} - 20\sqrt{3}$$

گویا کول:

که د یوه کسر په صورت یا مخرګ کې جذري حد یا عدد موجود وي کولای شو چې گویا یې کړو. مګر مشهور په ریاضي کې د مخرګ گویا کول دي د کسر د مخرګ گویا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرګ کې یو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه یې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$.

صورت او مخرګ د مخرګ په جذري عدد کې ضربوؤ.

$$\frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15} \times \sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}} = \frac{5\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرګ کې یو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه ډېره وي

لکه $\frac{3}{\sqrt[3]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرګو د گویا کول لپاره صورت او مخرګ د مخرګ په جذري عدد کې ضربوو د جذر درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}} = \frac{2}{\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{12^4}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12 \times 12^4}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}} = \frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین: گویا یې کړی؟

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{\sqrt{2}} - 5 & \frac{15}{\sqrt{5}} - 4 & \frac{14}{\sqrt{7}} - 3 & \frac{3}{\sqrt{12}} - 2 & \frac{2}{\sqrt{6}} - 1 \\ \frac{2}{\sqrt[3]{2}} - 10 & \frac{14}{\sqrt[5]{7}} - 9 & \frac{12}{\sqrt[5]{3}} - 8 & \frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}} - 7 & \frac{2}{\sqrt[3]{6}} - 6 \end{array}$$

د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شويدي نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کېږي.

مثلاً 5918 یو عدد راګر شويدي د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چې رقمونه یې څلور دي نو راګر شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو.

$$5918 + 5000 + 900 + 10 + 8$$

$$= 5 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

که ضربونه څنګ په څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي. همدغه ډول که راګر شوی عدد په مسلسل توګه په 10 وویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته ځواته ولیکو. او بیا د باقیاتو د ستون رقمونه په اټقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي. او نور رقمونه یې په ترتیب سره ورپسې ولیکل شي بیرته راګر شوی عدد لاس ته راځي.

10	5918	
10	591	8
10	59	1
10	5	9
	0	5

$$5918_{10} = 5918$$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپيوټري معایناتو کې د امراضو د تشخیص لپاره دوه نور سیستمونه هم لیکل شوي دي چې د 2 په قاعده د اعدادو سیستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سیستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سیستم:

که وغواړو چې یو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ویشو باقیات یې د تقسیم د عمليې په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته لیکو که د باقیاتو د ستون رقمونه په افقي ډول ولیکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوی؟

2	31	
2	15	1
2	7	1
2	3	1
2	1	1
	0	1

$$31_{10} = 11111_2$$

یا دا چې د طاقت د قوانینو څخه استفاده کوو.

$$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

$$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$$

$$31_{10} = 11111_2$$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2) دي چې عبارت له (0,1) څخه دي.

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوي؟

حل:

5	251	
5	50	1
5	10	0
5	2	0
	0	2

$$251_{10} = 2001_5$$

$$251 = 2 \times 125 + 1$$

$$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$

$$251 = 2001_5$$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 0، 1، 2، 3، 4 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوي؟

65 -3

47 -2

33 -1

97 -6

71 -5

77 -4

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوي؟

97 -3

314 -2

211 -1

101 -6

98 -5

86 -4

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 111011_2 د 10 قاعدې ته واړوي.

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$

$$59_{10} = 111011_2$$

د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د يوه عدد اړول:

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتيب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمری رقم په 5^0 کې دریم رقم 5^1 کې په همدې ترتيب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه يې جمع کوو د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 32104_5 د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$

$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$

$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرین:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوي؟

$$111111_2 - 3$$

$$111011_2 - 2$$

$$101111_2 - 1$$

$$100011_2 - 5$$

$$1010001_2 - 4$$

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوي؟

$$234_5 - 5$$

$$143_5 - 4$$

$$423_5 - 3$$

$$341_5 - 2$$

$$231_5 - 1$$

څلورم فصل

نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددونو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

a ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي b ته دويم حد يا مخرج يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فیصد په شکل اود اعشار کسر په شکل هم لیکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پیدا کول: که دوه عددونه راځي شوي وي او وغواړو چې نسبت یې پیدا کړو یو پر بل یې لیکو او اختصار وکړو یې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دویم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت یې پیدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دویمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او اول حد معلوم وي دویم حد معلوم نه وي دویم حد په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\text{نسبت} \div \text{اول حد} = \text{دویم حد}$$

مثال: د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{5}{8} \quad \text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$$

$$\text{د احمد روپۍ} = 430 \quad \text{د محمود روپۍ} = 688Rs$$

$$=? \text{ د محمود روپۍ}$$

دریمه قاده: چې د دوه کمیتو نسبت او دویم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{نسبت} \times \text{دویم حد} = \text{اول حد}$$

مثال: د احمد او محمود پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{5}{8} \quad \text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$$

$$\text{د احمد روپۍ} = 430Rs \quad \text{د محمود روپۍ} = 688$$

$$=? \text{ د احمد روپۍ}$$

خلورمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې یې ضرب کړو دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پیسو مجموعه 4080 ده د هر یوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{مجموعه} = 4080 \quad \text{اکرم روپۍ} = \frac{3 \times 4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$$

$$=? \text{ د اکرم روپۍ} \quad \text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$$

$$=? \text{ د انور روپۍ}$$

پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسې څو دي؟

$$\begin{aligned} \text{نسبت} &= \frac{6}{11} & \text{عبدالهادي روپۍ} &= \frac{6 \times 750}{11 - 6} = \frac{4500}{5} = 900 \\ \text{تفاضل} &= 750 & \text{عبدالباري روپۍ} &= \frac{11 \times 750}{11 - 6} = \frac{8250}{5} = 1650 \end{aligned}$$

? = عبدالهادي روپۍ

? = عبدالباري

شپږمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned} \text{نسبت} &= \frac{5}{7} & \text{د احمد روپۍ} &= 5 \sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40 \\ & & \text{د محمد روپۍ} &= 7 \sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56 \end{aligned}$$

2240 = د ضرب حاصل

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:
که دوه يا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرځ د دويم کسر صورت په همدې ترتيب اخړه وي
دی کسرونه معکوس نسبت وايي لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او
اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} = \frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د
احمد روپۍ 300 وي د حامد روپۍ څو دی؟

$$\frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمود روپۍ}} = \frac{3}{4} = \text{نسبت}$$

$$\frac{\text{محمود روپۍ}}{\text{حامد روپۍ}} = \frac{5}{7} = \text{نسبت}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{محمود}} \times \frac{\text{محمود}}{\text{حامد}} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$$

$$\text{احمد روپۍ} = 300Rs \quad \text{نسبت} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28} \quad 300 \div \frac{15}{28} = \text{د حامد روپۍ}$$

$$=? \text{ د حامد روپۍ}$$

$$\text{د حامد روپۍ} = 300 \times \frac{28}{15} = 20 \times 28 = 560$$

تمرین:

- 1- یو سړي 42 منه ممیز د 70 منه نخودو سره گډوي نسبت یې پیدا کړی؟
- 2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟
- 3- یو دکاندار دوه قسمه چای سره گډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که د گډ شوي چای تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پیدا کړی؟
- 4- د میو او وریجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وریجې 50 منه وي می به څومره وي او څومره می زیاتې شي چې نسبت یې $\frac{3}{8}$ شي؟
- 5- د احمد او محمود پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل یې 36000 دي د هر یو روپی څو دي؟
- 6- د بادامو او پستې د قیمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پیستې دیومن قیمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟
- 7- د احمد او اکرم پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور پیسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپی 3000 وي د انور روپی به څو وي؟

تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

$$\text{لکه } a:b::c:d \text{ يا } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدو ته وسطين وايي.

a او d طرفين دي b او c وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.
لکه:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

$$2 \times 24 = 3 \times 16$$

$$48 = 48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوې نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي د تناسب خواص تغير نه خوري.

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په درې حالتو کې مطالعه کوو.

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر یې دوه وي لکه $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زیات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وایي.

$$\text{لکه } \frac{5}{8} = \frac{35}{56} = \frac{45}{72} \dots \dots \dots$$

2- د حدود ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدود ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په پېریدو د بل نسبت مربوطه حد پېریدلو او په کمیدلو سره یې کمیدلو دې تناسب ته مستقیم تناسب وایي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12} = \frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد پېریدلو او په پېریدو سره یې کمیدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وایي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي.

$$\frac{12}{6} = \frac{18}{36}$$

3- د حدود ورکیدو له کبله د تناسب اقسام:

د حدود ورکیدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

الف- څلورم تناسب: که په يوه تناسب کې يوه حد ورکړه وي، د دې تناسب ته څلورم تناسب وايي لکه:

$$\frac{5}{8} = \frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصيت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دريم تناسب: که په يوه تناسب کې وسطين مساوي وي دې تناسب ته دريم تناسب وايي. مثال: د 5 او 30 دريم تناسب پيدا کړئ؟

$$\frac{5}{30} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30 \times 30}{5} = \frac{900}{5} = 180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په يو تناسب کې طرفين معلوم او وسطين معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وايي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پيدا کړئ؟

$$\frac{5}{x} = \frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180$$

$$x^2 = 900$$

$$x = 30$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{900}$$

- 1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟
- 2- اته کسه يو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟
- 3- احمد يو کار په 4 ورځو او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به يې په شريکه په څو ورځو کې وکړي؟
- 4- احمد او محمود په شريکه يو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد يې يوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به يې په څو ورځو کې وکړي؟
- 5- احمد يو کار په 6 ورځو کې محمود يې په 9 ورځو کې او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به يې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟
- 6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او يو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووايه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟
- 7- د 8 او 12 دريم تناسب پيدا کړي؟
- 8- د 8 او 18 هندسې وسط څو دي؟
- 9- د 20 او 80 هندسې وسط پيدا کړي؟
- 10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او يوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او يوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

پنځم فصل

فيصد:

د 100 له قراره د يوې تجارتي معاملې د گټې يا تاوان معلومولو ته فيصد وايي.
يا داچه په يوه مركبه ماده، مخلوط يا محلول كې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فيصد وايي.
د فيصد فارمولونه دا دي.

$$\text{گټه} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}{100}$$

په مركبه ماده يا مخلوط يا محلول كې د هغوي مقدار د سرمايي حيثيت لري د اجزاو فيصدي نرخ دی او په ټوله ماده كې د هغه جز مقدار د گټې حيثيت لري.

$$\text{نرخ} = \frac{\text{گټه} \times 100}{\text{سرمایه}}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{گټه} \times 100}{\text{سرمایه}}$$

مثال: 8000 روپۍ گټه د 3 فيصد په نرخ پيدا كړي؟

$$\text{گټه} = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: يو سړي په 12000 روپيو كې 960 روپۍ وگټلې نرخ كې څو دی؟

$$\text{سرمایه} = 12000Rs \quad \text{نرخ} = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

$$\text{گټه} = 960Rs$$

$$\text{نرخ} = ?$$

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 10% په نرخ کې یې سرمایه یې پیدا کړې؟

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$$

$$\text{گټه} = 15000$$

$$\text{نرخ} = 6 \quad \text{سرمایه} = 250000$$

$$\text{سرمایه} = ?$$

4- د یوه سړي د گټې او سرمایې مجموعه 28000Rs ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او گټه یې معلومه کړئ؟

حل:

$$\text{سرمایه او سرمایه} = 28000Rs \quad 100 + 12 = 112$$

$$\text{نرخ} = 12 \quad \frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

$$\text{سرمایه} = ? \quad x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

$$\text{گټه} = ? \quad \text{سرمایه} = x = 25000Rs$$

$$\text{گټه} = 28000 - 25000 = 3000$$

$$\text{گټه} = 3000$$

پوښتنه: په 40kg مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پرېږدي. تخفیف بلل کېږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د گټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کېږي.

$$\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ} = \frac{\text{تخفيف}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{\text{نرخ}}$$

اصلي قيمت -

تخفيف

فعلي قيمت

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دی. خرڅوونکي اخیستونکي ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودې تخفيف او اصلي قيمت يې پيدا کړی؟

$$\text{اصلي قيمت} = 300000 \quad \text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

$$\text{نرخ} = 8\% \quad \text{تخفيف} = 24000$$

$$\text{تخفيف} = ? \quad \text{فعلي قيمت} = 300000 - 24000 = 276000Rs$$

$$\text{فعلي قيمت} = ?$$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي که تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا کړی؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7 \quad \text{نرخ} = 7$$

3- د يوه موټر تخفيف $80000Rs$ دی نرخ يې 8 دی اصلي قيمت يې څو دی؟

$$\text{تخفيف} = 80000Rs$$

$$\text{نرخ} = 8 \quad \text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000Rs$$

$$\text{اصلي قيمت} = ?$$

احديت:

په لغت کې تنهائي او يوازي والي ته وايي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شيانو د مجموعې قيمت څخه د يوه شي د قيمت پيدا کولو ته احديت وايي.

طريقه يې داسې ده چې مجموعي قيمت د شيانو په شمېر ويشو.

$$\text{احديت} = \frac{\text{مجموعې قيمت}}{\text{د شيانو شمېر}}$$

مثال: يو خباط په څلور ورځو کې 28 کميسونه وگنډل وواياست چې په يوه ورځ کې به يې څو کميسونه گنډلي وي؟

کميسونه ورځي

$$\frac{4}{1} = \frac{28}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په يوه ورځ کې يې 7 کميسونه گنډلي دي.

2- يو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په 240Rs کيږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنگه سوالونه په تناسب کې ډېر اسنه حل کيږي خو د احديت په طريقه داسې حل کيږي اول د يو پنسل قيمت پيدا کوو بيا يې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قيمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$7 \text{ د پنسلو قيمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قيمت 360 روپۍ وي د يو متر رخت قيمت څو دی او بيا د 5 مترو قيمت يې پيدا کړئ؟

$$\text{د يوه متر قيمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$5 \text{ مترو قيمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

ریځه یا ریځ

ریځ په لغت کې سود یا گټه ته وايي.

او په اصطلاح کې په یوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د یوې سرمایې د گټې د پیدا کولو طریقې ته ریځ وايي. ریځ په دوه ډوله ده.

1- ساده ریځ 2- مرکبه ریځه

1- ساده ریځه:

هغه ریځه ده چې د مودې تر رسیدلو وروسته گټه اخیستل کیږي او سرمایه بیا په ریځه اچول کیږي.

د ساده ریځې فارمولونه څلور دي.

$$\text{ریځ} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{ریځ} \times 1200}{\text{موده} \times \text{سرمایه}}$$

$$\text{موده} = \frac{\text{ریځه} \times 1200}{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{سرمایه} = \frac{\text{ریځه} \times 1200}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

مثال: د 20000 روپیو ریځه د 15% په نرخ په 8 میاشتو کې پیدا کړئ؟

$$\text{ریځه} = 2000Rs \quad \text{ریځه} = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000$$

مثال: یو سړی د 8 میاشتو لپاره 20000Rs په مرابحه واچوي پس له 8 میاشتو یې ریځه 2000Rs شوه نرخ یې پیدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = 15\% \quad \text{نرخ} = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15$$

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15% په نرخ 2000 روپی. ده موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \quad \text{8 میاشتې = موده}$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه وچوله پس له 8 میاشتو یې د 15% په نرخ 2000 روپی. ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000Rs$$

2- مرکبه ربحه :

که د مراتبې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه وچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایي.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1 + r)^n$$

A د سرمایې او ربحې مجموعه ده C اولنۍ سرمایه ده r نرخ دی او n د کلونو شمېر دی.

C سرمایه او Cr گټه او A د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$

$$A_1 = C(1 + r)$$

$$A_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r$$

$$A_2 = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2$$

$$A_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r$$

$$A_3 = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د n کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1 + r)^n$$

مثال: یو سړي 50000Rs د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولی گټه او سرمایه یې پیدا کړی؟

$$A = 50000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$$

$$A = 50000 \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^3$$

$$A = 50000 \left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000 \left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5 \times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرین:

- 1- د 10000 روپیو ربحه 8% په نرخ په 9 میاشتو کې څو ده؟
- 2- د 50000 روپیو گټه په 6 میاشتو کې 5250 روپی شوه نرخ یې پیدا کړی؟
- 3- د 20000 روپیو گټه د اوه میاشتو په موده کې 1750 روپی ده نرخ یې څو دی؟
- 4- د 18000 او گټه د 18% په نرخ 1750 روپی ده موده یې پیدا کړی؟
- 5- لوی سرمایې په 8 میاشتو کې د 15% په نرخ 3000 گټې سرمایه څو ده؟
- 6- احمد 5000 روپی د 20% په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولی گټه او سرمایه یې څو ده؟

تنزیل:

تنزیل په لغت کې کښته کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې سند خرڅوونکي یې سند اخیستونکي ته په یوه ټاکلي موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزیل بلل کیږي.

د تنزیل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزیل} = \frac{\text{اصلي قیمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزیل} - \text{اصلي قیمت} = \text{فعلي قیمت}$$

مثال: د سند اصلي قیمت $300000Rs$ دی مودې ته یې 9 میاشتې دي نرخ یې 15% دی تنزیل یې څو دی؟

$$\text{تنزیل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قیمت 50000 دی په 9 میاشتو کې یې تنزیل $3000Rs$ دی نرخ یې څو دی؟

$$\text{نرخ} = 8 \quad \text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8$$

3- د 20000 د تنزیل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده یې پیدا کړي؟

$$\text{شپږ میاشتې} = \text{موده} \quad \text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6$$

4- د يوه سند تنزېل د 15% په نرخ چې مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قيمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرین:

1- د يوه سند اصلي قيمت 450000Rs مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي د 15% په نرخ يې تنزېل څو دی؟

2- د يوه سند اصلي قيمت 75000Rs دی د 4% په نرخ يې تنزېل 2250Rs شو مودې ته يې څومره وخت پاتې دی.

3- د يو سند اصلي قيمت 90000Rs دی مودې ته يې 8 مياشتې دي که تنزېل 3000Rs وي نرخ يې پيدا کړئ؟

4- د يوه سند تنزېل په 8 مياشتو کې د 7% په نرخ 5600Rs شوي اصلي قيمت يې څو دي.
مشارکت:

که څو کسه په يوه تجارتي معامله لاس پورې کړي گټه او تاوان يې سره شريک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وايي.
د شراکت د گټې تقسيم په څلور حالتو کې مطالعه کوو.

اول حالت:

چې سرمايي او مودې يې مساوي وي. گټه په نفرو ويشل کېږي.

مثال: احمد، محمود او حامد هر يوه 500000Rs لري د حمل په اول يې په تجارت پيل وکړ د کال تر اخره پورې 900000Rs روپۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده.

حل:

$$\text{د هر يوه گټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

دویم حالت:

چې مودی یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي گټه د سرمایو په مجموعه ویشل کېږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد 60000Rs لري په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې 300000Rs روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ.

$$1/\text{حمل} = 40000Rs = \text{د احمد سرمایه}$$

$$1/\text{حمل} = 50000Rs = \text{د محمود سرمایه}$$

$$1/\text{حمل} = 60000Rs = \text{د حامد سرمایه}$$

$$300000Rs = \text{گټه}$$

$$4 + 5 + 6 = 15 \quad ? = \text{د هر یوه گټه}$$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

$$4 \times 20000Rs = 80000Rs = \text{د احمد گټه}$$

$$5 \times 20000Rs = 100000Rs = \text{د محمود گټه}$$

$$6 \times 20000Rs = 120000Rs = \text{د حامد گټه}$$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي گټه د مودو په مجموعه ویشل کېږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 150000Rs لري د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د 150000Rs په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د 150000Rs په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ؟

حل:

احمد	150000	1/ حمل	12
محمود	150000	1/ اسد	8
حامد	150000	1/ عقرب	$\frac{5}{25}$

$$500000 = \text{گټه}$$

$$=? \text{ د هر يوه گټه}$$

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

$$12 \times 20000 = 240000 = \text{د احمد گټه}$$

$$8 \times 20000 = 16000 = \text{د محمود گټه}$$

$$5 \times 20000 = 100000 = \text{د حامد گټه}$$

خلورم حالت:

چې مودې او سرمايي مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه به سرمايه کې ضربېږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايي په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لږلې د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده؟

$$\text{احمد} = 50000 \quad 1/\text{حمل}$$

$$\text{محمود} = 80000 \quad 1/\text{ميزان}$$

$$\text{گټه} = 216000$$

$$=? \text{ د هر يوه گټه}$$

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد گټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود گټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرین:

1- څلور کسان هر یو 200000 روپۍ لرلې. په اول د حمل یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 600000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه شوه؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلې د حمل په اول یې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپیو په سرمایه په اول د سنبله وړ سره شریک شو د کال تر اخره یې 120000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلې په اول د شور یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 150000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلې په اول د جوزا یې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپیو په سرمایه په اول د میزان وړ سره شریک شو د کال تر اخره یې 112000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړئ؟

شپږم فصل

سټ (Set):

سټ يو انگليسي لفظ دی چې مفهوم يې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

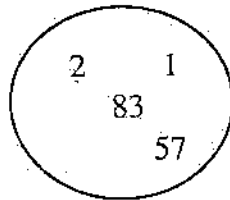
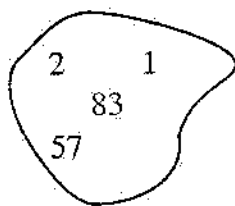
په اصطلاح کې سټ د هغو شیانو مجموعه يا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخيص وړ وي. سټ د الفباء د غټو تورو پواسطه ښودل کېږي لکه $A, B, C, \dots$ او د ځايي نورو د سټ نظريه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په رياضي کې داخل او معرفي شوه.

د سټ عناصر Element of set:

په سټ کې شاملو شیانو ته د سټ عناصر وايي. مثلاً $A = \{2, 3, a, b\}$ چې 2، 3، a او b د سټ عناصر دي.

د سټ نمایش:

Venn برطانوي عالم سټ د هندسي او غیر هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې د سټ دغه نمایش Venn diagram وايي.



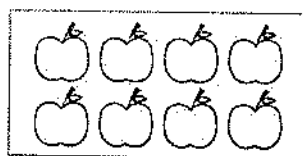
5	8	9
6	11	4

د سټ د لیکلو طریقي:

د سټ د لیکلو طریقي څلور دی.

Picture Method - 1

پدې میتود کې د سټ د عناصرو شکلونه رسموي دا میتود په کشته ټولګیو کې استعمالیږي.



2- Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفی میتود پواسطه لیکل کېږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کېږي. د E ژبې د بې اوازې تورو سیټ په A ښیو.

$$A = \{ \text{د } E \text{ بې اوازې توري} \}$$

$$B = \{ \text{حسابي ارقام} \}$$

3- Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي. لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په (x) ښیي فرضاً د A د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو x د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کېږي چې د A د سیټ عناصر x دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

د سټ اقسام:

سټ په څلور قسمه دی.

- 1- خالي سټ
- 2- يو عنصره سټ
- 3- معين سټ
- 4- غير معين سټ

1- خالي سټ: هغه سټ چه عناصر نلري د خالي سټ په نوم ياديږي لکه $A = \{ \}$ خالي سټ د ϕ د علامې پواسطه ښودل کيږي.

2- يو عنصره سټ: که کوم سټ يو عنصر ولري دې سټ ته يو عنصره سټ وايي. لکه $B = \{3\}$ يا $A = \{\text{لمر}\}$

3- معين سټ: هغه سټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سټ.

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غير معين سټ:

هغه سټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبيعي اعدادو سټ.

$$A = \{\text{د طبيعي اعدادو سټ } IN\}$$

$$B = \{IR\}$$

د روابطو له مخې د سټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سټونه په 8 اته قسمه دي.

- 1- فرعي سټ
- 2- کلي سټ
- 3- مکمله سټ
- 4- طاقت لرونکي سټ
- 5- مساوي سټونه
- 6- معادل سټونه
- 7- منفصل سټونه
- 8- غير منفصل سټونه

1- فرعي سيٽ: ڪه د A او B دوه داسي سٽيونه ولرو چي د B د سيٽ هر عنصر د A په سيٽ ڪي شامل وي نو د B سيٽ د A د سيٽ فرعي سيٽ بلل ڪيري لکه

$$B = \{4, 6, 8, 10\} \text{ او } A = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 12\}$$

څرنگه چي د B د سيٽ هر عنصر په A ڪي شامل دي نو د B سيٽ د A د سيٽ فرعي سيٽ دي او داسي ليکل ڪيري $B \subset A$

فرعي سيٽ په دوه قسمه دي.

a- واقعي فرعي سيٽ b- غير واقعي فرعي سيٽ

a- واقعي فرعي سيٽ: ڪه ديوه سيٽ ٽول عناصر په بل سيٽ ڪي شامل وي او په دويم سيٽ ڪي داسي عناصر وي چي په لمړي سيٽ ڪي نه وي لکه:

$$B \subset A \text{ نو } B = \{3, 4, 5, 6\} \text{ او } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

b- غير واقعي فرعي سيٽ: ڪه دوه داسي سٽيونه ولرو چي د اول سيٽ ٽول عناصر په دويم سيٽ ڪي او د دويم سيٽ هر عنصر په اول سيٽ ڪي شامل وي دغه سٽيونه يو ډبل غير واقعي فرعي سٽونه دي. لکه:

$$B \subseteq A \text{ او } A \subseteq B \text{ نو } B = \{10, 8, 2, 6, 4\} \text{ او } A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

2- کلي سيٽ: ڪه يو سيٽ څو فرعي سٽيونه ولري دي سيٽ ته کلي سيٽ وايي لکه $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ چي $B = \{3, 4\}$ او $C = \{5, 6, 7\}$ او $D = \{8, 9, 10\}$ فرعي سٽونه دي نو د A سيٽ کلي سيٽ وي.

3- مکمله سيٽ: ڪه يو کلي سيٽ يو واقعي سيٽ ولري نو د کلي سيٽ د پاتي عناصرو سيٽ د فرعي سيٽ مکمله سيٽ دي.

مثلاً $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ او $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ دوه سٽونه لرو چي $B \subset A$ دي نو د B د سيٽ مکمله سيٽ چي په B' بنودل ڪيري عبارت $B' = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ دي.

4- طاقت لرونکي سٽونه: هر کلي سيٽ د خپلو فرعي سٽونو طاقت لرونکي سيٽ يا Power Set دي لکه $A = \{\Delta, \odot, \square\}$ او $A_1 = \{\Delta\}$

$$A_6 = \{\odot, \square\}, A_5 = \{\Delta, \square\}, A_4 = \{\Delta, \odot\}, A_3 = \{\square\}, A_2 = \{\odot\},$$

$$A_8 = \{\} \text{ او } A_7 = \{\Delta, \odot, \square\}$$

ستوننه لرو چې A سيټ ئي کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

$$P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\} \text{ يعني}$$

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د 2^n پواسطه پيدا کيږي n د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د B د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} n &= 4 & P(B) &= 2^n \\ P(B) &=? & P(B) &= 2^4 = 16 \\ & & P(B) &= 16 \end{aligned}$$

5- مساوي سيټونه: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د B په سيټ کې او د B د سيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي. نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايي.

يعنې که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

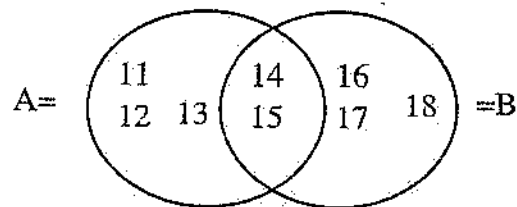
6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4, 5, 8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

$$\text{لکه } A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} \text{ او } B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايي.

لکه $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ او $B = \{14, 15, 16, 17, 18\}$ چې $\{14, 15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د A او B سيټونه غير منفصل دي.



د سیتونو عملیې:

په حساب کې د سیتونو عملیې درې دي.

1- د سیتونو اتحاد 2- د سیتونو تقاطع 3- د سیتونو تفاضل

1- د سیتونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیتونو اتحاد د هغه عناصرو سیت دی چې اقلأ هغه عناصر په دغه سیتونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضي په دوه یا درې سیتونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$$B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\} \text{ او } A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{8, 9, 10, 11, 12, 13\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

2- د سیتونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیت دی چې په دوه یا څو سیتونو کې شامل وي. لکه $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ او

$$B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A \cap B = \{6, 7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیتونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیت دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ او } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3\}$$

الجبر



اول فصل

الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شوې دی چې جبر د مات هډوکي تړلو ته وایي. او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په IR سره ښودل کېږي.

د حقیقي اعدادو سیټ IR :

د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

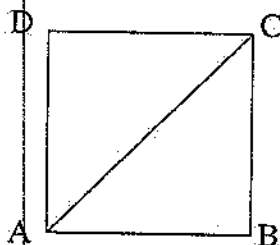
$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په

$$Q \text{ او غیر ناطق په } Q' \text{ وښیو نو } IR = [Q \cup Q']$$

صحيح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوی چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقي څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبدا واقع وي د دې مربع مساحت 1cm^2 دي که د A نقطه د C سره وصل کړو نو AC د مربع وتر لاس ته راځي چې



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \quad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پیدا کولو لپاره د A نقطه مرکز نیسو او د $\overline{AC} = \sqrt{2}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او یوه دایره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړي دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتیب کولای شو چې دغیر ناطقو عددو د نقطې د عددو په کرښه پیدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤ د پرکار خوله په همدغه شعاع خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره یې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه لیکل کیږي مگر په الجبر کې عدد او علامه دواړه یو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مگر -19 او $+19$ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعمالیږي مگر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړیږي.

لکه $4x - 5$ ، $7x^2 + 6x + 7 = 0$ ، $y = 3x - 4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانین بشپړ شويدي زیادت نه قبلوي مگر الجبر د تمدن تابع دي د تخنیک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم یې قوانین او فارمولونه ډیريږي او انکشاف کوي.

د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب، تقسیم، جذر او طاقت حالتو ته حد وایي.

لکه: -3 ، x ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، x^3 ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفریق حالت ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

درې حده افادې ته ترينوم وايي. لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه

$$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$$

په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دادي.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

د پولينوم د هر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم ياديږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$$a_5 = 7, a_4 = -12, a_3 = 13, a_2 = 0, a_1 = -2, a_0 = 15$$

پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې

موجود وي لکه $7x - 20x^3 + 8x^2 - 8x^4 + 7$ پدې پولينوم کې کوچني توان صفر دی او

لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1، 2، 3 دي چې درې واړه پکې موجود

دي نو پورتنې پولينوم کامل پولينوم دی.

2- ناقص پولینوم: هغه پولینوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه پکې موجود نه وي لکه.

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولینوم: هغه پولینوم دی چې په مخرج کې یې حرف موجود نه وي. لکه:

$$\frac{7x^3 + 4x^2 + 11x + 8}{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}$$

5

4- کسري پولینوم: هغه پولینوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې د توانونو په اساس په صعودي یا نزولي ډول ترتیب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غیر منظم پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې د توانونو په اساس ترتیب شوي نه وي.

لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غیر ناطق پولینوم: هغه پولینوم دی چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي. لکه:

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه یې کسري کیږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غیر ناطق پولینوم ته ملتي نوم هم وايي.

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف يې ترجذر لاندې وي که د طاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $5 = 3 + 2$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: Degree of a Polynome د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2 + 5x^2y^3 + 8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

که په يوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3 + x^m y + x^n y^2 + y^3$

حل:

$$m + 1 = 3$$

$$m = 3 - 1$$

$$m = 2$$

$$n + 2 = 3$$

$$n = 3 - 2$$

$$n = 1$$

د الجبري عددونو څلور گوني عمليې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو. هم علامه عدونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

$$-435$$

$$+215$$

$$\underline{-387}$$

$$\underline{+416}$$

$$-822$$

$$+631$$

مختلف علامه عددونه یو د بل څخه منفي کيږي او علامه د لوی عدد لیکل کيږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ -416 \\ \hline -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ -168 \\ \hline +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمعې عملیه پرې اجرا کوو.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \pm 263 \\ \hline +468 \end{array} \quad \begin{array}{r} -216 \\ \mp 418 \\ \hline +202 \end{array} \quad \begin{array}{r} -485 \\ \pm 316 \\ \hline -801 \end{array} \quad \begin{array}{r} +465 \\ \mp 317 \\ \hline +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو. د علامو ضربول په یوه جدول کې مطالعه کوو.

$\begin{array}{l} + \times + = + \\ - \times - = + \end{array}$	د عین علامو د ضرب حاصل مثبت دی.
$\begin{array}{l} + \times - = - \\ - \times + = - \end{array}$	او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی.

د $- \times - = +$ ثبوت:

اول د $- \times - = +$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$

$$(6 - 1)(9 - 1) = 40$$

$$54 - 6 - 9 \square 1 = 40$$

$$54 - 15 \square 1 = 40$$

$$39 \square 1 = 40$$

که په خالي خانه کې + علامه ولیکل شي د مساوات دواړه خواوي مساوي کيږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

دویم د $+$ $-$ $\times$ $-$ ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(-b) = x \dots \dots \dots I$$

$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$

$$-a(-b + b) = x - ab$$

$$-a(0) = x - ab$$

$$0 = x - ab$$

$$ab = x$$

په I رابطه کې د x په عوض ab وضع کوو:

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې $+$ $-$ $\times$ $-$ کیږي:

د $-$ $-$ $\times$ $+$ ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$

$$(+3)(+3) = 9$$

$$(+3)(+2) = 6$$

$$(+3)(+1) = 3$$

$$(+3)(0) = 0$$

$$(+3)(-1) = -3$$

$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې $+$ $\times$ $-$ $-$

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$

$$(-8)(-9) = 72$$

$$(-5)(+3) = -5$$

$$(+4)(-7) = -28$$

-13	$+3$	-9	$+8$
-5	-4	$+3$	$+7$
$+65$	-12	-27	$+56$

د الجبري عددونو تقسيم:

علامه په علامه او عدد په عدد ويشو لمړی د علامو خارج قسمت په يوه جدول کې مطالعه کوو.

$$\begin{array}{l} \frac{+}{+} = + \\ \frac{+18}{+3} = +6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{-}{-} = + \\ \frac{-15}{-5} = +3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{+}{-} = - \\ \frac{+12}{-6} = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{-}{+} = - \\ \frac{-10}{+2} = -5 \end{array}$$

د پولینومونو څلور ګوني عمليې

1- د پولینومونو جمع:

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې مشابه حدونه یو تر بل لاندې راشي بیا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف علامه مشابه حدونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3 + 8x^2 - 11x + 8 \\ 11x^3 + 9x^2 + 15x - 3 \\ \hline 18x^3 + 17x^2 + 4x + 5 \end{array}$$

2- د پولینومونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې مشابه حدونه یو د بل لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ور کوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4 - 15x^3 + 8x^2 - 20x + 8 \\ \pm 35x^4 \pm 9x^3 \pm 11x^2 \pm 9x \mp 16 \\ \hline -22x^4 - 24x^3 - 3x^2 - 29x + 24 \end{array}$$

3- د پولینومونو ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو بیا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوو د پولینومونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال:

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\
 \underline{7x^2 - 8x + 9} \\
 21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \\
 - 24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \\
 \underline{27x^3 - 45x^2 + 63x - 63} \\
 21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63
 \end{array}$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کووښي د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کېښته کوو نوی مقسوم جوړوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوي برخې ته باقي وايي.

مثال:

$ \begin{array}{r} 72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 \\ \pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 \\ \hline 32x^4 - 12x^3 + 9x^2 \\ \pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 \\ \hline -40x^3 + 21x^2 + 64x \\ \mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x \\ \hline 56x^2 + 49x - 21 \\ \pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 \\ \hline \end{array} $	$ \begin{array}{r} 8x^2 + 7x - 3 \\ \hline 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \end{array} $
---	---

د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونو د تقسيم ميزان په لاندې ډول دی

باقي + خارج قسمت $\times$ مقسوم عليه = مقسوم.

که مقسوم په $P(x)$ او مقسوم عليه په $(x - a)$ او خارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په R ونيو نو لیکو چې:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د x په عوض a وضع کوو نو:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوې ته د باقيمانده دعوه يا *Remainder's Theorem* وائي.

مثال: ونياست چه $x + 2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ د پولینوم جذر دی او که نه دی؟

حل: د $x + 2$ جذر پیدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولینوم کې د x په عوض (-2) وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو (-2) د پولینوم جذر دی او $x + 2$ د پولینوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$

$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$

$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$

$$P(-2) = -28 + 28$$

$$P(-2) = 0$$

$$R = 0$$

$x + 2$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (-2) ئي جذر دی.

مثال: هغه افاده پيدا کړئ چه په $x - 1$ باندې ووېشل شي باقي ئې (-3) شي او که په $x + 2$ باندې ووېشل شي باقي ئې -9 شي.

$$p(x) = ax + b$$

$$p(1) = a \cdot 1 + b = -3$$

$$p(-2) = a(-2) + b = -9$$

$$a + b = -3$$

$$\mp 2a = \mp 9$$

$$3a = 6$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$$

$$b = -5$$

مطلوبه افاده $(2x - 5)$ ده.

تمرین:

1- جمع یې کړئ؟

$$3x^2 - 4x + 16$$

$$7x^2 - 20x + 8 \quad -b$$

$$5x^2 + 3x - 11$$

$$11x^3 - 11x^2 + 7x - 9$$

$$8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \quad -a$$

$$9x^3 - 4x^2 + x - 2$$

2- تفریق کړئ؟

$$11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \quad -b$$

$$5x^3 + 15x^2 + 8x + 11$$

$$8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15$$

$$7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20 \quad -a$$

3- ضرب یې کړئ؟

$$2x^2 - 4x + 7 \quad -b$$

$$3x^2 + 7x - 8$$

$$4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \quad -a$$

$$7x^2 - 8x + 6$$

$$6x^3 + 2x^2 - 4x + 7$$

$$3x^3 - 8x^2 + 6x - 8 \quad -c$$

4- تقسيم يې کړئ؟

$$\frac{15x^5 + 16x^4 - 73x^3 + 101x^2 - 5x + 6}{3x^2 + 8x - 6} - a$$

$$\frac{21x^4 + 67x^3 - 58x^2 - 119x + 77}{7x^2 + 6x - 11} - b$$

$$\frac{35x^6 - 59x^5 + 36x^4 + 35x^3 - 74x^2 + 60x - 24}{5x^3 - 7x^2 + 6x - 3} - c$$

$$\frac{16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4}{2x + 37} - d$$

ترکيبي تقسيم Synthetic Division

هغه تقسيم دی چه د خارج قسمت د ضربو د پیدا کولو لپاره د مقسوم ضریبونه ټول په یوه وار استعمالیږي.

طریقه یې داسی ده چه د مقسوم ضریبونه په یوه افقي کرښه کې لیکود کړنسی په اخر کې په یوه کنج کې د قیمت لیکوبیا یوی کرښی ته ځای پرېږدو او یو خط کشوو د مقسوم د پولینوم د اول حد ضریب یی له کوم تغیره راکښته کوو. د x په قیمت کې یې ضربوو د دویم حد د ضریب لاندی یې لیکو او ورسره جمع کوو یې د جمع حاصل د x په قیمت کې ضربوو. په همدی ترتیب تراخه اجرات کوو. د خط لاندی اخرنې عدد د R قیمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضریبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجی څخه یوه کمه ده.

که $R=0$ وي نو $x-a$ د مقسوم د پولینوم فکتور دی. او د قیمت د پولینوم جذر دي.

مثال: د ترکیبي تقسیم پواسطه وښیاست چه $(x-2)$ د $P(x) = x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 12x - 8$ د پولینوم فکتور دي.

1	+6	-8	-12	-8	2
	2	16	16	8	
1	8	8	4	0	

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (2) د پولینوم جذر دی او $q(x) = x^3 + 8x^2 + 8x + 4$ د خارج قسمت پولینوم دي.

که بینوم د $(x - a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x + a)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $(\pm \frac{b}{a})$ لیکل کیږي. نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1: د باقیمانده دعوی پواسطه یې حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x + 3)$ ویشل شي باقي یې (-24) شي او که په $(2x - 3)$ ویشل شي باقي یې (-6) شي.

2: د ترکیبي تقسیم پواسطه یې حل کړئ؟

a:
$$\frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 6x - 40}{x - 3}$$

b:
$$\frac{2x^4 - 13x^3 + 4x^2 + 24x - 28}{2x + 3}$$

c:
$$\frac{6x^3 + 4x^2 - 84x - 9}{x + 4}$$

d:
$$\frac{12x^4 - x^3 - 20x^2 + 8}{3x - 2}$$

دويم فصل

مساوات

د دوه افادو د عددي قيمتو برابري ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمة دي.

1- مطابقت 2- شرطيه مساوات يا معادله

1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دی چې د مجهول په ټولو قيمتو باندې يې دواړه خواوې مساوي وي.

د اسانتيا لپاره مطابقتونه په شپږو گروپو کې مطالعه کوو.

1 گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b)^n$ شکل ولري.

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n + 1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې يې مثبت دي په اول حد کې د a توان n د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان n شي د اول حد ضريب يو دی د دويم حد ضريب n دی د نورو حدو د ضريبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکيني حد ضريب د a په توان کې ضربوو د مخکينو حدو په شمېر يې ویشو.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$(a + b)^9 = ?$$

$$(a + b)^{10} = ?$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

2- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a - b)^n$ شکل ولري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول گروپ د مطابقتو په څیر دي. صرف داوول گروپ د ټول حدو علامې مثبت دي او د دویم گروپ د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a - b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$$(a - b)^9 = ?$$

$$(a - b)^{10} = ?$$

$$(a - b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 - \dots + nab^{n-1} - b^n$$

3- دریم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کېږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس n حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د a توان $n - 1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کېږي ترڅو چې د a توان صفر او د b توان $(n - 1)$ شي.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

|
|
|

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

4- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n طاق وي د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دويم قوس n حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دويم حد علامه منفي ده د دريم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامه مثبت او د جفت حدو علامه منفي دي په اول حد کې د a توان $n - 1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر شي او د b توان $n - 1$ شي.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 + b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^6 + b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$$

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$

$$a^9 + b^9 = ?$$

$$a^{11} + b^{11} = ?$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n جفت وي د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي د هر قوس اول حد د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده او دويم حد يې د دواړو حدو د قاعدو حاصل ضرب د دوه چندانو جذر دی.

$$a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$$

$$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})$$

$$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$$

$$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$$

شپږم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري درې لمړي حدونه يې مربعگانې دي درې وروستي حدونه يې د دوه حدود حاصل ضرب دوه چنده دي.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

$$\begin{aligned} 1: (2x + 3y)^2 &= (2x)^2 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2: (4x - 5y)^4 &= (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4 \\ &= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3: (2x + 3y + 5z)^2 &= (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y \\ &\quad + 2 \times 2x \times 5z + 2 \times 3y \times 5z \\ &= 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 20xz + 30yz \end{aligned}$$

2- مثال: تجزیه يې کړئ؟

$$1: 4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$$

$$\begin{aligned} 5: 9x^4 + 36y^4 &= (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = (3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}) \\ &\quad (3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}) \\ &= (3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy) \end{aligned}$$

تمرین:

انکشاف ورکړئ

$$(4x + 5y)^4 - 3 \quad (2x + 7y)^3 - 2 \quad (3x + 5y)^2 - 1$$

$$(2x - 3y)^6 - 6 \quad (3x - 7y)^4 - 5 \quad (4x - 5y)^5 - 4$$

$$\begin{aligned} & \frac{8}{125}x^3 - \frac{216}{1331}y^3 - 9 \quad 8m^3 - 125n^3 - 8 \quad 7x^2 - 9y^2 - 7 \\ & \frac{125}{216}x^3 + \frac{729}{1728}y^3 - 12 \quad 64m^3 + 1000n^3 - 11 \quad 8x^3 + 27y^3 - 10 \\ & \frac{81}{625}m^4 + \frac{1296}{2401}n^4 - 15 \quad 16x^4 + 256y^4 - 14 \quad 4x^2 + y^2 - 13 \\ & \left(\frac{2}{8}x - \frac{4}{5}y - \frac{7}{8}z\right)^2 - 18 \quad (3x + 2y - 5z)^2 - 17 \quad (2x + 3y + 5z)^2 - 16 \end{aligned}$$

تجزیه:

تجزیه په لغت کې توتیه ، توتیه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوې افادې د ضربې عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وايي.

1- د مشترک نیولو پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد یا حرف شامل وي دا شامل مشترک نيسود قوس د باندې یې لیکو بیا د افادې هر حد په دې مشترک ویشود قوس په داخل کې یې لیکو افاده تجزیه کېږي.

$$\begin{aligned} 1: & 3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5) \\ 2: & 5x^2 - 15x + 10 = 5(x^2 - 3x + 2) \\ 3: & 4x^3 + 24x^2 - 36x = 4x(x^2 + 6x - 9) \\ 4: & \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x(x - 3) \end{aligned}$$

2- د $a^2 - b^2$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$\begin{aligned} 1: & 4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x - 5y)(2x + 5y) \\ 2: & \frac{4}{25}m^2 - \frac{9}{49}n^2 = \left(\frac{2}{5}m\right)^2 - \left(\frac{3}{7}n\right)^2 = \left(\frac{2}{5}m - \frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m + \frac{3}{7}n\right) \\ 3: & \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = \left(\frac{x}{6}\right)^2 - \left(\frac{y}{7}\right)^2 = \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{7}\right) \end{aligned}$$

3- د $a^3 - b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$\begin{aligned} 1: & 8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) \\ 2: & 64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3 = (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2) \\ 3: & 216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3 = (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2) \end{aligned}$$

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$1: 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2: 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3 \\ = (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3: \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترینوم:

دري حده افادې ته ترینوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترینوم تجزیه:

د ترینوم تجزیه په دوه حالتنه کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي.

2- $a \neq 1$ وي.

1- چې $a = 1$ وي ترینوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترینوم د دغه شکل د تجزیه

لپاره داسې دوه عدده پیدا کوو چې د ضرب حاصل يې c او د جمع حاصل يې b شي. فرضاً m او n داسې دوه عددونه دي.

يعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دی نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$

$$(x + m)(x + n)$$

1- مثال:

$$x^2 + 11x + 30$$

$$x^2 + 5x + 6x + 30$$

$$x(x + 5) + 6(x + 5)$$

$$(x + 5)(x + 6)$$

2- مثال:

$$x^2 - 11x + 30$$

$$x^2 - 5x + 6x + 30$$

$$x(x - 5) - 6(x - 5)$$

$$(x - 5)(x - 6)$$

نوټ: که په ترينوم کې د (c) علامه $(+)$ وه هغه عددونه چې د ترينوم د تجزيې لپاره استعمالېږي هم علامه دي. بيا د b علامې ته گورو که د b علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د b علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

$$1: x^2 + 15x + 36$$

$$x^2 + 12x + 3x + 36$$

$$x(x + 12) + 3(x + 12)$$

$$(x + 12)(x + 3)$$

$$2: x^2 - 13x + 40$$

$$x^2 - 8x - 5x + 40$$

$$x(x - 8) - 5(x - 8)$$

$$(x - 8)(x - 5)$$

2- که په ترينوم کې د c علامه منفي وه نو عددونه چې د ترينوم د تجزيې لپاره استعمالېږي مختلف علامه دي بيا د b علامې ته گورو که د b علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د b علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

$$1: x^2 + 5x - 66$$

$$x^2 - 6x + 11x - 66$$

$$x(x - 6) + 11(x - 6)$$

$$(x - 6)(x + 11)$$

$$2: x^2 - 5x - 66$$

$$x^2 - 11x + 6x - 66$$

$$x(x - 11) + 6(x - 11)$$

$$(x - 11)(x + 6)$$

تمرین:

$$x^2 + 29x + 180 - 3$$

$$x^2 + 19x + 70 - 2$$

$$x^2 + 15x + 44 - 1$$

$$x^2 - 13x + 36 - 6$$

$$x^2 - 21x + 90 - 5$$

$$x^2 - 16x + 55 - 4$$

$$x^2 + 31x - 630 - 9$$

$$x^2 + 11x - 210 - 8$$

$$x^2 + 6x - 135 - 7$$

$$x^2 - 25x - 186 - 12$$

$$x^2 - 9x - 400 - 11$$

$$x^2 - 7x - 170 - 10$$

2- حالت چي $a \neq 1$ وي.

د ترينوم د دغه حالت د تجزيې لپاره داسې دوه عددونه پيدا کوو چي د ضرب حاصل يې ac او د جمع حاصل يې b شي؟

$$1. 3x^2 + 11x + 10$$

$$ac = 3(10) = 30$$

$$b = 11$$

$$3x^2 + 6x + 5x + 10$$

$$3x(x + 2) + 5(x + 2)$$

$$(x + 2)(3x + 5)$$

$$2. 5x^2 - 19x + 12$$

$$ac = 5(12) = 60$$

$$b = -19$$

$$5x^2 - 15x - 4x + 12$$

$$5x(x - 3) - 4(x - 3)$$

$$(x - 3)(5x - 4)$$

$$3. 7x^2 + 3x - 34$$

$$ac = 7(-34) = -238$$

$$7x^2 - 14x \quad x - 34$$

$$7x(x - 2) + 17(x - 2)$$

$$(x - 2)(7x + 17)$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & 11x^2 - 23x - 30 \\
 & ac = 11(-30) = -330 \\
 & b = -23 \\
 & 11x^2 - 33x + 10x - 3 \\
 & 11x(x - 3) + 10(x - 3) \\
 & (x - 3)(10x + 10)
 \end{aligned}$$

تمرین:

لاندې ترینومونه حل کړئ؟

$3x^2 + 31x + 80 - 3$	$7x^2 + 24x + 9 - 2$	$5x^2 + 11x + 2 - 1$
$2x^2 - 17x + 35 - 6$	$5x^2 - 22x + 21 - 5$	$7x^2 - 19x + 10 - 4$
$7x^2 + 3x - 34 - 9$	$4x^2 + 7x - 57 - 8$	$3x^2 + 2x - 33 - 7$
$8x^2 - 23x - 85 - 12$	$7x^2 - 11x - 30 - 11$	$5x^2 - 10x - 54 - 10$

د گروپ بندۍ پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې حدونه تر درې حدو زیات وه او په ټولو حدو کې یو کوم حرف یا عدد شامل نه و مګر په بعضو حدو کې شامل و دغسې افاده په گروپو ویشو په هر گروپ کې شامل مشترک نیسو تر مشترک نیولو وروسته باید قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نیسو افاده په قوسو تجزیه کیږي.

$$\begin{aligned}
 & x^3 + 5x^2 + 3x + 15 \\
 & x^2(x + 5) + 3(x + 5) \\
 & (x + 5)(x^2 + 3)
 \end{aligned}$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راځي شوي افادې تقسیم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ویشل کیږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

کوچنی مشترک مضرب L.C.M

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنی افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمېږي او تر دې بله کوچنی افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمېږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملو کې یې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو که په مشترکو ضربي عواملو کې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

- 1: $(x^2 + 2x)^2$
- 2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$
- 3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

$$\begin{aligned}
 1: & (x^2 + 2x)^2 = \{x(x + 2)\}^2 = x^2(x + 2)^2 \\
 2: & 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x + 2)(2x - 1) \\
 3: & 2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x + 2)(2x - 7) \\
 G.C.D &= x(x + 2) = x^2 + 2x \\
 L.C.M &= x^2(x + 2)^2(2x - 1)(2x - 7)
 \end{aligned}$$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

$$2ax^3 - 4a^3x - 6a^3 - 1$$

$$ax^2 + 2a^2x + a^3 - 2$$

$$3a^2(x + a)^2 - 3$$

الجبري كسرونه

الجبري كسرهغه افاده ده چې په مخرج كې يې حرف موجود وي لكه:

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x}, \quad \frac{3}{x+1}$$

الجبري كسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري كسرونه 2- غير ناطق الجبري كسرونه

2- ناطق الجبري كسرونه:

هغه الجبري كسرونه دي چې كوم حرف يې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري كسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري كسرونه b- غير واقعي ناطق الجبري كسرونه

a- واقعي ناطق الجبري كسرونه: هغه كسرونه دي چې د صورت درجه يې د مخرج د درجې

څخه كوچنې وي لكه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ يا $\frac{2}{x+3}$

b- غير واقعي ناطق الجبري كسرونه: هغه كسرونه دي چې د صورت درجه يې د مخرج د درجې څخه زياته يا ورسره مساوي وي لكه:

$$\frac{4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 3x - 4}, \quad \frac{3x^2 + 5x + 3}{x + 5}$$

2- غير ناطق الجبري كسرونه:

هغه كسرونه دي چې كوم حرف يې تر جذر لاندې وي.

$$\frac{x+5}{\sqrt{x+3}}, \quad \frac{3\sqrt{x+1}}{x+2}$$

د الجبري كسرو خواص:

1- كه د يوه كسر صورت او مخرج په يوه افاده كې ضرب شي په كسر كې تغير نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

2- که د یوه کسر صورت او مخرغ په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2 + 11x + 24}{x^2 + 5x + 6} = \frac{\frac{x^2 + 11x + 24}{x+3}}{\frac{x^2 + 5x + 6}{x+3}} = \frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}} = \frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامي لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرغ علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y} = -\frac{x}{y} = +\frac{x}{-y} = +\frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$$

د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرغ مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوو.

$$1: \frac{x}{x+5} + \frac{3x-1}{x+5} - \frac{x+3}{x+5} = \frac{x+3x-1-x-3}{x+5} = \frac{3x-4}{x+5}$$

$$2: \frac{x+3}{x^2-4} + \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+7}{x+2} = \frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

$$3: \frac{x}{x+1} + \frac{x+3}{x+2} = \frac{x(x+2) + (x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2} = \frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

د الجبري کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرغ په مخرغ کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرغ سره اختصاریدلو اختصاروو یې بیا یې ضربوو.

$$1: \frac{x+3}{x+1} \times \frac{x-3}{x+5} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)} = \frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$$

$$2: \frac{x^2 - 2x}{x + 2} \times \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} = \frac{x(x - 2)}{x + 2} \times \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 5)} = \frac{x(x + 1)}{x + 5}$$

$$= \frac{x^2 + x}{x + 5}$$

د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرغ تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرغ څخه حذفوو.

$$1: \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 + 9x + 14} = \frac{(x + 7)(x - 4)}{(x + 7)(x + 2)} = \frac{x - 4}{x + 2}$$

$$2: \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 11x + 24} = \frac{x(x + 3)}{(x + 3)(x + 8)} = \frac{x}{x + 8}$$

د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

$$1: \frac{x^2 + 13x + 30}{x + 5} \div \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 6x + 5}$$

$$\frac{x^2 + 13x + 30}{x + 5} \times \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 8x + 15}$$

$$\frac{(x + 3)(x + 10)}{x + 5} \times \frac{(x + 1)(x + 5)}{(x + 3)(x + 5)} = \frac{(x + 10)(x + 1)}{x + 5} = \frac{x^2 + 11x + 10}{x + 5}$$

$$2: \frac{x^2 - 11x + 18}{x - 3} \div \frac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 9}$$

$$\frac{x^2 - 11x + 18}{x - 3} \times \frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x - 18}$$

$$\frac{(x - 2)(x - 9)}{x - 3} \times \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 9)(x - 2)} = \frac{(x - 9)(x + 3)}{x + 9} = \frac{x^2 - 6x - 27}{x + 9}$$

تمرین:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

$$\frac{x+5}{x^2} + \frac{x-3}{x} - \frac{x+7}{x^3} - 2$$

$$\frac{2x-3y}{6y^2} + \frac{18xy-9y^2}{9y^2} - 1$$

$$\frac{2x+1}{x^2-16} + \frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x+4} - 4$$

$$\frac{x+11}{x+3} + \frac{x-1}{x+2} - 3$$

$$\frac{2}{x+7} + \frac{3}{x-7} - 6$$

$$\frac{x}{x+5} + \frac{3x+1}{x+5} - \frac{x-2}{x+5} - 5$$

2- لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

$$\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22} - 3$$

$$\frac{x^2+5x-24}{x+8} - 2$$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-9} - 1$$

3- لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

$$\frac{x^2+x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{x^2+5x+4} - 2$$

$$\frac{x^2+5x+6}{x+5} \times \frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6} - 1$$

$$\frac{x^2+3x-40}{x+8} \times \frac{x-3}{x+5} - 4$$

$$\frac{x^2-3x-28}{x-7} \times \frac{x+5}{x+4} - 3$$

4- لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

$$\frac{x}{x+1} \div \frac{x+1}{x} - 2$$

$$\frac{x^2+13x+6}{x+5} \div \frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35} - 1$$

$$\frac{x}{x+3} \div \frac{x^2}{x^2-9} - 4$$

$$\frac{x^2}{x-1} \div \frac{x}{x^2-1} - 3$$

$$\frac{x+5}{x} \div \frac{x+5}{x} - 5$$

د کسرونو گویا کول:

د یوه کسر د صورت یا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر گویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرج گویا کول دي.

د کسر د مخرج گویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$, $\frac{2}{\sqrt{2x}}$, $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو گویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{3x \times \sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{3x \times \sqrt{x}}{x} = 3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}} = \frac{2 \times \sqrt{2x}}{\sqrt{2x} \times \sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{2\sqrt{2x}}{2x} = \frac{\sqrt{2x}}{x}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}} = \frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3} \times \sqrt{x^3}} = \frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2} = \frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې د کسر په مخخ کې یو جذري حل موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه پوره وي لکه $\frac{2x^2}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخخو د گویا کولو لپاره صورت او مخخ د مخخ په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوو.

$$1 - \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x \times x^2}} = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2}}{x} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$2 - \frac{3}{\sqrt[5]{x}} = \frac{3^5 \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x} \times \sqrt[5]{x^4}} = \frac{3^5 \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x \times x^4}} = \frac{3^5 \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{3^5 \sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3 - \frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}} = \frac{2x^2 \times \sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x} \times \sqrt[7]{x^6}} = \frac{2x^2 \times \sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x \times x^6}} = \frac{2x^2 \sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{2x^2 \sqrt[7]{x^6}}{x} = 2x \sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخخ کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه یې (2) وي.

لکه $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ او داسې نور.

صورت او مخخ د مخخ په مزدوج کې ضربوو.

$$1: \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2} \\ = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2: \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}} = \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})} = \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{11}^2} \\ = \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11} = \sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3: \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}} = \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})} = \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2 - (\sqrt{x})^2} \\ = \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x} = \sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

4- چې د کسريه مخرګ کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې يې د (2) څخه زياتې وي.

لکه: $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرګ ضربوو او که د منځ علامه يې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرګ ضربوو.

$$\begin{aligned} 1: \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} &= \frac{1(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{5^2})} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{5x^2} + \sqrt[3]{25x} - \sqrt[3]{5x^2} - \sqrt[3]{25x} - \sqrt[3]{5^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}}{x-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2: \quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}} &= \frac{(x-3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3})(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})} \\ &= \frac{(x-3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{\sqrt[5]{x^5} - \sqrt[5]{3x^4} + \sqrt[5]{9x^3} - \sqrt[5]{27x^2} + \sqrt[5]{81x} + \sqrt[5]{3x^4} - \sqrt[5]{9x^3} + \sqrt[5]{27x^2} - \sqrt[5]{81x} + \sqrt[5]{243}} \\ &= \frac{(x-3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{x+3} \\ &= \sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81} \end{aligned}$$

تمرین:

د لاندې کسرو مخرونه گویا کړئ؟

$\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5$	$\frac{3x}{\sqrt{x}} - 4$	$\frac{x-1}{\sqrt{x}} - 3$	$\frac{x}{\sqrt{x}} - 2$	$\frac{2}{\sqrt{x}} - 1$
$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} - 10$	$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - 9$	$\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}} - 8$	$\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}} - 7$	$\frac{2x}{\sqrt[4]{x}} - 6$
$\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}} - 15$	$\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}} - 14$	$\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}} - 13$	$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} - 12$	$\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}} - 11$

قسمي کسرونه:

که د دوه کسرونو د مجموعې څخه یو واقعي کسر جوړ شي، دغه کسرونه د واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+5} = \frac{2(x+5) + 3(x+1)}{(x+1)(x+5)} = \frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5} = \frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

یو واقعي کسر دی د $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ کسرونه یې قسمي کسرونه دي.

د یوه واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول:

د قسمي کسرو د پیدا کولو لپاره د واقعي کسر مخرګ تجزیه کوو د مخرګ د ضربې عواملو شمېر د قسمي کسرونو شمېر ښیي. د مخرګ د ضربې عواملو په لحاظ د واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول په څلورو حالتو کې مطالعه کوو.

1- چې د کسر د مخرګ ضربې عوامل غیر تکراري ښوونه وي هر ښووم د یوه کسر مخرګ دی صورت یې د القباء په غټو حروفو ښیو عملیې پرې اجراء کوو د حروفو قیمتونه پیدا کوو د هغوي په عوض یې وضع کوو د واقعي کسر قسمي کسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42} = \frac{8x+51}{(x+6)(x+7)} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x+7} = \frac{A(x+7) + B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42} = \frac{A(x+7) + B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه یې مساوي دی نو $8x+51 = A(x+7) + B(x+6)$

د A او B د قیمتو د پیدا کولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د A او د B قیمتونه پیدا کوو نو د هر قوس جذر پیدا کوو.

$$x+7=0$$

$$x=-7$$

-7 د x په عوض وضع کوو.

$$8(-7) + 51 = A(-7 + 7) + B(-7 + 6)$$

$$-56 + 51 = A(0) + B(-1)$$

$$-5 = 0 - B$$

$$-B = -5$$

$$B = 5$$

$$x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

6- په معادله کې د x په عوض وضع کوو.

$$8(-6) + 51 = A(-6 + 7) + B(-6 + 6)$$

$$-48 + 51 = A(1) + B(0)$$

$$3 = A$$

$$A = 3$$

د A په عوض 3 او د B په عوض 5 وضع کوو.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عینیت پواسطه:

$$8x + 51 = A(x + 7) + B(x + 6)$$

$$8x + 51 = Ax + 7A + Bx + 6B$$

$$8x + 51 = Ax + Bx + 7A + 6B$$

$$8x + 51 = (A + B)x + 7A + 6B$$

په عینیت کې د مشابه حدو ضریبونه مساوي وي.

$$A + B = 8$$

$$7A + 6B = 51$$

$$7A + 7B = 56$$

$$-7A + 6B = \pm 51$$

$$B = 5$$

$$A + B = 8 \rightarrow A = 8 - 5 = 3$$

$$A = 3$$

2- چې د کسر د مخرغ ضربي عوامل تکراري بینومونه وي.

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2 + 12x + 2 = A(x^2 + 2x + 1) + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$= Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$= Ax^2 + Bx^2 + 2Ax + Bx + Cx + A$$

$$5x^2 + 12x + 2 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

$$A + B = 5$$

$$2A + B + C = 12$$

$$A = 2$$

$$A + B = 5 \rightarrow 2 + B = 5 \quad B = 5 - 2 = 3$$

$$B = 3$$

$$2A + B + C = 12$$

$$2 \times 2 + 3 + C = 12$$

$$4 + 3 + C = 12$$

$$7 + C = 12$$

$$C = 12 - 7$$

$$C = 5$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غېر تکراري ترينومونه وي، او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم لیکو.

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پيدا کړي؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+5x+7} = \frac{A(x^2+5x+7) + x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)} = \frac{A(x^2+5x+7) + x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه يې مساوي دی نو.

$$5x^2+20x+21 = A(x^2+5x+7) + x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21 = Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21 = Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21 = (A+B)x^2 + (5A+C)x + 7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5 \Rightarrow 3+B=5 \Rightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5 \times 3 + C = 20$$

$$15 + C = 20$$

$$C = 20 - 15$$

$$C = 5$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پيدا کوو.

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 3x + 5)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3x + 5} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 + 3x + 5) + Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 3x + 5)^2} = \frac{Ax^3 + 3Ax^2 + 5Ax + Bx^2 + 3Bx + 5B + Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو:

$$2x^3 + 7x^2 + 14x + 5 = Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 5Ax + 3Bx + Cx + D + 5B$$

$$2x^3 + 7x^2 + 14x + 5 = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (5A + 3B + C)x + D + 5B$$

$$A = 2$$

$$3A + B = 7$$

$$3 \times 2 + B = 7 \Rightarrow 6 + B = 7 \Rightarrow B = 7 - 6$$

$$B = 1$$

$$5A + 3B + C = 14$$

$$5 \times 2 + 3 \times 1 + C = 14$$

$$10 + 3 + C = 14$$

$$3 + C = 14$$

$$C = 14 - 13$$

$$C = 1$$

$$5B + D = 5$$

$$5 \times 1 + D = 5$$

$$5 + D = 5$$

$$D = 5 - 5$$

$$D = 0$$

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 3x + 5} + \frac{x}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوې مساوي وي.

لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره یې دواړه خواوې مساوي دي.

دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وايي.

د معادلې اقسام:

معادله دېر قسمونه لري.

- 1- یو مجهوله اوله درجه معادله
- 2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
- 3- درې مجهوله اوله درجه معادله
- 4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
- 5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
- 6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
- 7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
- 8- جذري معادلي
- 9- اکسپوننیشل معادلي
- 10- لوگاریتمي معادلي
- 11- مثلثاتي معادلي

اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.

عمومي شکل یې دا دی $ax + b$ چې a او b ثابت عددونه دي او x مجهول دی څرنگه چې د x توان یو دی نو ځکه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وايي.

د معادلې خواص

- 1- که د معادلې د دواړو خواوو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.
 - 2- که د معادلې د دواړو خواوو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.
 - 3- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.
 - 4- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.
 - 5- که د معادلې دواړه خواوې په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.
 - 6- که د معادلې دواړه خواوې تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقې:

که د معادلې دواړه خواوې ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښی خواته او مجهول حدونه د مساوات پېښې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

1: $x + 5 = 8$	$x = 8 - 5$	$x = 3$	
2: $x - 7 = 11$	$x = 11 + 7$	$x = 18$	
3: $3x = 36$	$\frac{3x}{3} = \frac{36}{3}$	$x = 12$	
4: $\frac{x}{5} = 4$	$5 \times \frac{x}{5} = 4 \times 5$	$x = 20$	
5: $\frac{5}{x} - 3 = -2$	$\frac{5}{x} = -2 + 3$	$\frac{5}{x} = \frac{1}{1}$	$x = 5$
6: $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} + \frac{2}{x} = 36$			
$\frac{3 + 7 + 2}{x} = 36$			

$$\frac{12}{x} = 36$$

$$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{36}{1}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$36x = 12$$

جذري معادلی

هغه معادلی دي چې مجهول يې تر جذر لاندې وي

$$\sqrt{3x+30} + 11 = 17 \quad \text{لکه}$$

د جذري معادلو د حل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوی خواته پرېږدو نور جذري او غېر جذري حدونه د مساوات بلې خواته وړو. بيا د مساوات دواړه خواوې د جذريه درجه رفع کوو جذر د منځه ځي. که بيا هم په معادله کې جذر موجود و عملیه تکراروو.

1- مثال:

$$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$$

$$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$$

$$\sqrt{5x-4} = 6$$

$$(\sqrt{5x-4})^2 = 6^2$$

$$5x - 4 = 36$$

$$5x = 36 + 4 = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8$$

2- مثال:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$$

$$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$$

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (10 - \sqrt{5x+6})^2$$

$$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$$

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x + 6}$$

$$\frac{2x + 108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x + 6}}{2}$$

$$x + 54 = -10\sqrt{5x + 6}$$

$$(x + 54)^2 = (-10\sqrt{5x + 6})^2$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x + 6)$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$

$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$

$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$

$$\Delta = 38416 - 2316 = 36100$$

$$\Delta = 36100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$

$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$

$$x_2 = \frac{196 - 190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x - 1} - \sqrt{3x + 4} = -1 \Rightarrow \sqrt{3x - 1} = \sqrt{3x + 4} - 1$$

$$(\sqrt{3x - 1})^2 = (\sqrt{3x + 4} - 1)^2$$

$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x + 4} + 1$$

$$2\sqrt{3x + 4} = 6$$

$$(2\sqrt{3x + 4})^2 = 6^2$$

$$4(3x + 4) = 36$$

$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-7} = \frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{x-7}$$

$$(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{21}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{x-7} \right)^2$$

$$x = \frac{441}{x-7} - 2 \left(\frac{21}{\sqrt{x-7}} \times \sqrt{x-7} \right) + x - 7$$

$$\frac{441}{x-7} - 49 = 0 \Rightarrow 49x - 343 = 441 \Rightarrow 49x = 441 + 343 = 784$$

$$49x = 784$$

$$\frac{49x}{49} = \frac{784}{49} \Rightarrow x = 16$$

$$x = 16$$

تمرین

لاندی جذری معادلی حل کریں

$$1. \sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x+9} = 0 \quad x = 1$$

$$2. \frac{2x^2 - 128}{\sqrt{3+x^2}} = 0 \quad x = 8$$

$$3. \sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \frac{91}{\sqrt{x+13}} \quad x = 36$$

$$4. \frac{ax-1}{\sqrt{ax+1}} = 4 + \frac{\sqrt{ax}-1}{2} \quad x = \frac{81}{a}$$

$$5. \sqrt[5]{x+8} = \sqrt[10]{x^2 + 64x + 36} \quad x = \frac{7}{12}$$

$$6. \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2} \quad x = 81$$

$$7. \sqrt{x+13} - \sqrt{2x+1} = 0 \quad x = 12$$

$$8. \sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1 \quad x = \frac{16}{25}$$

$$9. \sqrt{x} + 5 = 6 - \sqrt{x+7}$$

$$x = 9$$

$$10. 2(x+2) = 1 + \sqrt{4x^2 + 9x + 14}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

تمرین:

$$1. \frac{5-x}{4} + \frac{x}{8} = 1$$

$$2. \frac{2}{x} - 3 = \frac{3}{x} - 8$$

$$3. \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 6$$

$$4. \frac{x}{2} - \frac{2x-8}{5} + \frac{4}{5} = 3$$

$$5. \frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} + x - 4 = 4$$

$$6. \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = 2$$

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان يې يو وي عمومي شکل يې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ثابت عددونه دي x او y مجهولونه دي څرنگه چې د هر مجهول توان يو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم زيات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سيستم يو حل لري.

د اوله درجه دوه مجهوله معادلې حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلې په (6) طريقو حلېږي.

1- د جمع يا افناء په طريقه:

په دواړو معادلو کې د يوه مجهول ضريبونه مساوي کوو. که هم علامه وه معادلې يو د بل څخه منفي کوو او که مختلف علامه وه معادلې جمع کوو پدې ترتيب د دوه مجهوله معادلې سيستم په يو مجهوله معادله بدلېږي يو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قيمت يې پيدا کوو بيا دا جذر د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د دويم مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$

$$5x + 3y = 19$$

$$\begin{aligned}
 5(7x + 8y) &= 38 \\
 7(5x + 3y) &= 19 \\
 \hline
 35x + 40y &= 190 \\
 \pm 35x \pm 21y &= \pm 133 \\
 \hline
 19y &= 57 \\
 y &= 3 \\
 7x + 8y &= 38 \\
 7x + 8 \times 3 &= 38 \\
 7x + 24 &= 38 \\
 7x &= 38 - 24 \\
 7x &= 14 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

2- مثال:

$$\begin{aligned}
 3x - 5y &= 2 \\
 4x + 2y &= 20 \\
 \hline
 2(3x - 5y) &= 2 \\
 5(4x + 2y) &= 20 \\
 \hline
 6x - 10y &= 2 \\
 20x + 10y &= 100 \\
 \hline
 26x &= 102 \\
 x &= 4 \\
 4(4) + 2y &= 20 \\
 16 + 2y &= 20 \\
 2y &= 20 - 16 \\
 2y &= 4 \\
 y &= 2
 \end{aligned}$$

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقہ حل کړئ؟

$$\begin{array}{r} 6x - 8y = 4 \\ 7x - 2y = 12 \end{array}^{-2}$$

$$\begin{array}{r} 5x + 4y = 32 \\ 8x - y = 29 \end{array}^{-1}$$

$$\begin{array}{r} 9x - 2y = -3 \\ 4x + 3y = 57 \end{array}^{-4}$$

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = 21 \\ 5x + 7y = 26 \end{array}^{-3}$$

2- په تعویضي طریقہ د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلېږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$3x - 11y = 10$$

$$4x + 2y = 30$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$

$$50y = 50$$

$$y = 1$$

$$3x - 11y = 10$$

$$3x - 11 \times 1 = 10$$

$$3x - 11 = 10$$

$$3x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

تمرین:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقہ حل کړئ؟

$$\begin{array}{l} 6x - 5y = 20 \\ 7x + 3y = 41 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x + 13y = 25 \\ 2x + 2y = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} 11x + 5y = 53 \\ 8x - 9y = -12 \end{array} \quad \begin{array}{l} -4 \\ -3 \end{array}$$

3- د مساوات په طریقہ د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د یو مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه پیدا کوو او سره مساوي کوو. یې د دوه مجهوله معادلو سیستم په اوله درجه یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دغه قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$\begin{array}{l} 3x + 7y = 19 \\ 5x - 2y = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + 7y = 19 \\ 3x = 19 - 7y \end{array} \quad \begin{array}{l} 5x - 2y = 18 \\ 5x = 18 + 2y \end{array}$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \dots \dots \dots I$$

$$x = \frac{18 + 2y}{5} \dots \dots \dots II$$

څرنګه چې په I او II نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي نولیکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}, \quad x = 4$$

تمرین:

$$7x - 3y = 5$$

$$8x - 4y = 0 \quad -2$$

$$9x - 3y = 21$$

$$8x + 7y = 38 \quad -4$$

$$4x + 2y = 14$$

$$15x - y = 10 \quad -1$$

$$11x + 6y = 40$$

$$2x + 9y = 31 \quad -3$$

4- د دیترمینانت په طریقہ د دوه مجهولہ اولہ درجہ معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې (معین یا ثابت) ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ لکه د دیترمینانت وایي لکه}$$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهولہ معادلو حل:

د x او y د ضربیدو دیترمینانت په D بنیو او قیمت یې پیدا کوو. د x د ضربیدو په عوض ثابت

عددونه لیکو په D_x یې بنیو قیمت یې پیدا کوو بیا د D په دیترمینانت د y د ضربیدو په

عوض ثابت عددونه لیکو په D_y یې بنیو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د x قیمت لاس ته

راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د y قیمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{cases}$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \quad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \quad D_y = 56$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{112}{28} = 4 \quad x = 4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{56}{28} = 2 \quad y = 2$$

5- د گراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په () صفحه د تابع په بحث کې وگورئ.

6- د متریکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متریکس (Matrixes):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطیلي ته وايي ترتيب ته متریکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متریکس په غټو خروفو بنودل کېږي او هغه اعداد يا حروف چې په متریکس کې لیکل کېږي د متریکس د عناصرو په نوم ياديږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول لیکل شوي وي د متریکس د سطري په نوم ياديږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول لیکل شوي وي د متریکس د ستون په نوم ياديږي د سطرونو شمېر په i او د ستونونو شمېر په j نيسي چې i او j طبيعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$

د مټریکس مرتبه:

که د مټریکس د سطرونو شمېر m او د ستونو شمېر یې n وي دغه مټریکس ته $m \times n$ مرتبه مټریکس وايي.

او داسې لیکل کېږي $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$

مثال: لاندې مټریکسونه حل کړئ؟

$$(a_{ij})_{3 \times 2} = (i + j)_{3 \times 2} - 2$$

$$(a_{ij})_{2 \times 2} = (i + j)_{2 \times 2} - 1$$

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = i + j$$

$$a_{12} = 1 + 2 = 3$$

$$a_{21} = 2 + 1 = 3$$

$$a_{11} = 1 + 1 = 2$$

$$a_{22} = 2 + 2 = 4$$

په نتیجه کې لاندې مټریکس لاس ته راځي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د مټریکس ډولونه:

مټریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري مټریکس: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \ 5 \ 9]_{1 \times 3}$

2- ستوني مټریکس: هغه مټریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

3- صفري مټریکس: هغه مټریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 0_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي مټریکس: هغه مټریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

لکه:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

مربعي يا مستطيلي متریکسونه دوه قطرونه لري چې يوه ته اصلي قطر يا (Main diagonal) او بل ته (Minor diagonal) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{21}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ فرعي قطر دی.

لاندي متریکسونه څه ډول متریکسونه دي: 1×3 او 4×1

5- قطري متریکس: هغه متریکس دی چې د اصلي قطر څخه په غیر نور عناصري صفر ونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متریکس: که د قطري متریکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متریکس ته سکالر متریکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متریکس: که د قطري متریکس داسې قطر عناصر یو (1) وي نو دې متریکس ته واحد متریکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلي متریکس: که د یوه متریکس د اصلي قطر لاندي او یا پورته عناصر صفر ونه وي دې متریکس ته مثلي متریکس وايي لکه.
پورتنی مثلي متریکس په لاندي ډول دی.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي مټریکس دی.

په انګلیسي کې ورته *Upper Tringolar matrix* او *Lower Tringolar matrix* وایي.

متقابل یا متضاد مټریکس:

هغه مټریکسونه چې عناصر یې یو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m \times n} = A(-a_{ij})_{m \times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د مټریکسونو جمع:

د مټریکسونو په جمع کې د مټریکسو د مرتبې مساوات ضرور دي یعنې که a_{ij} او b_{ij} دوه مټریکسونه ولرو کولای شو چې دغه ډول مټریکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ مټریکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د مټریکس تفریق:

په تفریق کې هم د مټریکس د تفریقولو لپاره د مټریکس د مرتبو مساوات ضرور دي.

که a_{ij} او b_{ij} وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راځي شويدي $A - B$ متریکس پيدا کړي؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - (-2) & -1 - (-1) \\ 3 - 3 & 1 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2 & -1 + 1 \\ 3 - 3 & +1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلی د قانون پیروي کوي مگر د متریکسونو تفریق د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي لکه

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلی د خاصیت پیروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مگر د متریکسونو په تفریق کې یې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنی که $A = a_{ij}$ او $k \in \mathbb{R}$ وي نو kA د C سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي kA پيدا کړي؟

$$kA = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 3 & 2 \times 6 \\ 2 \times 2 & 2 \times 1 & 2 \times 0 \\ 2 \times 1 & 2 \times 0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

د دوه متريکسونو ضرب :

د متريکس د ضرب لپاره بايد د يوه متريکس د سطرونو شمېر د بل متريکس د ستونو د شمېر سره مساوي وي يعنې که $A = (a_{ij})_{m \times n}$ او $B = (b_{ij})_{n \times p}$ وي کولای شو چې ضرب يې کړو.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

طريقه يې داسې ده چې د يوه متريکس لمړی سطر د دويم متريکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې يې ليکو او په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د متريکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پيدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1(-1) \\ -1 \times 1 + 0 \times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 + 1 \\ -1 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پيدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2 \times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1 \times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6 + 4 & 8 + 3 \\ -3 - 8 & 4 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

د متريکس د ضرب خواص:

1- د متريکس ضرب عميله د تبديلی د قانون پيروي نه کوي يعنې:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متريکسونو ضرب د اتحادي خاصيت پيروي کوي.

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

3- د مټریکسونو ضرب د توزیعي خاصیت پیروي کوي:

$$A(B + C) = AB + AC$$

د یوه مټریکس ترانسپوز مټریکس:

که د یوه مټریکس سطر په ستون او ستون یې په سطر بدل شي نو مټریکس ته ترانسپوز مټریکس وایي.

که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز مټریکس وایي په A^T کېږي.

که $A = A^T$ وي نو پدې صورت کې A ته متناظر مټریکس وایي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ لکه } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ یو متناظر مټریکس دی ځکه}$$

د ترانسپوز مټریکس خواص:

1- ترانسپوز مټریکس د خپل لمړني مټریکس سره مساوی وي.

$$(A^T)^T = A = [(a_{ij})^T]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه یا څو ترانسپوز مټریکسونو د جمع او تفریق حاصلونه د لمړنیو مټریکسونو د جمع د حاصلو او تفریق د حاصلو د ترانسپوز سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T + B^T + C^T \dots$$

$$(AB)^T = A^T \times B^T \quad 3$$

$$(\alpha A)^T = \alpha \times A^T \quad 4$$

$$(-A)^T = -A^T \quad 5$$

د ډیترمینانت

مربعی مټریکس ته ډیترمینانت وایي.

لکه که $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ مټریکس ولرو نو $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ یو ډیترمینانت دی او په $[A]$ سره ښودل کیږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطار او $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطار وایي.

د ډیترمینانت محاسبه

د اصلي قطار څخه فرعي قطار منفي کوو $[A] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

مثال: $[A] = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قیمت پیدا کړئ

حل: $[A] = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$

د ډیترمینانت د حل طریقه

ډیترمینانت په دوه طریقو حلېږي.

1- د ساروس په طریقه 2- د کرامر په طریقه

1- د ساروس د ډیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړو او پاتې 2×2 مرتبې ډیترمینانت محاسبه کوو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

دریم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع په عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حل کړئ

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4(6 \times 2 - (-3 \times 1)) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دویم- د کرامر په طریقه:

د دیترمینانت دوه لمړي ستونونه د دیترمینانت د باندې لیکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرو مجموعه منفي کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{مثال:}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5 \times (-1)\} \\ - \{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2 \times (-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$

$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194 \\ = -117$$

$$|B| = -117$$

د دیترمینانت خواص

1- که د $A_{n \times n}$ د مټریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفروي نو د دیترمینانت د صفرو سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n \times n}$ مټریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت یې صفري دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n \times n}$ د مټریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د A د مټریکس دیترمینانت د A^T د مټریکس د دیترمینانت سره مساوي دی.
د 2×2 مرتبي مټریکس ضربي معکوس د معکوس مټریکس سره د مربعي مټریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نو دی متریکس ته *Singular Matrix* وائي او که $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته *Non singular Matrix* وايي. هغه متریکسونه چې معکوس لري.

1- چې متریکسونه مربعي وي يعنی د $A_{n \times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متریکسونه یو د بل معکوس دي. حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ليدل کيږي چې $AB = BA = 1$ دي نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقي متریکس *Adjoin of Matrix*

که د یوه متریکس د اصلي قطر د عناصرو ځایونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغیر شي دغه متریکس ته الحاقي متریکس وايي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متریکس د یوه متریکس د معکوس متریکس د لاس ته راوړلو لپاره استعمالیږي. طریقه یې داسې ده چې د الحاقي متریکس د دیترمینانت د قیمت په معکوس کې ضربوو د راکړ شوي متریکس معکوس متریکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|}$$

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل :- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ویلای شو چې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

a: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

b: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

د متریکس پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دی غواړو چې د متریکس پواسطه یې حل کړو د x او y د ضربو متریکس په $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په B ښی. او د x او y متریکس په X ښیو.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نوليکو چې:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{يا}$$

مثال: لاندې دوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = 1 \quad \& \quad y = 2$$

تمرین

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د گوس Goose طريقه د افنا طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلور مجهوله، پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلې په مختلفو طريقو حل کړو.

پنجم فصل

دویمه درجه یو مجهوله معادلی

هغه معادلی دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې دادي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې a, b, c ثابت عددونه دي (x) مجهول دي څرنگه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وايي.

خصوصي حالتونه

1- که $b=c=0$ وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلی دواړه جذرونه صفر دي. یعنې :

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

(x) مشترک نيسو او معادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بیا هر قوس په نولیت سره د صفر سره مساوي کوو او د معادلی جذرونه پیدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

$$cx_1 = 0$$

$$5x + 11 = 0$$

$$5x = -11$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$

$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادې چې a او c بايد مختلف علامه وي. او که نه نو د حقيقي اعدادو په سيټ کې حل نلري. د مختلطو اعدادو په سيټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

$$1: 5x^2 + 21x = 0 \quad 2: 11x^2 - 22x = 0 \quad 3: 2x^2 + 28x = 0$$

$$4: 7x^2 - 63 = 0 \quad 5: 4x^2 + 16 = 0 \quad 6: -7x^2 + 28 = 0$$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې په څلورو طریقو حلېږي.

1- د تجزیې پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

4- د گراف پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزیې پواسطه د یو مجهوله دویمه درجه معادلو حل:

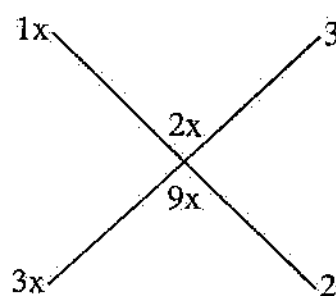
(a) او (c) تجزیه کوو د ضربی عواملو څخه یې داسې یوه یوه جوړه ضربی عوامل راڅلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه یې (b) شی بیا دغه ضربی عوامل په چارت کې لیکو او د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پیدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال: $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزیې پواسطه حل کړئ:

$$a = 3 = 1 \cdot 3 = -1(-3)$$

$$c = 6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 6 = -2(-3) = -1(-6)$$

$$b = 11$$



$$(x + 3)(3x + 2) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راګرځوی ده غواړو چې د تکمیل مربع پواسطه یې حل کړو ټول حدونه د x^2 په ضریب ویشو.

$$\frac{5x^2}{5} - \frac{17x}{5} + \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x + \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x = -\frac{6}{5}$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x + \left(\frac{17}{10}\right)^2 = \left(\frac{17}{10}\right)^2 - \frac{6}{5}$$

$$\left(x - \frac{17}{10}\right)^2 = \frac{289}{100} - \frac{6}{5} = \frac{289 - 120}{100} = \frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{17}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x - \frac{17}{10} = \pm \frac{13}{10}$$

$$x = \frac{17}{10} \pm \frac{13}{10} = \frac{17 \pm 13}{10}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{2}{5} = 0.4$$

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

لمړې د محمد بن موسی فارمول ثبوتوو.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

داساتيا لپاره $b^2 - 4ac$ په Δ ښيو:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

نو:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

د (Δ) په باب درې حالتونه موجود دي.

1- چې $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذرونه لري او جذرونه يې:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پيدا كيږي.

2- چې $\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري او جذر يې د $x = \frac{-b}{2a}$ په واسطه پيدا كيږي.

3- چې $\Delta < 0$ وي معادله د حقيقي اعدادو په سيټ کې جذرونه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2 - 13x - 24 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 7 \times (-24)$$

$$\Delta = 169 + 672 = 841$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{841}}{2 \times 7} = \frac{13 + 29}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - \sqrt{841}}{2 \times 7} = \frac{13 - 29}{14} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{8}{7}$$

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \times 9 \times 25 = 900 - 900 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یو جذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2 \times 9} = -\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2 + 3x + 10 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times 10 = 9 - 80 = -71$$

څرنگه چې $\Delta < 0$ دې نوم معادله جذر نه لري.

تمرین

لاندې معادلې د تجزیې پواسطه حل کړئ.

$$1: 3x^2 + 5x - 42 = 0 \quad 2: 7x^2 - 29x + 4 = 0 \quad 3: 2x^2 + 3x - 14 = 0$$

لاندې معادلې د تکمیل مربع پواسطه حل کړئ.

$$1: 11x^2 - 17x - 48 = 0 \quad 2: 13x^2 + 7x - 360 = 0 \quad 3: 8x^2 - 65x + 102 = 0$$

لاندې معادلې د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

$$1: 2x^2 + 3x - 65 = 0 \quad 2: 9x^2 - 43x + 48 = 0$$

$$3: 25x^2 - 11x - 192 = 0$$

د محمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که b جفت وي د b نیمایي په $\frac{b}{2} = \hat{b}$ او $b = 2\hat{b}$ کېږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د b په عوض $(2\hat{b})$ لیکو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2\hat{b}) \pm \sqrt{(2\hat{b})^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\hat{b} \pm \sqrt{4\hat{b}^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2\hat{b} \pm \sqrt{4(\hat{b}^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2\hat{b} \pm 2\sqrt{\hat{b}^2 - ac}}{2a} = \frac{2(-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - ac})}{2a}$$

$$= \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\hat{b}^2 - ac$ په Δ ښیو یعنې:

$$\Delta = \hat{b}^2 - ac$$

د Δ په باب هم درې حالتونه موجود دي.

1- که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذرونه لري او جذرونه یې د $x = \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\Delta}}{a}$ پواسطه پیدا کېږي.

2- که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري، او جذر یې د $x = \frac{-\hat{b}}{a}$ پواسطه پیدا کېږي.

3- که $\Delta < 0$ وي معادله جذرونه لري.

$$\text{مثال: } 3x^2 + 14x - 40 = 0$$

$$\Delta = \hat{b}^2 - ac = 7^2 - 3(-40) = 49 + 120 = 169$$

$$x = \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-14 \pm 13}{3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = -9$$

مثال: $4x^2 + 12x + 9 = 0$ معادله حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یو جذر لري.

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{so} \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\Delta = -19$$

$$\Delta < 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرین

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د یو مجهوله دویمه درجه معادلې د جذرو او ضریبونو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1^4 + x_2^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسی فارمولونه لیکو

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \text{ ثبوت 2}$$

د د محمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \text{ ثبوت 3}$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$\text{ثبوت } x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3} \quad \text{د : 4}$$

$$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

$$\text{ثبوت } x_1^4 + x_2^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4} \quad \text{د : 5}$$

$$x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه، د جذرونو د ضرب حاصل، د جذرو د مربعگانو مجموعه پیدا کړئ.

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} = \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{-3913}{125}$$

د جذرونه له مخې د یو مجهوله دویمه درجه معادلې جوړول

که د یوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله یې پیدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړ شویو جذرونو مربوطه معادله لاس ته راځي. د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \quad 1$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad 2$$

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \text{ ثبوت}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

مثال: د یوې معادلې جذرونه په ترتیب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله یې پیدا کړئ

حل:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - (5 - 7)x + (5)(-7) = 0$$

$$x^2 - (-2)x - 35 = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

تمرین

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1 = 3$ & $x_2 = \frac{3}{5}$ 2: $x_1 = \frac{7}{3}$ & $x_2 = 5$

3: $x_1 = \sqrt{3}$ & $x_2 = 2$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د جذرو مطالعه کول

د جذرو علامې په یوه جدول مطالعه کوو

که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P > 0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S > 0$ وي دواړه جذرونه مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P > 0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S < 0$ وي دواړه جذرونه منفي دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P < 0$ وي جذرونه مختلف علامه دي	که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P < 0$ وي جذرونه مختلف علامه دي	که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري	X	که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري		که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
که $\Delta < 0$ وي	معادله جذر نه لري	

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ د جذرو علامې مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف علامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذري منفي دي.

د دیکارت قاعده

دیکارت د دویمه درجه معادلو د علامو تغیر ته تحول وایي.

دیکارت وایي:

1- که دویمه درجه معادلو د علامو دوه تحول لرل د معادلې دواړه جذرونه مثبت دي.

2- که د علامو تحول یو د معادلې یو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه و نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه یې منفي دي.

لکه:

$$5x^2 - 17x + 6 = 0 \text{ دواړه جذرونه یې مثبت دي.}$$

$$3x^2 + 7x - 26 = 0 \text{ یو جذري مثبت دي.}$$

$$x^2 + 169x + 4 = 0 \text{ دواړه جذرونه یې منفي دي.}$$

دهغه معادلو حلول چې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي:

شپږ قسمه معادلې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي.

1- دريمه درجه معادلي:

هغه دريمه درجه معادلي چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري دداسې معادلود حل لپاره x مشترک نيسو او معادله د دوه فکتورو په حاصل ضرب بدلوو هر فکتور د صفر سره مساوي کوو د معادلي جذرونه لاس ته راځي.

$$\text{مثال: } 5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \quad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلي:

هغه څلورمه درجه معادلي چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي. طريقه يې داسې ده چې x^2 په y نيسو څلورمه درجه معادله په دويمه درجه معادله بدليږي. دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دويمه درجه معادلي دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه به يې مثبت او دوه به يې منفي وي.

2- که د دويمه درجه معادلي يو جذر مثبت و نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې يو به يې مثبت او بل به يې منفي وي.

3- که دويمه درجه معادلي مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دويمه درجه معادلي جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال: لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

حل: x^2 په y ښیونو $x^4 = y^2$ کيږي

$$3y^2 - 7y - 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$\Delta > 0$$

معادله دوه جذره لري یو جذر یې مثبت او بل یې منفي دی نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$y_1 = 4 \quad y_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 = y = y_1 = 4$$

$$x^2 = 4 \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ:

$$1- 4x^2 + 3x - 45 = 0$$

$$2- 7x^2 - 11x - 6 = 0$$

$$3- 5x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$4- 13x^2 + x - 14 = 0$$

$$5- x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$6- 7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$$

3- جذري معادلې:

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادلو بدليدلای شي. طریقه یې داسې ده چې $\sqrt{x}$ په y ښیو بیا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کيږي او دویمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال: $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دویمه درجه معادله بدله کړئ او حل یې کړئ؟

حل: $\sqrt{x} = y$ ښیو نو $x = y^2$ کيږي د (x) په عوض (y^2) او د $(\sqrt{x})$ په عوض (y) وضع کوو.

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$

$$\Delta = 100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلی چې توانونه یې کسري وي اود یو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په (y) ښویي دواړه خواوې مربع کوو نو $(x^{\frac{2}{3}} = y^2)$ کیږي.

$$5y^2 + 3y - 26 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$$

$$\Delta = 529$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \quad \therefore y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \quad \therefore y_2 = -2\frac{3}{5}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \quad x^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

$$x_1 = 8$$

تمرین:

لاندې معادلی حل کړئ.

1- $x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

۵- هغه معادلی چې توانونه یې کسري وي:

هغه معادلی چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.

په $x^{\frac{m}{2n}}$ او $x^{\frac{m}{n}}$ په y^2 بنیو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$
دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول یا په کومه بله طریقه حلوو قیمتونه یې پیدا کوو د y د قیمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قیمت پیدا کوو د معادلی جذرونه لاس ته راځي.

مثال: د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلی جذرونه پیدا کړئ؟

$$x^{\frac{1}{3}} = y \quad \text{بنیو نو} \quad x^{\frac{2}{3}} = y^2 \quad \text{کیري}$$

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$

$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$

$$y_1 = 3 \quad y_2 = -\frac{11}{2}$$

$$\because x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \quad \therefore x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \quad \& \quad x_1 = 27$$

$$\because x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \quad \therefore x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$

$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرین:

لاندې معادلی دویمه درجه معادلو ته واړوئ؟

$$1: 5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0 \quad 2: 4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$$

عبارتي سوالونه

1: د (A) او (B) ددوه ښارو ترمنځ فاصله (450) کيلومتره ده يو موټر سهار په اووه بجې په يو سرعت د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجې د (x + 15) کيلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په يو وخت کې د (B) ښار ته ورسيدل د هر يوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+15} = 1$$

$$\frac{450(x+15) - 450x}{x(x+15)} = 1$$

$$\frac{450x + 6750 - 450x}{x(x+15)} = 1$$

$$\frac{6750}{x(x+15)} = 1$$

$$x^2 + 15x = 6750$$

$$x^2 + 15x - 6750 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (15)^2 - 4 \times 1 \times (-6750) = 225 + 27000 = 27225$$

$$\Delta = 27225$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{27225}}{2 \times 1} = \frac{-15 \pm 165}{2}$$

$$x_1 = \frac{-15 + 165}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$$x_2 = \frac{-15 - 165}{2} = \frac{-180}{2} = -90$$

2- د يوه قايم الزاويه مثلث ضلعي په ترتيب سره (x + 1) ، (x + 2) او (x + 3) دي د مثلث ضلعي پيدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

۳- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د يوه ارتفاع د قاعدې څخه يو متر او د بل ارتفاع د قاعدې څخه درې متره زياته ده او د مساحتو تفاضل يې اوه متر مربع دی د هر يوه مساحت قاعده او ارتفاع پيدا کړئ.

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2} - \frac{x(x+1)}{2} = 7$$

$$\frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{2} = 7 \Rightarrow \frac{2x}{2} = 7 \Rightarrow x = 7$$

قاعده $x = 7$

$x + 1 = 8$ د کوچني مثلث ارتفاع

$x + 3 = 10$ د لوی مثلث ارتفاع

۴- د يوه عدد د طرفينو د ضرب حاصل (323) عدد پيدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1) = 323$$

$$x^2 - 1 = 323$$

$$x^2 = 323 + 1 = 324$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{324}$$

$$x = 18$$

۵- د يوه مستطيل اوږدوالی تر سور درې متره زيات دی که مساحت يې (88) ساتي متر مربع وي سور او اوږدوالی يې پيدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3) = 88$$

$$x^2 + 3x - 88 = 0$$

$$\Delta = x^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-88) =$$

$$9 + 352 = 361$$

$$\Delta = 361$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm 19}{2} \Rightarrow x_1 = 8 \Rightarrow x_2 = -11$$

6- یو سړی د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته په یوه سرعت روان شوېله وړځ یې په خپل سرعت کی دوه متره زیادت راوست نیم ساعت مخکی ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کیلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20(x+2) - 20x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20x + 40 - 20x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{40}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2x = 80$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = 1^2 - 1(-80) = 1 + 80 = 81$$

$$\Delta = 81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{1} = -1 \pm 9 = 8$$

$x = 8$ اولنی سرعت

$x + 2 = 10$ اخرنی سرعت

7- د یوې دایرې مساحت (154) سانتی متر مربع دې شعاع یې خوده؟

حل:

$$\pi r^2 = 154$$

$$\frac{22}{7} r^2 = 154$$

$$\frac{7}{22} \times \frac{22}{7} r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$$

$$r^2 = 49$$

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{49}$$

$$r = 7$$

عبارتي سوالونه

- 1- د يوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه $(3cm)$ زياته ده مساحت يې $27cm^2$ دې قاعده او ارتفاع يې پيدا کړئ؟
- 2- د يوه مستطيل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زيات دی مساحت يې $(24cm^2)$ دی سور او طول يې پيدا کړئ؟
- 3- د يوه دایري مساحت (616) ساتي متر مربع ده شعاع يې څو ده؟
- 4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده يو موټروان په يوه سرعت سره دا فاصله طی کوي د بېرته راتگ په وخت کې $5m$ په خپل سرعت کې تغير راوړي يو ساعت مخکې رارسېږي د تگ او راتگ سرعت يې پيدا کړئ؟
- 5- احمد د محمود څخه يوه روپۍ زياته لري که د پيسو د ضرب حاصل يې (840) وي د هر يوه روپۍ پيدا کړئ؟
- 6- يو سړی په خپله ځمکه باندې دېوال تاووي د دېوال سور نيم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته يې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکې مساحت څو وي؟
- 7- د يوې دایري مساحت د هغې تر محيط (5) واړه زيات دې ضلعه يې پيدا کړئ؟
- 8- د يوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $(\frac{82}{9})$ ده عدد پيدا کړئ؟
- 9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟
- 10- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د يوه ارتفاع د قاعدې څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدې څخه د دوه واحدو په اندازه زياته ده که مساحتونه يې جمع شي $(76cm^2)$ کيږي د مثلثو قاعدې او ارتفاعگانې پيدا کړئ؟
- 11- احمد د محمود درې چنده کار کوي که دواړه په شريکه يو کار په (3) ورځو کې وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟
- 12- که د يوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کيږي عدد پيدا کړئ؟

- 13- که د یوه سپري اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ يې گټلي وي وواياست چه څو ورځي کار يې کړي دي؟
- 14- د يوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پيدا کړي؟
- 15- د احمد او محمود د پيسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل يې (609) ده د هر يوه پيسي څو دي؟
- 16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زياتي او د محمود روپۍ (5) کمي شي د يوې ورځي د اجوري د ضرب حاصل يې (2475) روپۍ کيږي د هر يوه اجوره څو ده؟
- 17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لگيا دي احمد خپل کار تر محمود درې ورځي د مخه خلاصوي که په شريکه يې په دوه ورځو کې وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟
- 18- د مربع مساحت (125316cm^2) دی ضلعه يې پيدا کړي؟
- 19- د يوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زياته ده که مساحت يې (675cm^2) وي قاعده او ارتفاع به يې څو وي؟
- 20- يو موټر سهار په اته بجي حرکت کوي بل موټر يوساعت وروسته (10) کيلو متر سرعت په زيات وزيږي روان شو که دواړه په يوه وخت کې مطلوب ته رسيږي که وهل شوي فاصله (900) کيلو متره وي د هريوه سرعت پيدا کړي.

شپږم فصل

غېرمساوات

د دوه افادو د عددي قيمتونه برابري ته غېرمساوات وايي.

د غېرمساوات علامه دا ($<$) يا دا ($>$) ده هره افاده چې ددې علامې مخې ته ليکل شوی وي لويه ده تر هغه افادې چې د علامې شاته ليکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

يا لکه $45 > 18$ او داسې نور.

د غېرمساوات خواص:

1- که د غېرمساوات د دواړو خواو سره عين عدد جمع شي دغېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 11 &< 19 \\ 11 + 8 &< 19 + 8 \\ 19 &< 27 \end{aligned}$$

2- که د غېرمساوات د دواړو خواو څخه عين عدد منفي شي د غېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 13 &> 9 \\ 13 - 10 &> 9 - 10 \\ 3 &> -1 \end{aligned}$$

3- که دغېرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد کې ضرب شي دغېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 12 &> 4 \\ +2(12) &> +2(4) \\ 24 &> 8 \end{aligned}$$

4- که د غېرمساوات دواړه خواوې په منفي عدد کې ضرب شي دغېرمساوات علامه تغير خوري. لکه:

$$15 < 21$$

$$15(-2) > 21(-2)$$

$$-30 > -42$$

5- که د غیر مساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسیم شي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$

$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$

$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$

$$3 < 5$$

که د غیر مساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسیم شي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$

$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$

$$\frac{-2}{-2} < \frac{-2}{-2}$$

$$-15 < -12$$

7- که د غیر مساوات دواړه خواوې معکوس شي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیر مساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$

$$(2)^3 > (-9)^3$$

$$8 > -729$$

9- که د غیر مساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته درې حالتونه موجود دي.

الف: که د غیر مساوات دواړه خواوې مثبت وي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$

$$5^2 > 3^2$$

$$25 > 9$$

ب: که د غیر مساوات دواړه خواوې منفي وي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$\begin{aligned} -2 &> -5 \\ (-2)^2 &< (-5)^2 \\ 4 &< 25 \end{aligned}$$

ج: که د غېرمساوات د یوې خوا عدد مثبت او د بلې خوا عدد منفي وي دلته درې حالتونه موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غېرمساوات علامه تغییر نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 7 &> -5 \\ (7)^2 &> (-5)^2 \\ 49 &> 25 \end{aligned}$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي د غېرمساوات علامه تغییر خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 4 &> -7 \\ (4)^2 &< (-7)^2 \\ 16 &< 49 \end{aligned}$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غېرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$\begin{aligned} 6 &> -6 \\ (6)^2 &= (-6)^2 \end{aligned}$$

د غېرمساوات د حل سیت:

د حقيقي اعدادو هغه سیت چې په راکړ شوي غېرمساوات کې صدق کوي د غېرمساوات د حل سیت بلل کیږي.

د غېرمساوات اقسام

په دې کتاب کې موږ درې قسمه غېرمساواتونه مطالعه کوو.

1- یو مجهوله اوله درجه غېرمساوات

2- دوه مجهوله اوله درجه غېرمساوات

3- یو مجهوله دویمه درجه غېرمساوات

1- یو مجهوله اوله درجه غیر مساوات:

هغه غیر مساوات دي چې مجهول يې یو او د مجهول درجه يې یوه وي عمومي شکل يې دا دی: $ax + b \geq 0$ یا $ax + b \leq 0$.

د یو مجهوله غیر مساوات د حل طریقه:

معلوم د غیر مساوات بنی خواته او مجهول د غیر مساوات چپي خواته وړولارمی عملیې پری اجراء کوو په اخر کی د غیر مساوات دواړه خواوی د x په ضریب ویشود غیر مساوات دحل سیټ لاس ته راځي.

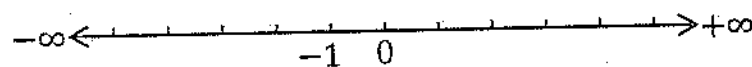
مثال: لاندې غیر مساوات حل کړئ:

$$\begin{aligned} 3(4x + 11) - 2x + 6 &\leq 15x + 44 \\ 12x + 33 - 2x + 6 &\leq 15x + 44 \\ 10x + 39 &\leq 15x + 44 \\ 10x - 15x &\leq 44 - 39 \\ -5x &\leq 5 \\ \frac{-5x}{-5} &\geq \frac{5}{-5} \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

د حل سیټ يې عبارت دی له:

$$A = \{x / -1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددوپه کرښه داسې ښودل کیږي:



تمرین:

لاندې غیر مساواتونه حل کړئ:

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

مطلقة قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقة قیمت وایي. د مطلقة قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقة قیمت یې مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ لیکل کیږي. لکه $|-15|$ یا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقة قیمت معنی ورکوي او داسې لیکل کیږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غبرمسوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړ شوي عدد څخه لویه او یو یې د عدد د متناظر څخه کوچنۍ فرضوو.

$$3x - 11 > 19$$

$$3x > 19 + 11$$

$$3x > 30$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$$

$$x > 10$$

$$A = \{x/x > 10\}$$

$$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$$

$$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$$

$$B = \{x/x < -\frac{8}{3}\}$$

$$C = A \cup B \left\{ x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3} \right\}$$

د بېنوم داشاری څېړل

د بېنوم عمومي شکل $(ax + b)$ دی د بېنوم داشاری د څېړلو لپاره (a) مشترک نيسو د قوس د باندې یې لیکو د بېنوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داځن کی یې لیکو. د قوس جذر پیدا کوو.

$$ax + b = a \left(x + \frac{b}{a} \right)$$

دلته د (a) په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

	$-\frac{b}{a}$		
x	$-\infty$		$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	-	0	+
$a \left(x + \frac{b}{a} \right)$	-	0	+

د بېنوم اشاره د جذر څخه کښته منفي او پورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

	$-\frac{b}{a}$		
x	$-\infty$		$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	-	0	+
$a \left(x + \frac{b}{a} \right)$	+	0	-

د بېنوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د $(3x - 6)$ اشاره وڅېړئ؟

حل: $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

		2	
x	$-\infty$		$+\infty$
$x - 2$	-	0	+
$3(x - 2)$	-	0	+

د جذر څخه کښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x + 15$ اشاره وڅېړئ؟

حل:

$$-5x + 15 = -5(x - 3)$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

		3	
x	$-\infty$		$+\infty$
$x - 3$	-	0	+
$-5(x - 3)$	+	0	-

د جذر څخه کښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وڅېړئ؟

1- $2x - 12$

2- $3 - x$

3- $-4x + 12$

4- $4x - 20$

5- $-6x - 18$

د هغه افادو د اشارو څېړل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو او ضربوونکي د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $(4 - x)(x + 4)$ اشاره وڅېړئ؟

حل:

$$4 - x = 0 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

x	$-\infty$	-4	$+$	4	$+\infty$
$4 - x$	+	+	0	-	
$x + 4$	-	0	+	+	
$(4 - x)(x + 4)$	-	0	+	0	-

د جذرو منځ کې د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کې منفي ده.

تمرین:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل را کړ شوي دي اشاره يې وڅېړئ؟

- 1- $(2x - 12)(3 - x)$ 2- $(3 - x)(x + 7)$
 3- $(-4x + 12)(x + 8)$ 3- $(-6x - 18)(x + 5)$

د کسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخبرج اشارې پيدا کوو او یو پر بل يې ویشو د کسر اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅېړئ؟

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	-4	$+$	3	$+\infty$
$x + 4$	-	0	+	+	
$2x - 6$	-	-	0	+	
$\frac{x + 4}{2x - 6}$	+	0	-	0	+

د جذرو منځ کې د کسر اشاره منفي او په خارج کې مثبت ده.

تمرین:

د لاتدی کسره اشاری وڅیړئ:

1: $\frac{2x+6}{x-1}$

2: $\frac{3x+4}{2-x}$

3: $\frac{x+2}{12x-18}$

4: $\frac{-x-1}{1-2x} + 3$

دهغه غېرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بېنومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بېنومو اشاری پیدا کوو او سره ضربوو یې د حاصل ضرب اشاری لاس ته راځي. دهغه اشاری د غېرمساوات د علامی سره مقایسه کوو هر ه اشاره چې د غېرمساوات د علامی سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دي.

مثال:

$$(x+3)(x-4) > 0$$

$$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x-4$	-	-	0	+
$(x+3)(x-4)$	+	0	-	+
$(x+3)(x-4) > 0$	د حل سیټ	د حل سیټ نه دی		د حل سیټ

تمرین:

د لاتدی غېرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ:

1: $(x-8)(2-x) < 0$
 > 0

2: $(3x-6)(12-x)$

3: $(x-1)(1-x) \leq 0$

دهغه غېرمساوات دحل د سيټ پيدا کول چې د کسر په شکل وي.

دصورت او مخرج اشارې پيدا کوو دصورت اشاره د مخرج په اشاره ويشود کسر اشارې لاس ته راځي. دغه اشارې د غېرمساوات د علامې سره مقايسه کوو د غېرمساوات د حل سيټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غېرمساوات د حل سيټ پيدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2} + 1 < 0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2} < 0$$

$$\frac{2x+2}{x-2} < 0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	$+$
$\frac{2x+2}{x-2} < 0$	د حل سيټ نه دی	د حل سيټ نه دی	د حل سيټ نه دی	د حل سيټ نه دی

تمرین:

د لاندې کسري غېرمساواتو دحل سيټ پيدا کړئ:

1: $\frac{2x+1}{x-1} + 2 > 0$

2: $\frac{4x+7}{2x-3} - 1 < 0$

3: $\frac{x-6}{x+2} - 2 \geq 0$

دیو مجهوله غیر مساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیر مساواتو ته د یو مجهوله غیر مساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیت پیدا کوو هغه سیت چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیت دی.

مثال: د لاندې غیر مساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$

$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$5x + 20 = 0 \Rightarrow 5x = -20 \Rightarrow x = -4$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$3x - 6 < 0$	-	-	0	+
$5x + 20 < 0$	-	0	+	+
د حل سیت				

تمرین:

په لاندې ډول دیو مجهوله غیر مساوات سیستمونه راکړئ شوي دي حل یې کړئ.

1- $7x - 11 > 0$ & $4x + 13 > 0$

2- $13x + 2 > 0$ & $5x - 8 < 0$

دوه مجهوله غیر مساوات

هغه غیر مساوات دی چې مجهولونه یې دوه او د هر مجهول درجه یې یوه وي عمومي شکل یې دا $ax + by \geq c$ یا $ax + by \leq c$ دي

د دغه رنگه غیر مساوات د حل د سیمې د لاس ته راوړلو لپاره د غیر مساوات گراف رسموو گراف مستوي په دوه برخو ویشي یوه برخه یې په غیر مساوات کې صدق کوي او بله برخه یې نه کوي دغه برخه یې کرښې، کرښې کوو بله برخه یې د غیر مساوات د حل سیمې دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غیر مساوات حل کړئ.

حل: غیر مساوات په مساوات بدلوو او گراف یې رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

$$-1 \text{ نو } x = 0$$

$$2y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

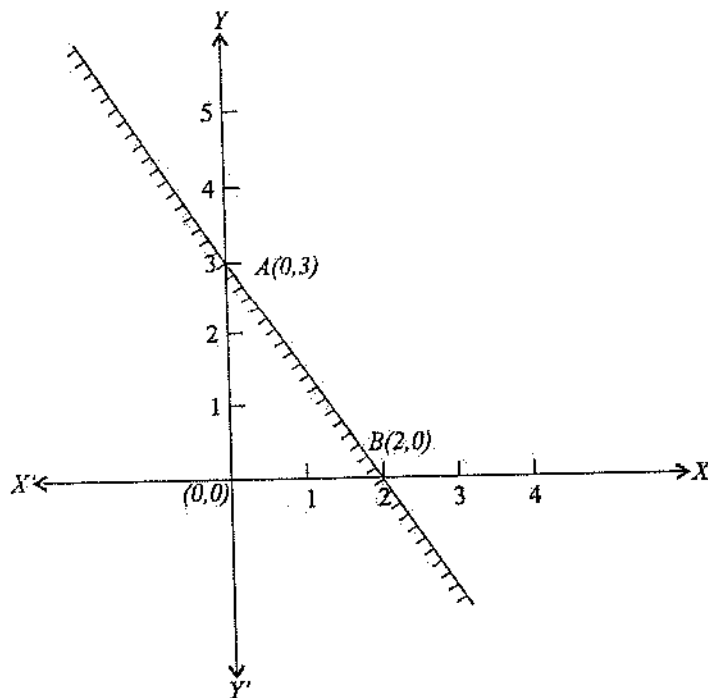
$$A(0,3)$$

$$-2 \text{ فرضوو نو } y = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



دوه مجهوله غير مساوات سيستم:

په يوه کارتيزني مستوي کي دوه غير مساواتونه د غير مساوات سيستم وايي.

$$\text{لکه: } 3x + 5y < 15 \text{ او } 2x - 3y > 6$$

دغه دوه غير مساواتونه د غير مساوات سيستم وايي.

د دوه مجهوله غير مساوات د سيستم د حل طريقه:

غير مساواتونه په مساواتو بدلولو او د هر مساوات کرښه يعنې گراف رسمولو هر گراف مستوي په دوه برخو ويشي چې يوه برخه يې په مربوطه غير مساوات کي صدق کوي. د هر غير مساوات د حل سيټ پيدا کوو. څرنگه چې د غير مساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ويشي چې يوه برخه يې په دواړو غير مساواتو کي صدق کوي چې همدغه برخه د سيستم د حل سيټ دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \Rightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضو نو:

$$5y = 15 \quad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \quad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \quad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

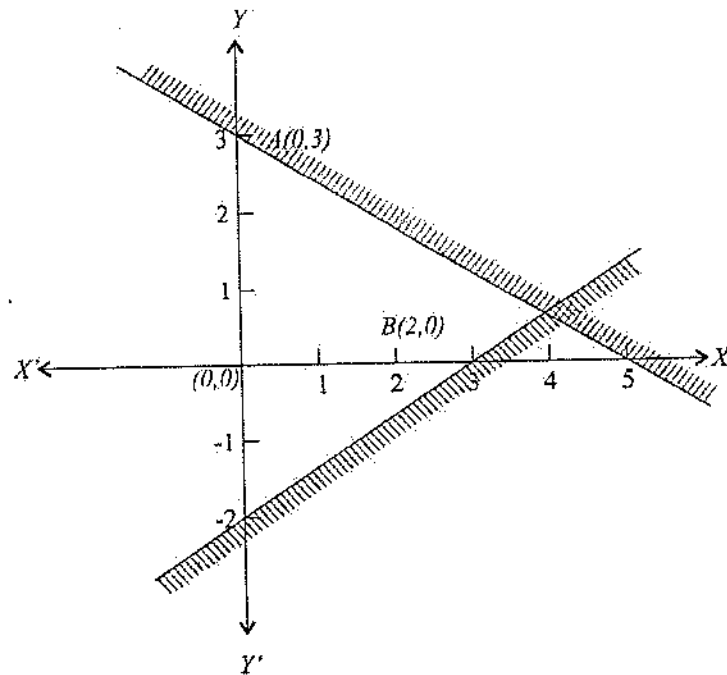
$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

$$C(0,-2)$$

$$y = 0$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$



که درې دوه مجهوله غیر مساواتونه راځي شوي وي د گراف د ترسیم په وخت کې مثلث لاس ته راځي د څلور غیر مساواتونو څخه څلور ضلعي په همدې ترتیب د دوه مجهوله غیر مساواتونو شمېر د مضلعگانو د ضلعو شمېر راښيي.

یو مجهوله دویمه درجه غیر مساوات

هغه غیر مساوات دې چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې دوه وي عمومي شکل یې دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دې

د غیر مساوات د حل څخه مطلب د هغه سیت پیدا کول دي چې په غیر مساوات کې وضع شي او په غیر مساوات کې صدق وکړي.

د دویمه درجه غیر مساوات د حل طریقه

که د غیر مساوات دواړو خواوو ته حدونه موجود وي ټول د غیر مساوات چپي خوا ته وړو او لږمې عملیې پری اجراء کوو او د ترینوم شکل ته یې رااوړو او تجزیه کوو یې. د هر قوس جذر پیدا کوو د حل سیت یې په دوه طریقو پیدا کړي.

1- د جدول په طریقه 2- د سیت بلډر په طریقه

1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپي خوا ته او لوی جذر ښي خوا ته لیکو که د (a) علامه مثبت وه د جذر څخه کښته د قوس علامه منفي او پورته مثبت ده او که د (a) علامه منفي وه نو د جذر څخه کښته د قوس علامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دویمه درجه غیر مساوات د حل سیت پیدا کړئ:

$$3x^2 + 13x - 38 < 0$$

$$3x^2 - 6x + 19x - 38 < 0$$

$$3x(x - 2) + 19(x - 2) < 0$$

$$(x - 2)(3x + 19) < 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3x + 19 = 0 \Rightarrow 3x = -19 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-19}{3} \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{19}{3}$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	0	+
$3x + 19$	-	0	+	+
$(x - 2)(3x + 19)$	+	0	-	+
$(x - 2)(3x + 19) < 0$	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی

2- د سیتې بلډر په طریقه د دویمه درجه غېرمساوات حلول:

تر تجزیه کولو وروسته د غېرمساوات علامې ته ګورو که د غېرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي یو وار دواړه مثبت او بل وار دواړه منفي فرضوو او که د غېرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف علامه دي په نوبت سره یو مثبت او بل منفي فرضوو.

$$\text{مثال: } 5x^2 + 3x - 54 < 0$$

حل:

$$5x^2 - 15x + 18x - 54 < 0$$

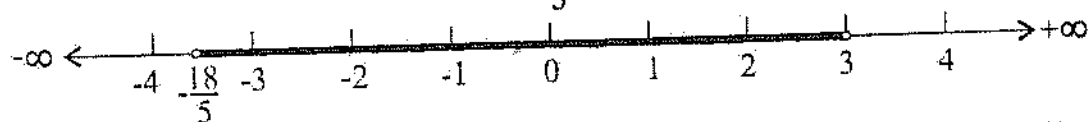
$$5x(x - 3) + 18(x - 3) < 0$$

$$(x - 3)(5x + 18) < 0$$

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$5x + 18 > 0 \Rightarrow 5x > -18 \Rightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-18}{5} \Rightarrow x > -\frac{18}{5}$$

$$A = \{x / -\frac{18}{5} < x < 3\}$$



مثال:

$$3x^2 - 13x + 12 > 0$$

$$3x^2 - 9x - 4x + 12 > 0$$

$$3x(x - 3) - 4(x - 3) > 0$$

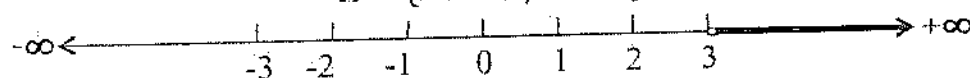
$$(x - 3)(3x - 4) > 0$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$3x - 4 > 0 \Rightarrow 3x > 4$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{4}{3} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$$



لاندې دویمه درجه غبرمساواتونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$

2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$

3. $\frac{3x-1}{x+2} \leq 2x + 3$

4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$

5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$

6. $\frac{x+1}{x} > 2$

7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$

8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$

9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$

10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$

11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$

12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$

13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$

14. $7x^2 + 3x \geq 0$

15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

اووم فصل

پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیر مشخص مقدار ته وایي
او په اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول څخه په غیر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر او دغې معادلی ته پارامتریک معادله وایي لکه:

$$(m + 3)x^2 + 3(m - 3)x - 19m - 6 = 0$$

د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلېږي:

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول
2- د پارامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولو په هره طریقه حلیدله حلوو یي
مگر ښه او آسانه طریقه یې د محمد بن موسی فارمول دی.
مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2 + mx - (6m^2 + 10m + 4) = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = m^2 - 4\{-(6m^2 + 10m + 4)\}$$

$$\Delta = m^2 + 24m^2 + 40m + 16$$

$$\Delta = 25m^2 + 40m + 16$$

$$\Delta = (5m + 4)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-m \pm \sqrt{(5m + 4)^2}}{2 \times 1} = \frac{-m \pm (5m + 4)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د m له جنسه پیدا کړئ؟

$$1: (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$$

$$2: (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$$

$$3: (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$$

$$4: x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$5: x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$$

2- د پارامتر د قیمت له مخې د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخې د پارامتر قیمت پیدا کوو او په معادله کې یې وضع کوي یو مجهول د دویمه درجه معادله لاس ته راځي. دغه معادله حلوو د معادلې د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $(-\frac{7}{2})$ ده په معادله د (m) کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow m = 3$$

$$\begin{aligned}
(m-1)x^2 + (2m+1)x - 5m &= 0 \\
(3-1)x^2 + (2 \times 3 + 1)x - 5 \times 3 &= 0 \\
2x^2 + 7x - 15 &= 0 \\
\Delta = b^2 - 4ac &= 7^2 - 4 \times 2 \times (-15) \\
\Delta &= 49 + 120 = 169 \\
\Delta &= 169
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 13}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 13}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2 - (m-1)x - 4m - 3 = 0$ معادلی د جذرو د ضرب حاصل
(-15) معادلہ حل کریں؟

حل:

$$\begin{aligned}
x_1 x_2 &= -15 \\
x_1 x_2 &= \frac{c}{a} = -15 \\
\frac{c}{a} &= \frac{-4m-3}{m-2} = -15 \Rightarrow -15m + 30 = -4m - 3 \\
-15m + 4m &= -3 - 30 \\
-11m &= -33 \\
\frac{-11m}{-11} &= \frac{-33}{-11} \\
m &= 3 \\
(m-2)x^2 - (m-1)x - 4m - 3 &= 0 \\
(3-2)x^2 - (3-1)x - 4 \times 3 - 3 &= 0 \\
x^2 - 2x - 15 &= 0 \\
\Delta = b^2 - 4ac &= (-1)^2 - 1(-15) = 1 + 15 = 16
\end{aligned}$$

$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{16}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1}$$

$$x_1 = \frac{1+4}{1} = \frac{5}{1} = 5 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-4}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow x_2 = -3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$ په معادلہ کی رابطه کی معادلہ حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}} = \frac{-b}{+c} = \frac{-(-3m)}{9m-1} = \frac{+3m}{9m-1} = \frac{12}{35}$$

$$108m - 12 = 105m$$

$$108m - 105m = 12$$

$$3m = 12$$

$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow m = 4$$

$$(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$$

$$(4-3)x^2 - 3 \times 4x + 9 \times 4 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(35) = 144 - 140 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{4}}{1} = 12 \pm 2$$

$$x_1 = 12 + 2 = 14 \Rightarrow x_1 = 14$$

$$x_2 = 12 - 2 = 10 \Rightarrow x_2 = 10$$

4- مثال: $(m-1)x^2 - (3m+1)x + 5m = 0$ معادلی جذرونہ د $(3x_1 - 1)(3x_2 - 1) = 70$ پہ رابطہ کی صدق کوی د معادلی جذرونہ پیدا کری؟

حل:

$$(3x_1 - 1)(3x_2 - 1) = 70$$

$$9x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 1 = 70$$

$$9x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 1 = 70$$

$$9\left(\frac{c}{a}\right) - 3\left(\frac{-b}{a}\right) = 70 - 1$$

$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right) - 3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right) = 69$$

$$\frac{45m}{m-1} - \frac{9m+3}{m-1} = 69$$

$$\frac{45m - 9m - 3}{m-1} = 69$$

$$\frac{36m - 3}{m-1} = \frac{69}{1}$$

$$69m - 69 = 36m - 3$$

$$69m - 36m = -3 + 69$$

$$33m = 66 \Rightarrow m = 2$$

$$(m-1)x^2 - (3m+1)x + 5m = 0$$

$$(2-1)x^2 - (3 \times 2 + 1)x + 5 \times 2 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7 \pm \sqrt{9})}{2 \times 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x_2 = 2$$

5- مثال: د $(m-4)x^2 - mx - 5m + 1 = 0$ په معادله کې د معادلې یو جذر (8) دی. د m قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}(m-4)8^2 - m \times 8 - 5m + 1 \\(m-4)64 - 8m - 5m + 1 = 0 \\64m - 256 - 13m + 1 = 0 \\51m - 255 = 0 \\51m = 255 \Rightarrow m = 5\end{aligned}$$

7- مثال: د m په کوم قیمت باندې $(m-2)x^2 - (m-3)x - 8m - 1 = 0$ معادله دوه مساوي مختلف علامه جذرونه لري؟

حل:

$$\begin{aligned}-\{-(m-3)\} = 0 \\m-3 = 0 \Rightarrow m = 3\end{aligned}$$

7- مثال: د (m) قیمت د $(2m-1)x^2 - (2m+1)x + 2m-4 = 0$ څخه داسې پیدا کړئ چې د معادلې یو جذر صفروي؟

حل: هغه وخت د معادلې یو جذر صفر کېږي چې $c = 0$ شي

$$\begin{aligned}-(2m+1) = 0 \\2m-4 = 0 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\m = 2\end{aligned}$$

8- مثال: د (m) په کوم قیمت $(2m+1)x^2 - (7m+2)x + 6m+1 = 0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چې $\Delta = 0$ شي.

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = \{-(7m+2)\}^2 - 4(2m+1)(6m+1) \\ \Delta = 49m^2 + 28m + 4 - 48m^2 - 32m - 4 \\ \Delta = m^2 - 4m \\ \Delta = 0 \therefore m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \\ m_1 = 0 \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4\end{aligned}$$

9- مثال: د په (m) کومو قیمتونو باندې $(m-1)x^2 - (2m+2)x + 2m-5 = 0$ معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چې $a = c$ شي

$$m-1 = 2m-5$$

$$m-2m = -5+1$$

$$-m = -4 \Rightarrow m = 4$$

10- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندې $(m+1)x^2 - mx - 4m = 0$ معادله دوه مختلف اشاره جذرونه لري؟

حل: کله چې $p < 0$ وي

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4m}{m+1} < 0$$

$$(m+1)^2 \left(\frac{-4m}{m+1} \right) < 0 \times (m+1)^2$$

$$-4m(m+1) < 0$$

$$-4m < 0$$

$$\frac{-4m}{-4} > \frac{0}{-4}$$

$$m > 0$$

$$m+1 > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$A = \{m \in \mathbb{R} / m > -1\}$$

11- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندې $(m-3)x^2 - (m-2)x - 2m+8 = 0$ معادله دوه حقيقي جذرونه لري؟

حل: کله چې $(\Delta > 0)$ تر صفروي

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \{-(m-2)\}^2 - 4(m-3)(-2m+8)$$

$$\Delta = m^2 - 4m + 4 + 8m^2 - 32m - 24m + 96$$

$$\Delta = 9m^2 - 60m + 100 = (3m-10)^2$$

$$\Delta > 0$$

$$(3m - 10)^2 > 0$$

$$3m - 10 > 0$$

$$3m > 10 \Rightarrow m > \frac{10}{3}$$

$$A = \{m \in \mathbb{R} / m > \frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د (m) په کوم قیمت د $(m-2)x^2 - (m-1)x - 5m = 0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل: کله چې $(b \text{ \& } c)$ دواړه منفي وي.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \{-(m-5)\}^2 - 4(m-2)(-6m)$$

$$\Delta = m^2 - 10m + 25 + 24m^2 - 40m$$

$$\Delta = 25m^2 - 50m + 25 = (5m - 5)^2$$

$$\Delta = (5m - 5)^2 \Rightarrow \Delta = 5m - 5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 5m - 5 > 0 \Rightarrow 5m > +5 \Rightarrow m > 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\{-(m-5)\} \pm \sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)} = \frac{m-5 \pm (5m-5)}{2(m-2)}$$

$$x_1 = \frac{m-5+5m-5}{2(m-2)} = \frac{6m-10}{2m-4}$$

$$x_2 = \frac{m-5-5m+5}{2m-4} = \frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د (m) قیمت داسې تعین چې معادله دوه مختلف اشاره جذرونه ولري.

1: $x^2 - 5x - 3m + 1 = 0$

2: $(2+3)x^2 - mx - 25m + 4 = 0$

3: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 15 = 0$

4: $mx^2 - (2m+1)x + m = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چې معادله دوه حقيقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چې معادله دوه موهمي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

اتم فصل

اکسپوننشیل (نمائي) معادلی

اکسپوننشیل معادلی هغه معادلی دي چه توان يې مجهول وي عمومي شکل يې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشیل معادلو قاعده خلاف د (1) وي يعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزايدة ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

د اکسپوننشیل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپي خواته وړو او معلوم د مساوات بڼي خواته وړو. لازمی عملیې پری اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی يې سره مساوي وي. نو توانونه يې هم مساوي دي دلته خو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کی توان مونوم يا بينوم وي نو يو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه يې پیدا کوو

1- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$

$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$

$$2 \times 3^x = 18 \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدی يې مساوي دي نو توانونه يې هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$

$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$

$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$

$$3^x \left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x \left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x \left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوو.

$$\frac{3}{5} \left\{ 3^x \left(\frac{5}{3} \right) \right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$

$$3^x = 27 = 3^3$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حده وي قاعدی یې مساوي اود یوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلې په دویمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلې حلوو اود جذرونه مخی یې د اکسپوننتشل معادلې جذرونه پیدا کوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$

$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$3^x = y$ وضع کوو.

$$y^2 - y - 702 = 0$$

$$(y - 27)(y + 26) = 0$$

$$y_1 = 27$$

$$y_2 = -26$$

$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننتشل معادلې دویمېن همېشه مثبت وي نوډ (y_2) د قیمت څخه د معادلې جذرونه پیدا کیږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه یې جذري حدونه وي دغه ډول معادلې هم په دویمه درجه یو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$

$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$(27^{\sqrt{x}})^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$27^{\sqrt{x}} = y \text{ وضع کوو.}$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y - 1)(y - 3) = 0$$

$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$

$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$

$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$

$$3\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = 0 \vee x = \frac{1}{9} \right\}$$

4- چه دوه داسی اکسپوننشیل معادلی را کپ شویوي چه چپ طرف یی د دوه داسی طاقت لرونکو عددو د ضرب حاصل وي چه قاعدی یی مساوي او توانونه یی مختلف وي دغسی معادلی په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$

$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$

$$2^{x+y} = 2^4$$

$$2^{x+y} = 2^4$$

$$\underline{2^{2x+3y} = 2^{15}}$$

$$x + y = 4$$

$$\underline{2x + 3y = 15}$$

$$2(x + y = 4)$$

$$2x + 2y = 8$$

$$\underline{\pm 2x \pm 3y = \pm 15}$$

$$-y = -7$$

$$y = 7$$

$$x + 7 = 4$$

$$x = 4 - 7 = -3$$

$$x = -3$$

تمرین

$$1. 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$$

$$2. 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$$

$$3. 9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$$

$$4. 5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$$

$$5. \frac{1-2^x}{2^x} = 1$$

$$6. 4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$$

$$7. 5^{2y} - 5^y - 600 = 0$$

$$8. \begin{array}{l} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{array}$$

$$9. 9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$$

$$10. 2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$$

$$11. \begin{array}{l} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{array}$$

$$12. \frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$$

$$13. 2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$$

نهم فصل

لوگاریتمی معادلی Logarithm's Equation:

لوگاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وایي:

او په اصطلاح کی د اکسپوننشل معادلو معکوسی معادلی ته لوگاریتمی معادله وایي.

فرضاً $(b = a^x)$ یوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله یي لوگاریتمی معادله ده.

چه داسی لیکل کیږي:

$$\log_a b = x$$

ته د $\log b$ قاعده وایي.

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوگاریتمی تابع او لوگاریتمی تابع په اکسپوننشل تابع بدله

کړو. لکه $(x = 2^3)$ یوه اکسپوننشل تابع ده. لوگاریتمی تابع یي عبارت له

$$(\log_2 x = 3) \text{ څخه ده.}$$

اوهمدا ډول $(\log_2 8 = x)$ یوه لوگاریتمی تابع ده اکسپوننشل تابع یي عبارت له

$$(8 = 2^x) \text{ څخه ده.}$$

د لوگاریتم خواص:

1- د (1) لوگاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کیږي:

$$\left(\begin{array}{l} \log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{array} \right)$$

2- د هر مثبت لوگاریتم په خپله قاعده باندی (1) کیږي. $(\log_b b = 1)$ دا ځکه چه

$$(b = b^1) \text{ کیږي.}$$

مثال:

$$\log_8 8 = 1$$

$$\log_x x = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت

$$\text{دی. } (\log_b b^r = r) \text{ ځکه چه } b \neq 1$$

$$b^x = b^r$$

4- د يوه حاصل ضرب لوگاريتم په يوه قاعده باندې د ضربېي عواملو د لوگاريتمو د مجموعې سره مساوي دي په هماغه قاعده باندې:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$$

$$\log_a M = x \quad M = a^x$$

$$\log_a N = y \quad N = a^y$$

اکسپوننشل معادلې طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

د چپ طرف لوگاريتم نیسو:

$$\log_a MN = x + y$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

1- مثال: $\log_2(2x) = ?$ لوگاريتم پیدا کړئ

حل:

$$\log_2(2x) = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

2- مثال: لاندې لوگاريتم پیدا کړئ؟

$$\log_x(xy) = ?$$

$$\log_x(xy) = \log_x x + \log_x y = 1 + \log_x y$$

5- د يوه خارج قسمت لوگاريتم په يوه قاعده باندې د صورت او مخرغ د لوگاريتمو د تفاضل سره مساوي دي په هماغه قاعده باندې.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M = x \quad M = a^x$$

$$\log_a N = y \quad N = a^y$$

اکسپوننشل معادلې طرف په طرف يو پر بل ویشو.

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

د چپ طرف لوگاریتم نیسو.

$$\log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$$

1- مثال: لاندې لوگاریتم حل کړئ؟

$$\log_2 \frac{x}{2} = ?$$

$$\log_2 \frac{x}{2} = \log_2 x - \log_2 2 = \log_2 x - 1$$

2- مثال:

$$\log_x \frac{5x}{y} = \log_x(5x) - \log_x y = \log_x x + \log_x 5 - \log_x y$$

$$\log_x \frac{5x}{y} = \log_x(5x) - \log_x y = 1 + \log_x 5 - \log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم په بله قاعده ونيول شي لوگاریتم یې عبارت دې توان ضرب یې دهغه لوگاریتم په همغه قاعده.

$$\log_b M^r = r \log_b M$$

$$\log_b M = x$$

$$M = b^x$$

$$M^r = (b^x)^r \Rightarrow M^r = b^{rx}$$

$$\log_b M^r = rx$$

$$\log_b M^r = r \log_b M$$

1- مثال:

$$\log_3 81^7 = ?$$

$$\log_3 81^7 = 7 \log_3 81 = 7 \log_3 3^4 = 4 \times 7 \log_3 3 = 28 \times 1 = 28$$

2- مثال:

$$\log_3 (3x)^5 = ?$$

$$\begin{aligned} \log_3 (3x)^5 &= 5 \log_3 (3x) = 5(\log_3 3 + \log_3 x) \\ &= 5(1 + \log_3 x) = 5 + 5 \log_3 x \end{aligned}$$

7- د يوه عدد لوگاريتم د يوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندې عبارت دې د قاعدې د توان معکوس ضرب يې دهغه عدد لوگاريتم د قاعدې د قاعدې په قاعده.

$$\begin{aligned} \log_{a^b} M &= \frac{1}{b} \log_a M \\ x &= \log_{a^b} M \\ (a^b)^x &= M \\ (a^x)^b &= M \Rightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Rightarrow a^x = \sqrt[b]{M} \\ x &= \log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} \log_a M \\ \log_{a^b} M &= \frac{1}{b} \log_a M \end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned} \log_{16} 32 &=? \\ \log_{16} 32 &= \log_{2^4} 32 = \frac{1}{4} \log_2 32 \\ &= \frac{1}{4} \log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4} \log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4} \\ \log_{16} 32 &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

د قاعدې د بدلولو فارمول:

که د يوه عدد لوگاريتم په يوه قاعده غوښتل شوی وي مگر په دغه قاعده باندې د راکړ شوي عدد د لوگاريتم پيدا کول مشکل وي نو د راکړ شوي عدد او د لوگاريتم د قاعدې لوگاريتم په يوه بله قاعده باندې پيدا کوو د عدد لوگاريتم د لوگاريتم د قاعدې په لوگاريتم ویشو د راکړ شوي عدد لوگاريتم په راکړ شوي قاعده باندې لاس ته راځي.

مثلاً $\log_b M$ غوښتل شوی دی لوگاريتم يې د لاندې فارمول پواسطه پيدا کېږي.

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ثبوت: $\log_b M$ په x ښیو.

$$\begin{aligned} \log_b M &= x \Rightarrow M = b^x \\ \log_a M &= \log_a b^x = x \log_a b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a M &= \log_b M \log_a b \\ \frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} &= \frac{\log_a M}{\log_a b} \\ \log_b M &= \frac{\log_a M}{\log_a b} \end{aligned}$$

1- مثال:

$$\begin{aligned} \log_{27} 81 &=? \\ \log_{27} 81 &= \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2- مثال:

$$\begin{aligned} \log_{32} 128 &=? \\ \log_{32} 128 &= \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

د لوگاریتم اقسام

لوگاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی:

1- اعشاري لوگاریتم یا معمولي لوگاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوگاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوگاریتم:

که د لوگاریتم قاعده (10) وه دی لوگاریتم ته اعشاري لوگاریتم وايي.

$$\log x$$

2- طبعي لوگاریتم:

هغه لوگاریتم دی چې قاعده يې (e) وي.

څرنگه چې د دواړو قسمو قاعدې معلومې دي نو قاعده يې نه ليکل کيږي.

$$\ln x$$

د یوه عدد د لوگاریتم پیدا کول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غېر د نورو عددو لوگاریتم دوه برخې لري. یوه برخه یې صحیح او بله برخه یې اعشاري ده. صحیح برخې ته کرکترستیک (*Characteristic*) او اعشاري برخې ته یې ماتیس (*Mantisa*) وایي. کرکترستیک د محاسبې پواسطه او ماتیس د جدول او یا د حساب د ماشین پواسطه پیدا کېږي. که د طاقت لرونکي عدد قاعده لس وي یوازې کرکترستیک لري او ماتیس نه لري.

1- مثال: $\log(1000000) = ?$ څو دی؟

$$\log(1000000) = \log 10^6 = 6$$

کرکترستیک د ارقامو د شمېر څخه یو کم وي.

2- مثال: $\log(0.000000001) = ?$ څو دی؟

$$\log(0.000000001) = \log 10^{-9} = -9$$

کرکترستیک یې د اعشاريې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه یې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه و نو دغه عدد ماتیس او کرکترستیک دواړه لري. لکه $\log(4560000)$ د داسې عدد د لوگاریتم د پیدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلولو چه یو رقم یې صحیح او نور رقمونه یې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته گورو عدد اوه رقمي دي نو په $(10^6 = 1000000)$ کې یې ضربوو په دې ترتیب کولای شو چه کرکترستیک یې پیدا کړو.

$$\log(4560000) = \log(4.56 + 10^6) = \log 4.56 + \log 10^6 = \log 4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستیک دي. ماتیس یې د $(\log 4.56)$ څخه لاس ته راوړو. طریقه یې داسې ده چه (6) د درې رقمي عددو د لوگاریتمي جدول په پورتنۍ کرښه کې پیدا کوو او (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پیدا کوو او د مخکیني لیکل شوي عدد شاته یې لیکو بیا کرکترستیک ته گورو که مثبت و نو د کرکترستیک په اندازه د جدول څخه د پیدا شوي عدد مخی ته صفرونه وږو. او که کرکترستیک منفي و د پیدا شوي عدد شاته د اعشاريې د علامې دواړو خواو ته صفرونه وږو.

$$\log(4560000) = \log 4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$

$$\log(4560000) = 6.6590$$

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوگاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او ماتیس یې مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسري بدلولو او د مخکیني سوال په څېر یې حلولو
مثال: $\log(0.00567)$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\log(0.00567) = \log(5.67 \times 10^{-3}) = \log 5.67 + \log 10^{-3} \\ = \log 5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوگاریتم $(3 - 0.3690)$ دی مگر که وغواړو چه د کرکترستیک او ماتیس څخه یو عدد جوړ کړو نو د کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی $(3^{-}, 3690)$ او که وغواړو چه ماتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او د ماتیس څخه یې منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$

$$\log(0.00567) = 0.3690 - 3 = 3^{-}, 3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوگاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000

2- $\log 5890000$

3- $\log 69200$

4- $\log 73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوگاریتم پیدا کړئ؟

1- $\log 0.00234$

2- $\log 0.0598$

3- $\log 0.000568$

4- $\log 0.008$

د صفر لوگاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty} \\ \log_{10} 0 = -\infty$$

انتي لوگاریتم:

هر عدد د خپل لوگاریتم انتي لوگاریتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $\text{anti log } 3 = 1000$ دی.

انتي لوگاریتم پیدا کول:

مانتیس په جدول کې پیدا کوو هغه عدد چه د مانتیس په ستون کې لیکل شوی دي لیکو بیا هغه عدد د مانتیس په کرښه کې دی په لسیز او سلیز مرتبو کې لیکو کرکترستیک ته گورو که مثبت و کرکترستیک د عدد د ارقامو د شمېر څخه یو کم دی یعنی تر کرکترستیک یو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستیک منفي و نو د عدد شاته د کرکترستیک په اندازه د اعشاریې دواړو خواوو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$\text{antilog}(2.3690) = ?$$

$$\text{anti log}(0.3690) = 2.338837239$$

$$\text{anti log}(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$\text{anti log } 6^{-}.3710 = ?$$

$$\text{anti log } 0.3710 = 2.35$$

$$\text{anti log}(6^{-}.3710) = 0.00000235$$

تمرین:

$$2- \text{anti log}(2^{-}.6589)$$

$$1- \text{anti log}(3.4581)$$

$$3- \text{anti log}(-4.2907)$$

$$4- \text{anti log}(0.7551 - 4)$$

د لوگ ($\log$) اولن ($\ln$) پیدا کول یو د بل له جنسه:

د قاعدې د بدلولو فارمول لیکو:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

$$\log_b M \cdot \log_a b = \log_a M$$

د (a) په عوض (10) او د (b) په عوض (e) لیکو.

$$\log_e M \cdot \log_{10} e = \log_{10} M$$

$$\ln M \cdot \log 2.72 = \log M$$

$$\ln M \cdot 0.4343 = \log M$$

مثال: $(\ln 6.73 = 1.9066)$ دی پیدا کړئ؟

حل:

$$\log M = \ln M \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = \ln 6.73 \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = 0.8280$$

د $\log$ څخه د $\ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوې په (0.4343) ویشو.

$$\frac{\ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{\log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343} \log M$$

$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$

$$\ln M = 2.3026 \cdot \log M$$

مثال:

$$\ln 563 = ?$$

$$\ln 563 = \log 563 \cdot 2.3026$$

$$\ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

انټرپولېشن *Interpolation*

انټرپولېشن په نوي عبارت باندې د یوې موضوع بیانولو ته وايي.

او په اصطلاح کې انټرپولېشن هغه عملیه ده چې د هغه عددو لوگاریتم پیدا کوي چې لوگاریتمي جدول یې ترتیب شوی نه وي. طریقه یې داسې ده چې عدد لیکو مانتیس یې په یوه حرف بنسټ د راکړشوي عدد څخه لاندې باندې عددونه په درې رقمي عدد کې پیدا کوو او لیکو یې او مانتیس یې د جدول څخه لیکو په دې ترتیب شپې عددونه لاس ته راځي چې یوه یې مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کې څلور عددونه لاس ته راځي چې یوه یې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یې جمع کوو د راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

مثال:- $\log 4567$ پيدا کړئ؟

$$0.01 \left[0.007 \begin{pmatrix} \log 4.57 & 0.6599 \\ \log 4.567 & m \\ \log 4.56 & 0.6589 \end{pmatrix} d \right] 0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007} = \frac{d}{0.0010} \Rightarrow d = \frac{0.01 \cdot 0.0010}{0.007} = \frac{10}{7000} = \frac{1}{700} = 0.00143$$

$$d = 0.00143$$

$$m - 0.6589 = 0.00143$$

$$m = 0.00143 + 0.6589 = 0.6603$$

$$\log 4567 = 3.6603$$

د انټر پولېشن پواسطه د انټي لوگاريتم پيدا کول:

د انټي لوگاريتم د پيدا کولو لپاره مانتيس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه و نو د دغه مانتيس انټي لوگاريتم په يوه حرف ښو د مانتيس څخه لاندې باندې مانتيسونه په جدول کې پيدا کوو په نتيجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه يو به يې مجهول وي بيا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پيدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدليږي. چه يو به يې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پيدا کوو اود کوچني عدد د انټي لوگاريتم سره يې جمع کوو د راکړشوي لوگاريتم انټي لوگ لاس ته راځي.

مثال:- د يوه عدد لوگاريتم (3.7351) دې انټي لوگ يې پيدا کړئ؟

$$0.01 \left[d \begin{pmatrix} 5.44 & 0.735 \\ m & 0.7352 \\ 5.43 & 0.7348 \end{pmatrix} 0.0004 \right] 0.0008$$

$$\frac{0.01}{0.0008} = \frac{d}{0.0004}$$

$$d = \frac{0.0004 \cdot 0.01}{0.0008} = \frac{4}{800} = \frac{1}{200} = 0.005$$

$$m - 5.43 = d$$

$$m = d + 5.43$$

$$m = 0.005 + 5.43$$

$$m = 5.435$$

کولوگاريتم Cologarithm :

د يوه عدد د معکوس لوگاريتم ته د هغه عدد کولوگاريتم وايي.

مثلاً (a) او $(\frac{1}{a})$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $(\frac{1}{a})$ لوگاریتم د (a) د کولوگاریتم په نوم نوم یادېږي.

$$\operatorname{co} \log a = \log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$$

$$\operatorname{co} \log a = -\log a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوگاریتم دهغه عدد منفي لوگاریتم دي.

د لوگاریتمي معادلې د حل طریقه:

د لوگاریتمي معادلې په حلولو کې د لوگاریتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$

$$\log_a \frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$

$$\frac{x+6}{x+2} = x$$

$$x^2 + 2x = x + 6$$

$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2 \log x} = 10x$$

$$\log x^{2 \log x} = \log 10x$$

$$2 \log x \times \log x = \log 10x \Rightarrow 2 \log^2 x = \log 10 + \log x$$

$$2 \log^2 x - \log x - 1 = 0$$

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\log x = y = y_1 = 1$$

$$\log_{10} x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \quad x_1 = 10$$

$$\log_{10} x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{10} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$3 \log(5 - x) = \log(35 - x^3)$$

$$\log(5 - x)^3 = \log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$\log_5 (\log_{10} \sqrt{x^2 + 19}) = 0$$

$$\log_{10} \sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

$$(\sqrt{x^2 + 19})^2 = 10^2$$

$$x^2 + 19 = 100$$

$$x^2 = 100 - 19 = 81$$

$$x^2 = 81$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$

$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5.5$$

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 5.5$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = 5.5$$

$$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$

$$\log_3 x \left(\frac{6 + 3 + 2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$

$$\log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{2}$$

$$\log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\log_3 x = 3$$

$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$\log_2(11x - 1) = 5$$

$$11x - 1 = 2^5$$

$$11x = 32 + 1 = 33$$

$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$

$$x = 11$$

7- مثال:

$$\log_3(2^x - 7) = 2$$

$$2^x - 7 = 2$$

$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^2$$

$$x = 3$$

-8 مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$

$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$

$$5^2 = (x^3)^2$$

$$x^3 = 5$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

-9 مثال:

$$\log_{10} \sqrt{x+1} + \log_{10} \sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$

$$\log_{10} \frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$

$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$

$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$

$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 1 = 25 \Rightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$

$$x^2 = 26 \Rightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

-10 مثال:

$$\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2$$

$$\log \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log 2$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \Rightarrow \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = 2 \Rightarrow x - 1 = 2, x = 3$$

-11 مثال:

$$x^{\log_{10} x} = 10$$

$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$

$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \Rightarrow \log_{10}^2 x = 1 \Rightarrow x = 10$$

مثال-12

$$\begin{aligned} \log_3(x+1) - \log_3(x-1) &= 1 \\ \frac{x+1}{x-1} &= 3^1 \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \Rightarrow x+1 = 3x-3 \\ x-3x &= -3-1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

مثال-13

$$\begin{aligned} \log_4(3x-3) &= \log_2 3 \\ \log_{2^2}(3x-3) &= \log_2 3 \\ \frac{1}{2} \log_2(3x-3) &= \log_2 3 \\ \log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} &= \log_2 3 \\ \sqrt{3x-3} &= 3 \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2 \\ 3x-3 &= 9 \Rightarrow 3x = 9+3 = 12 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

مثال-14

$$\begin{aligned} \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) &= \log_2 4 \\ \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) &= \log_2 2^2 \Rightarrow \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \log_2 2 = 2 \times 1 = 2 \\ \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) &= 2 \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7 \\ \frac{1}{x} &= 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

مثال-15

$$\begin{aligned} \log \sqrt{x} + \log x^{\frac{3}{2}} &= \log 100 \\ \log \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} &= \log 100 \Rightarrow \log \sqrt{x \cdot x^3} = \log 100 \\ x^2 &= 10^2 \Rightarrow x = 10 \end{aligned}$$

مثال-16

$$\begin{aligned} \log_{(x^2-x+4)}(x^2+5x-1) &= 1 \\ x^2+5x-1 &= x^2-x+4 \Rightarrow 5x-1 = -x+4 \\ \Rightarrow 6x &= 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

17- مثال:

$$\log_9 3 \cdot \log_2 x = 1$$

$$\log_{3^2} 3 \cdot \log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 3 \cdot \log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \log_2 x$$

$$= \log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$x^{(1/2)} = 2^1 \Rightarrow x^{(1/2)} = 2 \Rightarrow (x^{(1/2)})^2 = 2^2 \Rightarrow x = 4$$

18- مثال:

$$\log_3 \log_2 (x - 1) = 2$$

$$\log_2 (x - 1) = 3^2 \Rightarrow x - 1 = 2^9 \Rightarrow x = 2^9 + 1$$

$$= 513 \Rightarrow x = 513$$

19- مثال:

$$\log_{10} x = \frac{\log_3 12}{\log_3 10}$$

$$\log_{10} x = \log_{10} 12$$

$$x = 12$$

20- مثال:

$$3^{\log_4 16} = 27^x$$

$$3^{\log_4 16} = 3^{3x}$$

$$\log_4 16 = 3x \Rightarrow 16 = 4^{3x} \Rightarrow 2^4 = 2^{6x} \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

تمرین:

لاندی معادلی حل کریں؟

$$1) x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log \left(\frac{x}{3} + 1 \right)$$

$$2) \log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$3) \log(x - 3) = 1 - \log x$$

$$4) \ln(y + 1) = \ln(y - 7) + \ln 4$$

$$5) \log_2 x + \log_x 2 = 2$$

$$6) \log_2 x + \log_3 x = 1$$

$$7) \log_3 x + \log_5 x = \log_{10} 15$$

$$8) \log_2^2 (x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}} (x-1) = 5$$

$$9) \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = -3 \\ \log_{10} x^3 - \log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ \log_x 16 = y \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

لسم فصل

توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وايي.

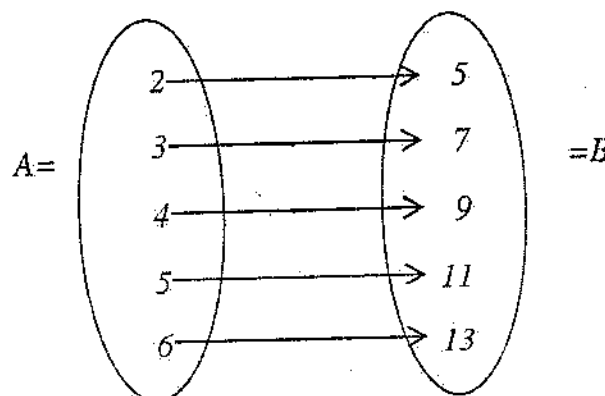
او په اصطلاح کې که د (A) او (B) دوه داسې سیټونه ولروچه د (A) د سیټ هر عنصر د (B) د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وايي.

لکه: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ او $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وايي.



په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه، د قیمتونو سیټ او یا ډومین (Domain) وايي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ، رنج (Range) او کوډومین (Codomain) وايي.

رنج: د تعریف د ناحیې د عناصرو د تصویرونو سیټ ته رنج وايي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومین وايي.

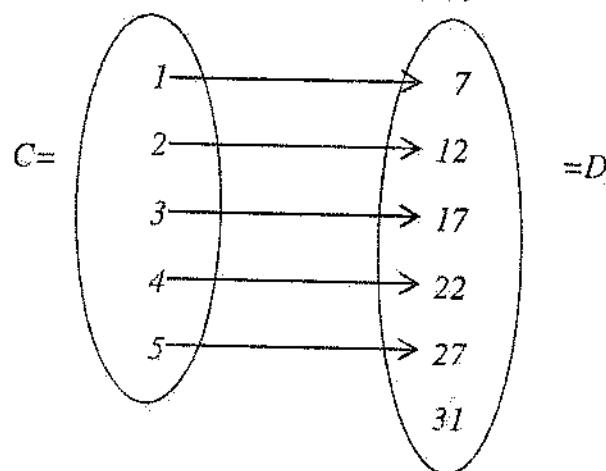
کله کله د ډومین ټول عناصر د کوډومین د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دې صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومین دی. لکه پورتنۍ سیټونه.

او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدې صورت کې د دویم

سیت هغه عناصر چه د اول سیت د عناصرو سره تعلق لري د تصویرنو سیت یا رنج بلل کیږي. او د دویم سیت ټول عناصر د کوډومین په نوم یادېږي.

$$C = (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$D = (7, 12, 17, 22, 27, 31)$$



په دغه حالت کې د رنج او کوډومین تر منځ لاندې رابطه موجود ده.

$$\text{Range} \subseteq \text{Codomain}$$

د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

2- ترانسندنتل تابع

1- ناطقه تابع

1- ناطقه تابع:

خطي تابع، دویمه درجه تابع او هوموگرافیک تابعگانې ناطقې تابعگانې دي.

a- خطي تابع:

هغه تابع ده چه گراف يې مستقیم خط وي. عمومي شکل يې دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

(a) او (b) ثابت عددونه دي (x) متحول دی (y) د (x) تابع دی. a او m دواړه یو شی دي.

د خطي تابع د تعريف ناحیه:

د خطي تابع د تعريف ناحیه د حقيقي اعدادو سيټ دی په (IR) سره يې نښي يعنې:

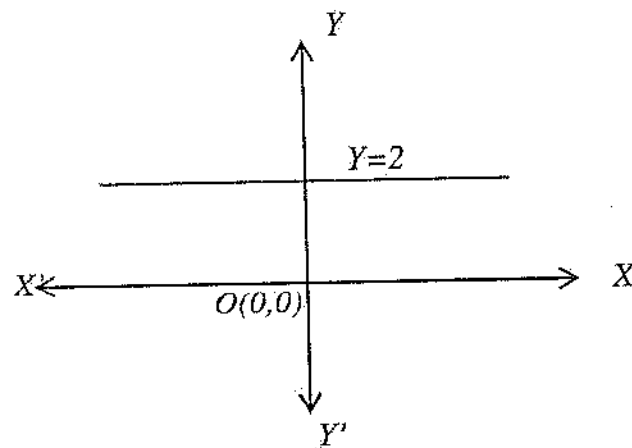
$$IR = (-\infty, +\infty)$$

د خطي تابع مهل د (x) ضريب يعنې (m) دی.

خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابت تابع وايي. گراف يې د XX د محور سره موازي دی.

مثال: $y = 2$ گراف رسم کړئ؟



2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

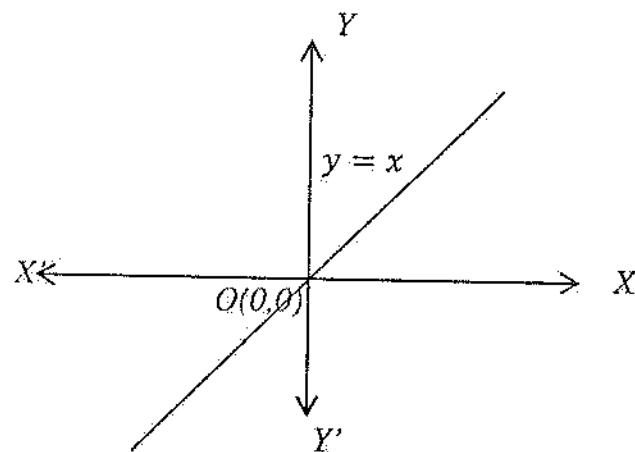
$$y = mx + b \Rightarrow 1 \cdot x + 0 = x$$

$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي گراف يې اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي.

مثال: $y = x$ د تابع گراف رسم کړئ؟

x	-1	0	+1
y	-1	0	+1



د خطي تابع د عمومي شکل د گراف ترسیم:

1- د XX' محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د YY' محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو.

پیدا شوي نقطې وصلوو د راځپښتۍ تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع گراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کیږي نو د (YY') د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

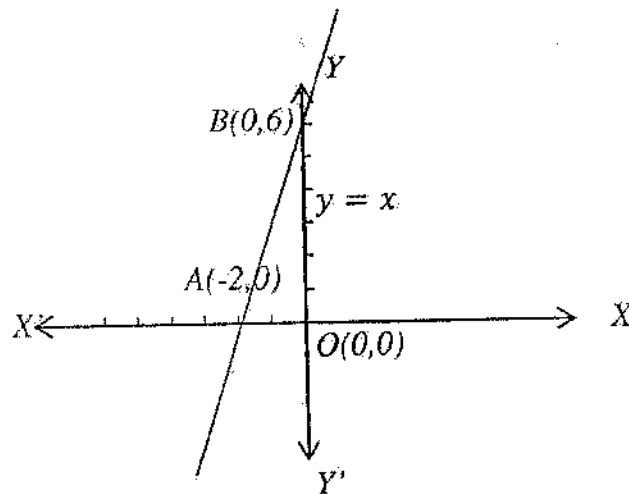
2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د (XX') د محور سره د گراف د تقاطع نقطه ده د وضعیه کمیټونو د محورونو په مستوي کې یې د وضعیه کمیټونو د محورونو پر مخ یې پیدا کوو او وصلوو یې غوښتل شوی گراف لاس ته راځي.

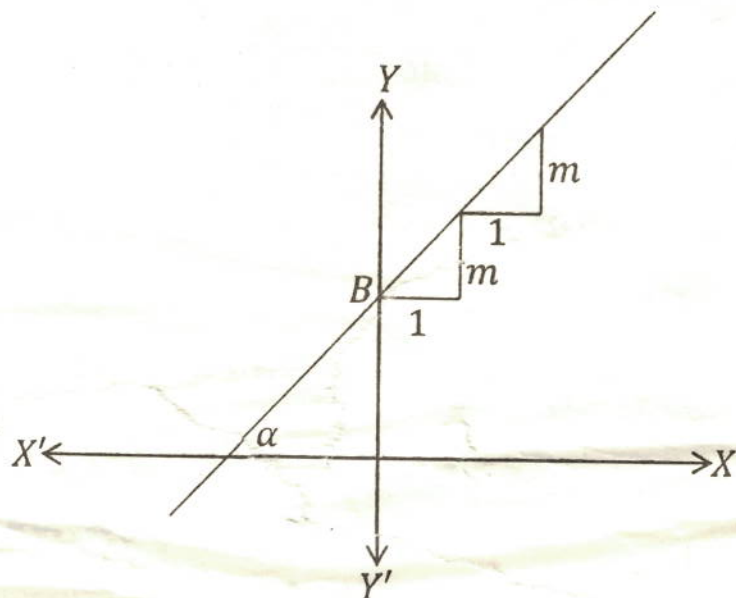


د مستقيمې کرښې مېل:

د مستقيمې کرښې مېل د هغه زاويې تانجانت دی چه مستقیمه کرښه يې د XX' د محور سره جوړوي.

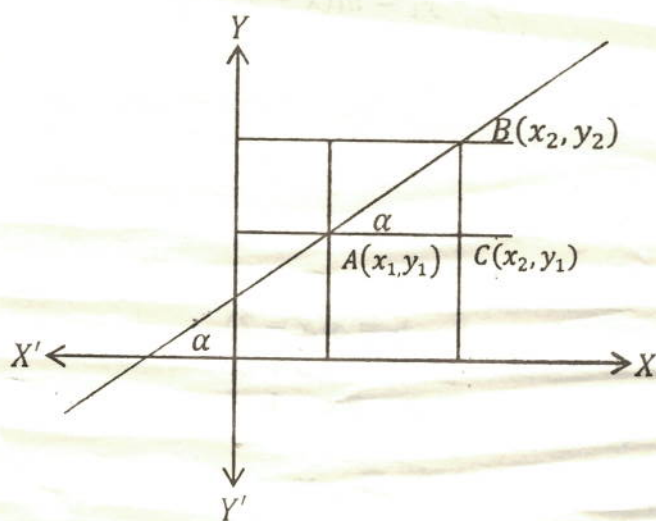
په عمومي صورت د متحول ضریب د مستقیمې کرښې مېل دی. ددی خبری دثبوت لپاره د وضعیه کمیتونو په مستوي کې د وضعیه کمیتونو محورونه د (Δ) د مستقیم پواسطه قطع کوو چه د YY' محور د B په نقطه کې قطع کړي او XX' د محور سره د (α) په اندازه زاویه جوړه کړي بیا د XX' او YY' د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د (m) په اندازه ټوټې را بېلو α او د (α) د زاويې تانجانت پیدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقیمې کرښې مېل دی.

$$\tan \alpha = \frac{m}{1} = m$$



دمبل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي
 د A او B د نقطو څخه د XX' او YY' د محورو سره موازي خطونه رسمو چه یو
 او $B(x_2, y_2)$ بل د $C(x_1, y_1)$ په نقطه کې قطع کړي د ABC
 په مثلث کې د α د زاويې تانجانت پیدا کوو.



$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ د یوې مستقیمې کرښې دوه نقطې دي مېل یې پیدا کړئ؟
حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 9}{-2 - 5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقیمې کرښې معادله چه مېل او یوه نقطه یې معلومه وي:
د مستقیمې کرښې عمومي معادله لیکو.

$$y = mx + b \dots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د یوې مستقیمې کرښې یوه نقطه ده په عمومي معادله کې یې وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \dots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطې څخه منفي کوو.

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ \pm y_1 &= \pm mx_1 \pm b \\ \hline y - y_1 &= mx - mx_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 5 &= 3(x - 2) \\ y &= 3x - 6 + 5 \\ y &= 3x - 1 \end{aligned}$$

د هغه مستقیمې کرښې د معادلې پیدا کول چه دوه نقطې یې معلومی وي:

د هغه مستقیمې کرښې معادله لیکو چه مېل او یوه نقطه یې معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د (m) په عوض یې قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه دوه نقطې یې $A(-4, 14)$ او $B(4, 8)$

وي

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)} \{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4} (x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8} (x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4} (x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومی وي

معادله یې په لاندې ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د XX د محور سره یې د تقاطع نقطه $A(a, 0)$ ده او د YY سره یې د تقاطع

نقطه $B(0, b)$ ده دا نقطې په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطې یې معلومی وي.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د یوې مستقیمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرین:

1- په لاندې ډول د کرښو نقطې راځپ شویدی مېل یې پیدا کړئ؟

1- $A(3,5), B(4, -11)$

2- $C(9,3), D(2,7)$

3- $E(9,3), F(3, -5)$

2- په لاندې ډول د مستقیمې کرښې یوه نقطه او مېل راځپ شوی دي معادله یې پیدا کړئ؟

1- $A(5,4), m = 4$

2- $B(5,8), m = 2$

3- $C(-3,7), m = \frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول د مستقیمې کرښې دوه نقطې راځپ شویدی معادله یې پیدا کړئ؟

1: $A(3,4), B(6,2)$

2: $C(8,12), D(4, -7)$

3: $E(2, -1), F(3, -4)$

4- په لاندې ډول د محورونو سره د مستقیمې کرښې د تقاطع نقطې راکړئ او د محوري معادلې یې پیدا کړئ؟

$$2- C(3,0), D(0,12)$$

$$1- A(4,0), B(0,8)$$

$$3- E(8,0), F(0,24)$$

جفته تابع:

که یوه تابع د او لپاره یو شان وي دی تابع ته جفته تابع وایي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

یعنې:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع:

هغه تابع ده چې او لپاره یو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چې د (x) او لپاره یو شان نه ده

یعنې د (x) لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو

$$f(x) \neq f(-x) \text{ نو دغه تابع طاق تابع ده.}$$

معکوسه تابع:

دوه تابعګانې هغه وخت یو د بل معکوسې دي چې د یوې دوهمې د بلې کوډومېن وي او

کوډومېن د بلې تابع دوهمې وي.

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د (x) قیمت د (y) له جنسه پیدا کوو او بیا د (x) او (y) ځایونه بدلوو معکوسه

تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$

$$3x = y + 7$$

$$x = \frac{y + 7}{3}$$

$$y = \frac{x + 7}{3}$$

مرکبه تابع

هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع، تابع ته مرکبه تابع وايي.
که وغواړو چه د دوه تابعگانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کې د متحول په عوض وضع کوو. مرکبه تابع لاس ته راځي او داسې ليکل کېږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعگانې را کړ شويدي fog او gof پيدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x - 5)^2 - 1 = 3(9x^2 - 30x + 25) - 1 = 27x^2 - 90x + 75 - 1 = 27x^2 - 90x + 74$$

$$gof = 27x^2 - 90x + 74$$

د مرکبې تابع د تعريف ناحیه

د مرکبې تابع د تعريف ناحیه د اولی تابع د تعريف د ناحیې د هغه عناصرو سيټ دی چه په مرکبه تابع کې تصویر ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعگانې لرو چې
 $domf(x) = [\frac{1}{4}, \infty]$ او $domh(x) = IR$ دی، hof او foh او ډومېنونه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h(\sqrt{4x - 1}) = (\sqrt{4x - 1})^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \quad ; \quad domh\{f(x)\} = [\frac{1}{4}, \infty]$$

$$f \circ h = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$

$$f \circ h = 2x \quad ; \quad \text{dom} f\{h(x)\} = \mathbb{R}$$

تمرین:

د لاندې تابعگانو معکوسی تابعگانی پیدا کړئ؟

1- $y = 4x - 3$

2- $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

3- $y = x - \frac{1}{2}$

4- $y = 5x - 8$

د لاندې تابعگانو ترکیب او دوه مېنونه پیدا کړئ؟

1- $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

2- $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = \sqrt{x}$

پولینومي تابعگانی

خو شاخه اي تابعگانو ته پولینومي تابع وايي لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : x < -2 \\ x + 3 & : x > 2 \\ x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \quad : x > 2$$

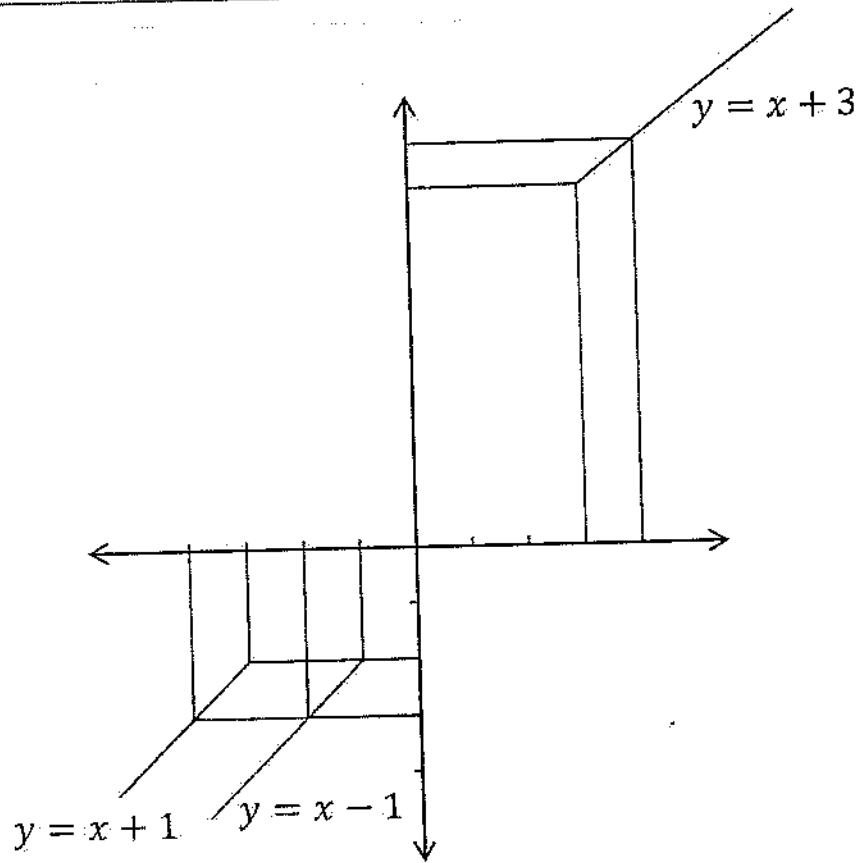
x	3	4
y	6	7

$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

x	-4	-3
y	-3	-2

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

x	-2	-1
y	-3	-2



تمرین

د لاندې تابعگانو گرافونہ رسم کریں؟

$$1-y = \begin{cases} x+2 & : x > 3 \\ x-2 & : x < 3 \end{cases}$$

$$2-y = \begin{cases} x-1 & : x > 2 \\ x+1 & : x < 2 \\ x+2 & : x > 5 \end{cases}$$

$$3-y = \begin{cases} x+4 & : x < 2 \\ x-1 & : x > 0 \end{cases}$$

$$4-y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : x > 6 \end{cases}$$

$$5-y = \begin{cases} x+4 & " & x < 3 \\ x-4 & " & x > 3 \end{cases}$$

یوولسم فصل

دویمه درجه تابع

دویمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه یی دوه وي.

عمومي شکل یې دا دی:

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

a ، b او c ثابت عددونه دي او (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

د دویمه درجه تابع د تعریف ناحیه:

د دویمه درجه تابع د تعریف ناحیه د حقیقي اعدادو سیټ دی او په IR سره یې نښي. د تعریف

ناحيې ته د قیمتونو سیټ او ډومېن ($Domain$) هم وایي.

د دویمه درجه تابع گراف:

د دویمه درجه تابع گراف ته پارابول وایي.

که په دویمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع گراف اصغري نقطه لري او د پارابول خوله پورته خواته خلاصیږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله ګڼسته خواته خلاصیږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس ($Vertex$) وایي.

د دویمه درجه تابع د گراف ترسیم:

د دویمه درجه تابع د گراف ترسیم په درې حالتو کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د گراف ترسیم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د گراف ترسیم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ

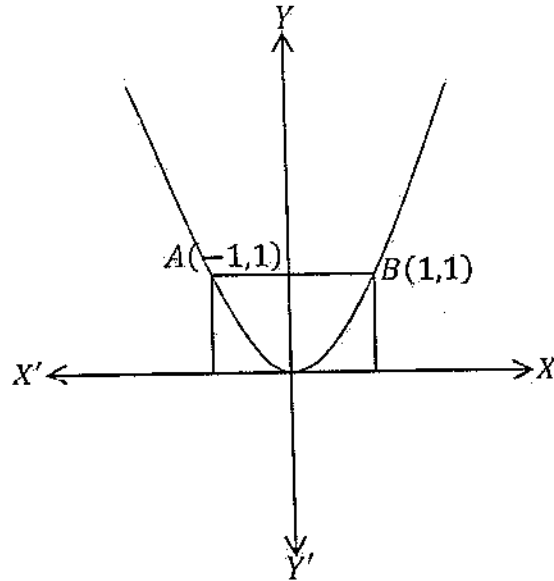
1- د $y = ax^2$ د تابع د گراف ترسیم:

x ته څو قیمتونه ورکړو او د (y) قیمتونه پیدا کړو. بیا د تابع د گراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کړو.

مثال: د $y = x^2$ گراف رسم کړئ؟

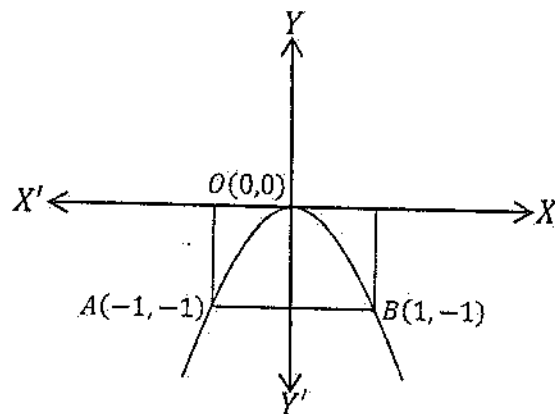
x ته څو قیمتونه ورکړو او د y قیمتونه پیدا کړو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کړو:

x	-1	0	1
y	-1	0	+1



مثال:- د $y = -x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

x	-1	0	+1
y	-1	0	+1



نوټ:

که $(a < 1)$ وي نو د تابع گراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع گراف نرې او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې گرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$

2- $y = 2x^2$

3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$

5- $-\frac{2}{3}x^2$

د گراف انتقال:

د (XX') او (YY') په محورو باندې د تابع د گراف حرکت ته د تابع د گراف انتقال وايي.

1- د (XX') پر محور باندې د تابع د گراف انتقال:

که وغواړو چه د (XX') پر محور باندې د تابع گراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع يا تفریقوو او گراف يې رسموو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (3) په اندازه چپې او بښې خواته انتقال ورکړئ؟

حل: چيې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکړو نو 3 ورسره جمع کوو:

$$y = (x + 3)^2$$

$$x + 3 = 0$$

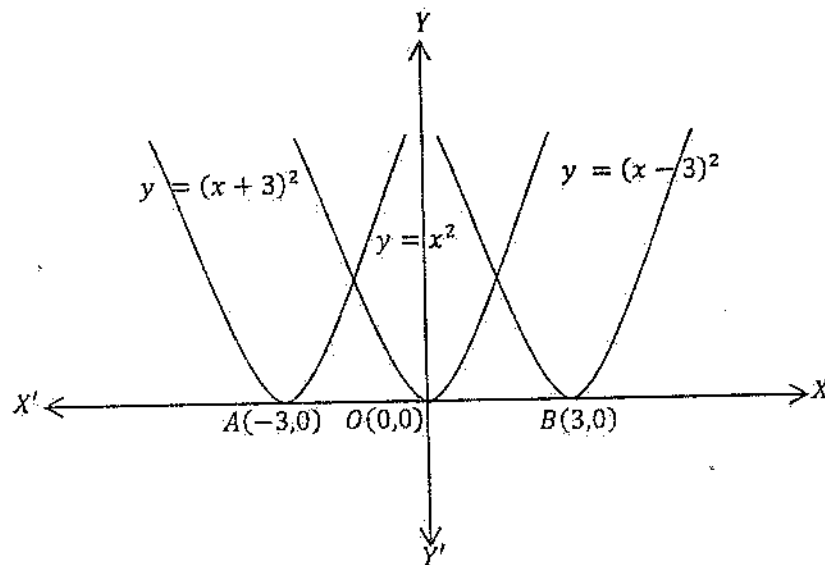
$$x = -3$$

$$A(-3, 0)$$

ښی خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x - 3)^2$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



2- د YY' په محور باندې د تابع د گراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (yY') په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع يا تفریقوو.

مثال: د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه گراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو (2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

په د مثال د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 + 2 = 0$$

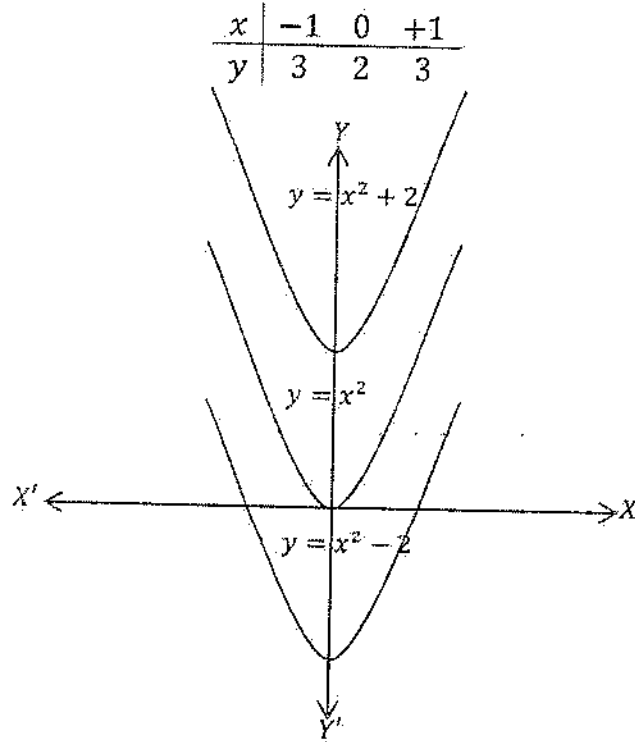
$$x^2 = -2$$

څرنگه چه منفي عدد جذرونه لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي.

د گراف د ښه ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه

کې $y = 2$ کیږي چه د YY د محور سره د گراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.



تمرین:

لاندې تابعگانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع گراف ته د (3) په اندازه ښی او چپی خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع گراف ته د $(\frac{3}{2})$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

-2 د $y = ax^2 + c$ د تابع د گراف ترسیم:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې یې عبارت دي:

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

2- د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له $M(0, c)$ دغه نقطه د تابع د گراف راس هم دی.

د (A) نقطه د (C) سره او د (C) نقطه د (B) سره وصلوو د تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

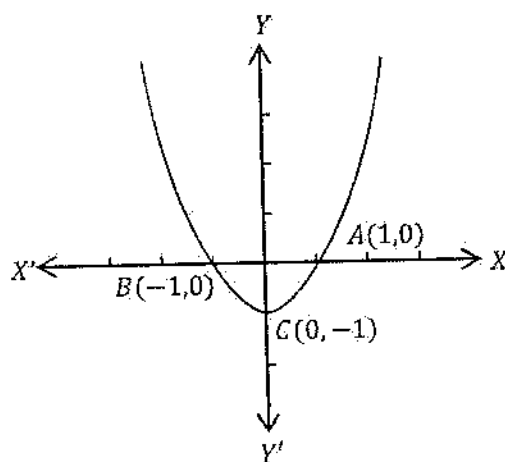
$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$



د xx' د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه عبارت دي:

$$A(1,0) \quad B(-1,0)$$

2- د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو چې $y = -1$ کیږي. نو د (YY') سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0, -1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل: د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنگه چې منفي عدد جذر نه لري نو د تابع گراف د xx' د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

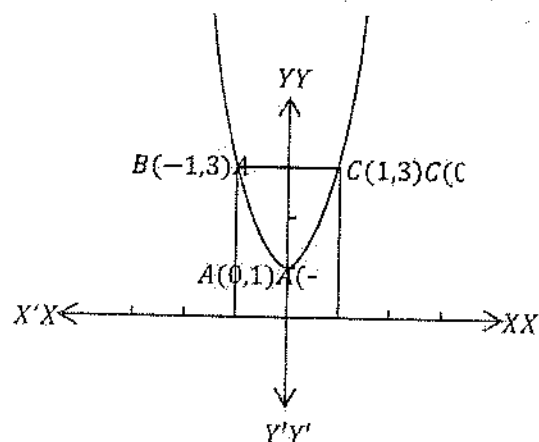
د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,1)$$

د گراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	+1
y	2	0	2

$$B(-1,2) \quad O(0,1) \quad C(1,2)$$



مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$-x^2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

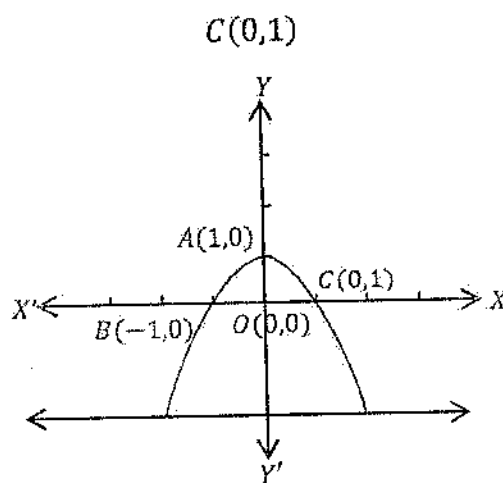
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$A(1,0) \quad B(-1,0)$$

2- د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کېږي د تقاطع نقطه يې عبارت ده.



مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 - 1 = 0$$

$$-x^2 = 1$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنگه چه منفي عدد جذر لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي.

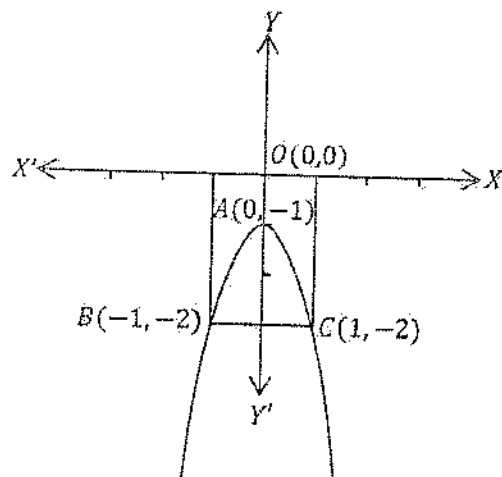
2- د YY د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$ شي د X د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0, -1)$$

د گراف د دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمت پيدا کوو.

x	-1	0	1
y	-2	-1	-2

$$B(-1, -2) \quad O(0,0) \quad C(1, -2)$$



$$\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \quad \text{د 3- د تابعگانو د ترسيم طريقه:}$$

1- د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو په نتيجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دويمه درجه معادله لاس ته راځي. د دغه معادلې د حل لپاره د (Δ) قيمت پيدا کوو د (Δ) په باب درې حالتونه موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه يې د $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پيدا کېږي او د تقاطع نقطې يې عبارت دي له: $A(X_1, 0)$ او $B(X_2, 0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله يو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کېږي $x = -\frac{b}{a}$ نو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له: $A(x, 0)$

c- که $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي. په دغه حالت کې د پاره ددی چه د (YY) د محور یوی او بلې خواته دگراف خط السیر تعیین شي نو (x) ته یو منفي او یو مثبت قیمت ورکوو اود (y) قیمتونه پیدا کوو د (YY) د محور یوی او بلې خواته دوه نقطې لاس ته راځي چه د تابع د گراف خط السیر تعیینوي.

2- د (YY) دمحور سره دتابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوود (YY) د محور سره دتابع دگراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د گراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$y = a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right\}$$

$$y = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right\}$$

$$y = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0 \quad \therefore \quad a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کېږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

که $a < 0$ وي بيا هم $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ کيږي مگر $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ کيږي. دواړه خواوې
خڅه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac-b^2}{4a} < -\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y < -\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ او $x = -\frac{b}{2a}$ شي نو $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ کيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y = 2x^2 - 3x - 2$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل: د (XX) د محور سره د تابع د گراف د د قاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$\Delta = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm 5}{2 \times 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \therefore x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \therefore x_2 = \frac{-1}{2}$$

نو د د محور سره د گراف د د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(2,0) \quad B\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

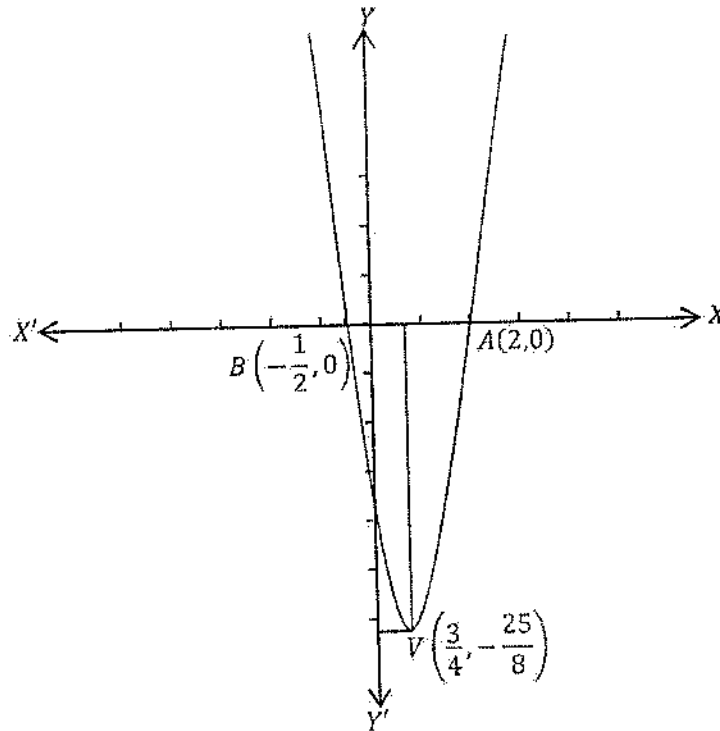
د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو. نو $y = 6$ کيږي نو

د (YY) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0, -2)$

د تابع د گراف د راس نقطه پيدا کوو.

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{4 \times 2 \times (-2) - (-3)^2}{4 \times 2}\right) = \frac{-16 - 9}{8} = -\frac{25}{8}$$

$$V\left(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$$



مثال: $y = x^2 + 3x$ گراف رسم کریں؟

حل:

$$y = 0$$

$$x^2 + 3x = 0$$

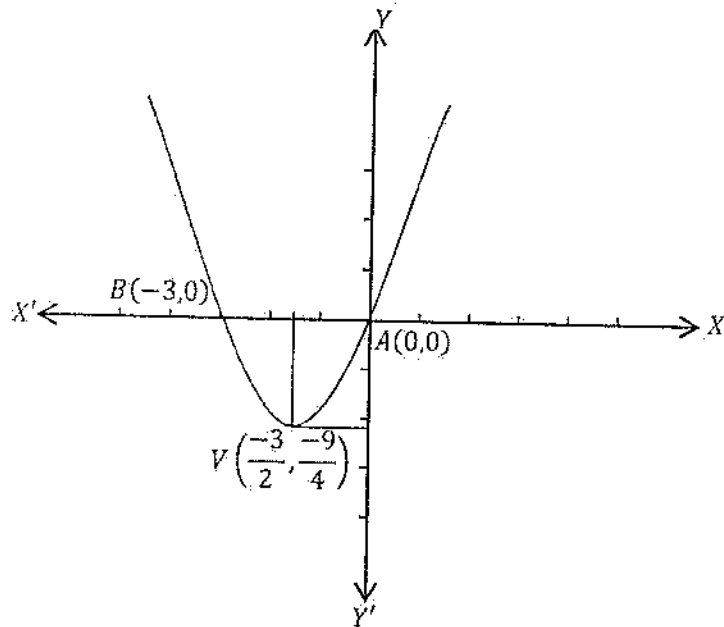
$$x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -3$$

$$A(0,0) \quad B(-3,0)$$

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{4 \times 1 \times 0 - 3^2}{4 \times 1}\right) = \left(\frac{-3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$



مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ گراف رسم کریں؟

حل:

$y = 0$ -1 فرضو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad ; \quad x_1 = 1 \quad A(1,0)$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad B(3,0)$$

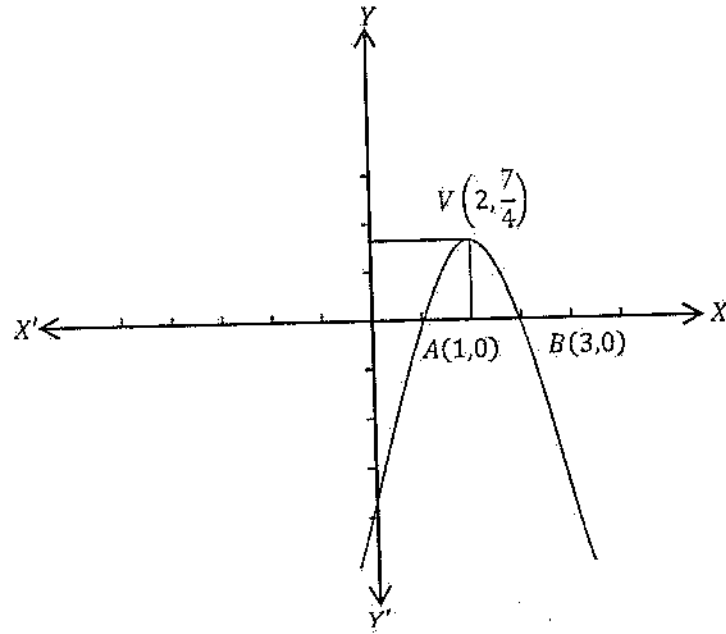
$x = 0$ -2 فرضو نو:

$$y = -3 \quad C(0, -3)$$

اصغري او اعظمي ټکي يې پيدا کوؤ:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-4}{-2}, \frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right) = \left(2, \frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2, \frac{7}{4}\right)$$



مثال: $y = x^2 + 2x + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

$y = 0$ -1 فرضو نو:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$A(-1, 0)$$

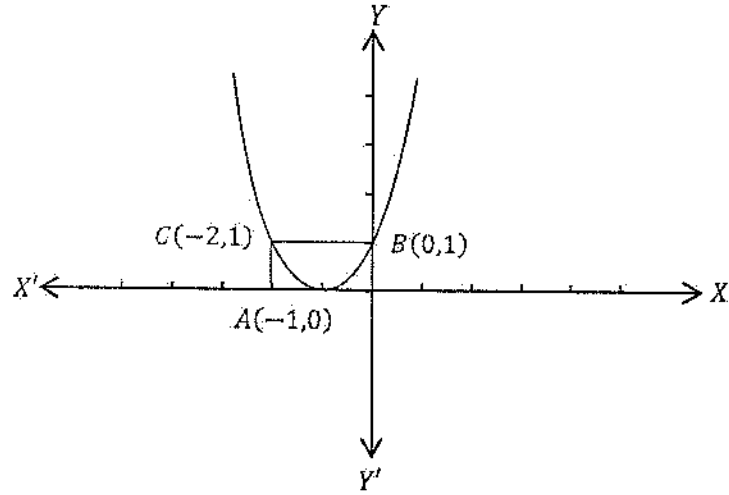
2- $x = 0$ فرضو نو:

$$y = 1$$

$$B(0,1)$$

x	-2
y	4

$$C(-2,1)$$



تمرین:

دلاندي تابعگانو گراف رسم کری؟

1- $y = 3x^2 + 6x$

2- $5x^2 - 13x + 6$

3- $4x^2 - 4x + 1$

4- $-x^2 + 5x - 6$

5- $-2x^2 - 3x + 14$

6- $3x^2$

7- $4x^2 + 8x$

8- $6x^2 + x - 57$

9- $11x^2 - 13x - 18$

10- $2x^2 - 6x$

11- $2x^2 + x - 21$

12- $-x^2 + 4$

13- $11x^2 - 13x - 18$

14- $3x^2 - x - 10$

15- $5x^2 + 2x - 51$

16- $-9x^2 + 17x + 2$

هوموگرافیک تابع

هغه تابع ده چه د بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي. عمومي شکل يې دا دی.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{زور نصاب}$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{نوی نصاب}$$

a, b, c او d ثابت عددونه دي (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

مجانِب Asymptotes :

که د یو مستقیم او یوه منحنی ترمنځ فاصله په لایتناهي (∞) کې صفر شي دا مستقیم ددی منحنی مجانب دی.



مجانِب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب Vertical Asymptotes

2- افقي مجانب Horizntil Asymptotes

3- مایل مجانب Slant or oblique Asymptotes

1- عمودي مجانب :

هغه خط چه د (x) په فاصله باندی د $(Y\bar{Y})$ د محور سره موازي رسمیري د تابع د گراف عمودي مجانب بلل میږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کوو د عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$cx + d = 0$$

$$cx = -d$$

$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال: د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب:

هغه خط چه د (y) په ترتیب د (YY) د محور سره موازي رسمېږي د تابع د گراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرچ ویشو خارج قسمت يې په (m) بنسټ او باقي په (p) بنسټ ولیکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$ax+b = mcx+md+p$$

$$a = mc \Rightarrow m = \frac{a}{c}$$

د باقي د پیدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md+p = b \Rightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc-ad}{c}$$

$$p = \frac{bc-ad}{c}$$

مثال: د $h(x) = \frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مابنده پيدا کړئ؟
حل:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{8}{4} = 2$$

$$p = \frac{bc - ad}{c} = \frac{-3 \times 4 - 8(-9)}{4} = \frac{-12 + 72}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

3- مایل مجانب *Slant or Oblique Asymptotes*:

که د یوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زیاته وي دغه ډول تابعگانی مایل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ویشو.

مثال: د $g(x) = \frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب، افقي مجانب، مایل مجانب یې پيدا کړئ؟
حل: عمودي مجانب:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

افقي مجانب نلري، مایل مجانب معادله یې دا ده.

$$\frac{6x^2 - 24}{x + 2} = 6x - 12$$

د هوموگرافیک تابع د گراف ترسیم:

- 1- عمودي مجانب پيدا کړو او رسموويي.
- 2- افقي مجانب پيدا کړو او رسموويي.
- 3- د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پيدا کړو.
- 4- د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کړو.
- 5- د گراف د ښه دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکړو او د (y) قیمتونه پيدا کړو.
- 6- پيدا شوی نقطی د وضعیت کمیټونو د محورونو په مستوي کې پيدا کړو او وصلوويي د راکړ شوی تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x = -\frac{d}{c} = -\left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

افقي مجانب:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

د (XX) سره تقاطع پیدا کوونو $(y = 0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2} = 0$$

$$(x-2) \left(\frac{2x+4}{x-2} \right) = 0(x-2)$$

$$2x+4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$2x = -4$$

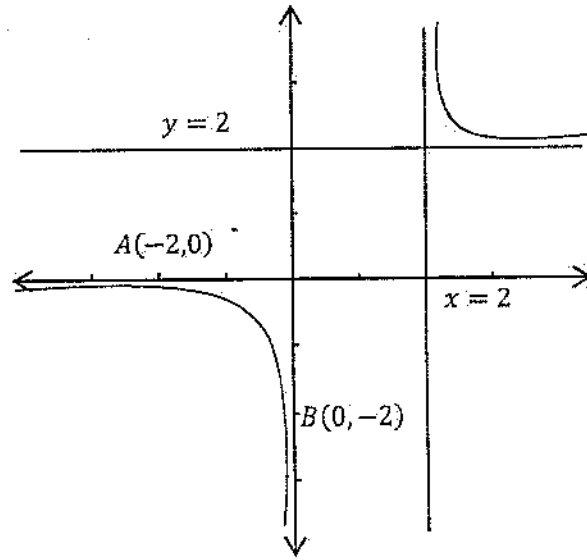
$$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$$

$$x = -2$$

$$\therefore A(-2, 0)$$

د (YY) سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو.

نو $y = -2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0, -2)$



تمرین:

دلاندي تابعگانو گراف رسم کړئ

1: $G(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1}$

2: $F(x) = \frac{2x - 6}{3x + 6}$

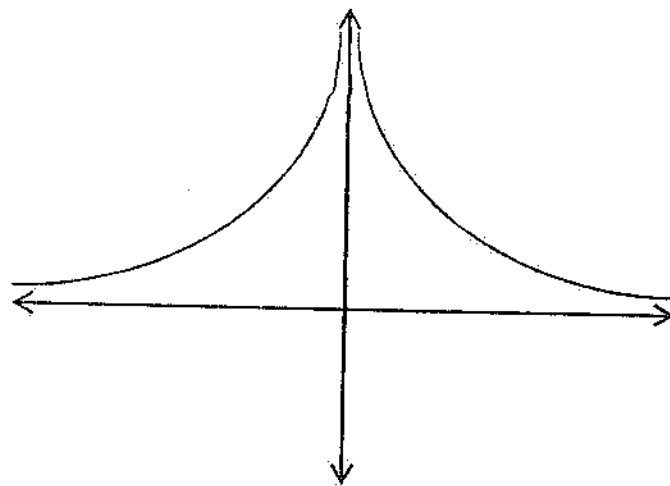
3: $h(x) = \frac{3x + 9}{x - 6}$

مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$

$$A\left(-2, \frac{1}{4}\right) \quad B(-1, 1) \quad C(1, 1) \quad D\left(2, \frac{1}{4}\right)$$



تمرین:

د لاندې تابعگانو گراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$

2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$

3) $h(x) = x^2 - 9$

4) $y = 6^x$

5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

اکسپوننشل تابع Exponential function:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی:

$$y = a^x$$

a ثابت عدد دی (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

که ($a > 1$) وي تابع متزايدة ده او که ($a < 1$) وي نو تابع متناقصه ده.

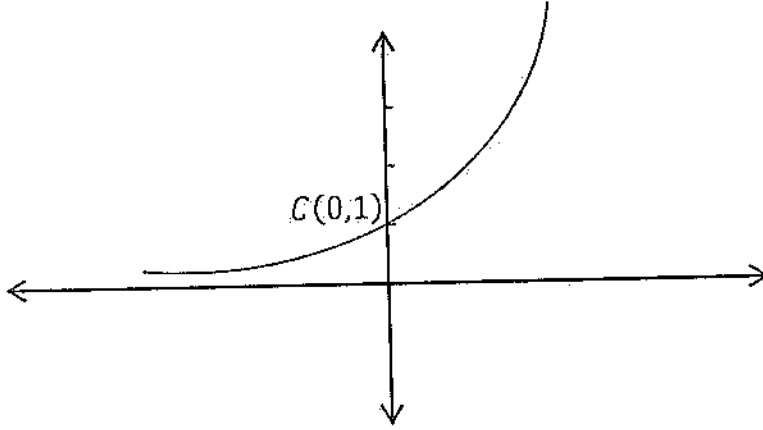
د تعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی. د گراف د ترسیم لپاره یې (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیټونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې. د را کر شوی تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: $y = 2^x$ کا تابع گراف رسم کریں؟

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

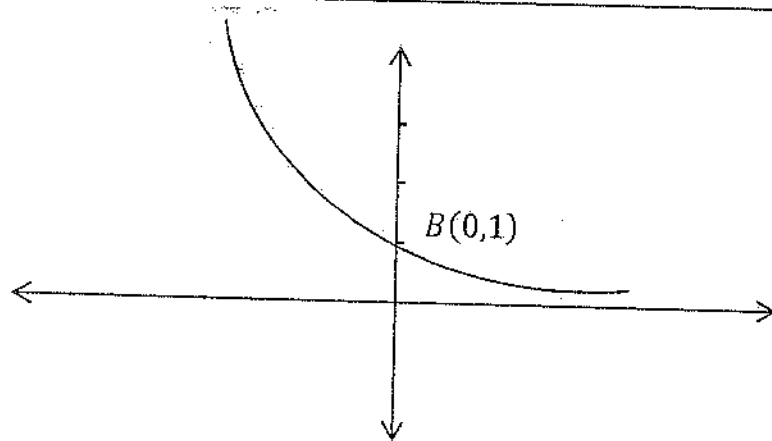
$$A\left(-2, \frac{1}{4}\right) \quad B\left(-1, \frac{1}{2}\right) \quad C(0, 1) \quad D(1, 2) \quad E(2, 4)$$

مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ کا گراف رسم کریں؟

حل:

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$A(-1, 2) \quad B(0, 1) \quad C\left(1, \frac{1}{2}\right) \quad D\left(2, \frac{1}{4}\right) \quad E\left(3, \frac{1}{8}\right)$$



تمرین:

د لاندې تابعگانو ګراف رسم کړئ؟

3- $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

2- $y = 5^x$

1- $y = 3^x$

4- $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

7- $y = 5^x$

6- $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

5- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

8- $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

لوګاریتمي تابع *Logarithmical functions*

لوګاریتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعریف ناحیه یې د مکمل اعدادو سیټ دي او د تصویرونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ

دي. ګراف یې په اوله او څلورمه ربعه کې رسمېږي.

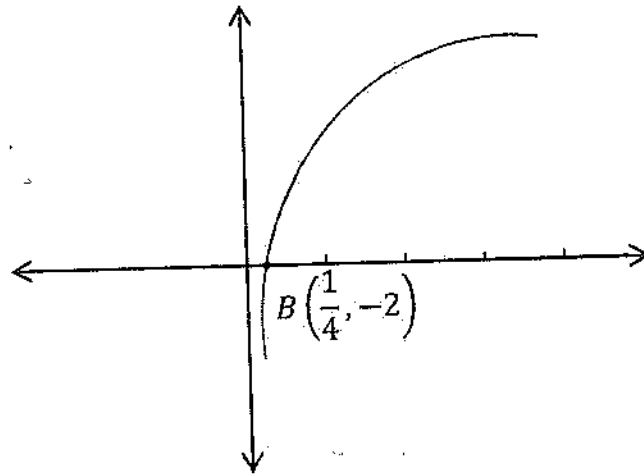
د ګراف د ترسیم لپاره x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمت پیدا کوو.

مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

$$A\left(\frac{1}{8}, -3\right) \quad B\left(\frac{1}{4}, -2\right) \quad C\left(\frac{1}{2}, -1\right) \quad D(1,0) \quad E(2,1) \quad F(4,2)$$



تمرین

دلاندي تابعگانو گرافوندرسم کړی؟

3- $\log_4 x =$

2- $\log_2 x = y$

1- $\log_3 x = y$

6- $\log_8 x =$

5- $\log_2 x = y$

4- $\log_5 x = y$

9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

8- $y = 3^{2x}$

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

دوئسم فصل

ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټر سایکل باندې یو په بل پسې سپرېدلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوې قاعدې لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وايي.

لکه: 2, 7, 12, 17, 22

یا لکه: 5, 15, 75, 375, 1875

که دردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7, 21, 63, 189, 567

او که دردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه:

1, 5, 9, 13, 17 ...

د غیر معین ردیف په آخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونيکي ردیف *Harmonical Sequences*

1- حسابي ردیف:

هغه ردیف دی چې هر وروستني حد یې د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه

کې لاس ته راځي. او یا دا چې د دوه عددو تفاضل یې ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په (a_1) او مشترک تفاضل په (d) او د حدونو شمېر په (n) بنیو نو فارمول یې په

لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

که د ضرب ته متوجه شوی (d) ضرب د حدونو شمېر یو کم دی نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (d) ضرب به $(n-1)$ وي فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (30) دې مشترک تفاضل یې (17) دی (51) حد یې څو دی؟

$$a_1 = 30$$

$$d = 17$$

$$n = 51$$

$$a_{51} = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$

$$a_{51} = 30 + 850 = 880$$

$$a_{51} = 880$$

د (d) ، (a_1) او (n) فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (15) دې (31) حد یې (585) دې مشترک تفاضل یې پیدا کړئ؟

$$d = \frac{585 - 15}{31 - 1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد د طرفینو اوسط دی.

مثال: د یوه حسابي ردیف (50) ام حد (1973) دی مشترک تفاضل یې (40) دی اول حد یې څو دی؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$

$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$

$$a_1 = 13$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (17) او آخري حد یې (2117) دی او مشترک تفاضل یې (21) دی د حدونو شمېر یې پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوو یعنې په $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ کې د داخل شوي حدونه په (m) بنیو او دوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض یې لیکو د (d) قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال: د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه یې منځ ته ور داخل کړئ.

حل:

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

$$3, 9.4, 15.8, 22.2, 28.4, 35$$

تمرین:

لاندې عبارتې سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه یې منځ ته ور داخل کړئ؟

2- د يوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

- 1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
- 2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
- 3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
- 4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
- 5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي ردیف:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد يې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربیدو په نتیجه کې په لاس راغلی وي یا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

2, 8, 32, 128, 512 ...

د هندسي ردیف اول حد (a_1) په مشترک نسبت يې په (r) ښيي:

د هندسي ردیف فارمول:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد يې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربیدو په نتیجه کې لاس ته راغلی وي او یا دا چه د دوه حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

3, 12, 48, 192, 768

5, 10, 20, 40, 80, 160 ...

د هندسي ردیف فارمول:

اول حد يې په (a_1) او مشترک فصل په (r) او وروستنی حد په (a_n) ښیو نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د (r) توان ته څیر شو د (r) توان د حدو د شمېر څخه یو کم دي نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (r) توان به ($n - 1$) وي نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \dots, a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یې $r = 3$ دې اوم حد (a_7) یې څو دی؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د (a_1) او (r) قیمتونه د لاندې فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دې مشترک نسبت یې $(r = 2)$ دی اول حد یې څو دی؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دې اوم حد یې (5832) دی مشترک نسبت یې پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 10)$ دی (n) ام حد یې $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یې (2) دې د حدونو شمېر یې څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Rightarrow 128 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Rightarrow n = 7 + 1 = 8 \Rightarrow n = 8$$

1- د يوه هندسي ردیف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څویم حد یې $\frac{1}{16}$ دي؟

$$a_1 = 2$$

$$a_1 r^{n-1} = a_n$$

$$a_2 = 1$$

$$2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$a_n = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$n = ?$$

$$n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \Rightarrow n = 6$$

د هندسي ردیف خصوصیات:

1- په هندسي ردیف کې هر حد د طرفینو د حاصل ضرب جذر دی.

مثال: (3, 6, 12, 24, 24) د یوه هندسي ردیف حدونه دي نو لیکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \quad \text{and} \quad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په یوه هندسي ردیف کې اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدود شمېر په توان رفع شي او دویم جذر یې ونیول شي د ردیف د ټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: لکه (2, 6, 18, 54) یو هندسي ردیف دی نو د دویم خاصیت سره سم لیکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$

$$11664 = 11664$$

3- که یو هندسي ردیف طاق حدونه ولري نو د منځني جذمربع یې د اول او اخر حدود حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) یو هندسي ردیف دی نو د دریم خاصیت سره سم لیکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$

$$400 = 400$$

په هندسي ردیف کی د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه یې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي ردیف د فارمول څخه د (r) قیمت پیدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمېر (n) او تر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د (n) په عوض په فارمول کی $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د یوه هندسي ردیف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \quad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3, 6, 12, 24, 48, 96

مثال: دزی داسی عددونه پیدا کړئ چه دویم حد یې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دریم حد یې د دویم حد څخه د (6) په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases} \\ &\frac{x}{x+3} = \frac{x+9}{x+3} \Rightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9 \\ &x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9 \\ &9x = 6x + 9 \Rightarrow 9x - 6x = 9 \Rightarrow 3x = 9 \\ &\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3 \\ &x = 3 \quad x+3 = 6 \quad x+6 = 9 \end{aligned}$$

3- هارمونيکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونيکي ردیف وايي. مثلاً لاندی ردیف یو حسابي ردیف دی لکه:

(2, 4, 6, 8, 10)

د دغه ردیف معکوس عبارت له $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ څخه دی دغه ردیف ته هارمونيکي ردیف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي ردیف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې چوپړ کړئ؟
حل:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - 3, \frac{1}{4} - 6, \frac{1}{4} - 9, \frac{1}{4} - 12, \dots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1-12}{4}, \frac{1-24}{4}, \frac{1-36}{4}, \dots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{-11}{4}, \frac{-23}{4}, \frac{-35}{4}, \dots$$

د هارمونيکي ردیف حسابي اوسط:

د هارمونيکي ردیف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

$$a_n = \frac{2(2 \times 8)}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2 \quad \text{حل:}$$

سلسلی Series:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله *Arithmetc Series*

2- هندسي سلسله *Geometric Series*

1- حسابي سلسله:

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په S_n نښي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسې لیکو چه اخر حد یې په سر کی راشي بیا یې د اولتی مجموعی سره جمع کوو.

$$\begin{aligned} S_n &= \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \dots + a_1 \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + \{a_1 + (n-1)d\} \\ 2S_n &= \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \dots + \{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= n\{2a_1 + (n-1)d\} \\ \frac{2S_n}{2} &= \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د (20) حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$

$$S_{20} = 10(128) = 1280$$

$$S_{20} = 1280$$

مثال: د يوه حسابي ردیف اول حد $(a_1 = 11)$ او يو پنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د (51) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{51} = \frac{51}{2} (11 + 311) = \frac{51}{2} (11 + 411) = \frac{51}{2} (422) = 51 \times 261 = 10761$$

$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کې $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قيمتونه د حسابي په عمومي فارمول کې وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2} (2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کې 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپۍ دي وواپاست چه د ټولو سره خوروږۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

د جفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} (4 + 2n - 2) = \frac{n}{2} (2n + 2) = \frac{n}{2} \times 2(n+1)$$

$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدې ترتیب تر اخره مرسته کړی وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړی وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$

$$S_{100} = 100(100+1) = 100 \times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) او مشترک تفاضل يې (2) دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$

$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد يې د حدونو په شمېر کې ضرب شي د حدونو مجموعه لاس ته راځي.

مثال: د يوه حسابي ردیف د حدونو شمېر 41 او منځنې حد يې 145 دې د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او آخر حدو مجموعه د منځنې حد د دوه چندان سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2 \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

مثال: د يوه حسابي ردیف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځنې حد يې $a_5 = 27$ دی د اول او آخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2 \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

درېمه تبصره:

کله کله د څو اولو حدو او په هماغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او آخر حد معلوم نه وي. د اول او آخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کېږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

m_1 د شپږو اولو حدو مجموعه او m_2 د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او (m) د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي ردیف n حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

حل:

$$S_{m_1} = 62$$

$$S_{m_2} = 482$$

$$m = 19$$

$$S_{19} = ?$$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} (136) = 1292$$

$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله Geometric Series

د هندسي ردیف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلې فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} \dots \dots \dots I$$

دواړه خواوې په (r) کې ضربوو او بيا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots + a_1 r^n \dots \dots \dots II$$

$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1 r \pm a_1 r^2 \pm a_1 r^3 \pm \dots \pm a_1 r^{n-1} \dots \dots \dots I$$

$$rS_n - S_n = a_1 r^n - a_1$$

$$\begin{aligned} S_n(r-1) &= a_1(r^n - 1) \\ \frac{S_n(r-1)}{r-1} &= \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \\ S_n &= \frac{a_1(r^2 - 1)}{r-1} \end{aligned}$$

دغه سلسلې ته متزايدة سلسله وايي.

مثال: د يوې هندسي سلسلې $a_1 = 5$ او مشترک نسبت يې $r = 3$ دې د $n = 7$ حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{5(2187 - 1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$$S_7 = 5465$$

او که د I رابطې څخه II رابطه منفي کړه:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسله ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يې $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8 \left(1 - \frac{1}{32} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \left(\frac{32-1}{32} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \left(\frac{31}{32} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د يوې هندسي سلسلې د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يې 5 دی مشترک نسبت يې څو دی؟

حل:

$$a_1 = 8 \quad 120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$S_8 = 120 \quad r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$n = 4 \quad r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

$$r = ?$$

1	1	1	-14	2
	2	6	14	
1	3	7	0	

$$r = 2$$

د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې د اعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \rightarrow 0)$ صفر کېږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1 - r}$ کېږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چې اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\bar{3}$ اعشار کسر دی. په عام کسري بدل کړئ؟

حل:

$$a_1 = 0.\bar{3} = \frac{3}{10}$$

$$r = \frac{1}{10}$$

$$n = \infty \quad S_n = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10 - 1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10 \times 3}{10 \times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$S_n = ? \quad S_n = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.8\bar{3}$ اعشار کسر دی په عام کسري بدل کړئ؟

حل:

$$a = \frac{8}{10}$$

$$a_1 = \frac{3}{100} \quad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10 - 1}{10}}$$

$$r = \frac{1}{10} \quad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10 \times 3}{100 \times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$$

$$S_n = ? \quad S_\infty = \frac{24 + 1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

تمرین

- 1- د (20) او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پيدا کړئ چه لمړی رقم يې (3) وي؟
- 2- یو دیوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي وواياست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟
- 3- د یوه حسابي ردیف ددری حدو مجموعه (33) او د ضرب حاصل يې (1287) دی عددونه يې پيدا کړئ؟
- 4- د یوه حسابي ردیف د څلورو حدو مجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه يې (214) ده عددونه پيدا کړئ؟
- 5- د یوه حسابي ردیف څلورو حدو د ضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل يې (2) دی عددونه پيدا کړئ؟
- 6- (3003) کسان په یوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی یو نفر بیا دوه بیا درې په همدی ترتیب تر اخره ولاړ دي وواياست چه څو قطارونه جوړوي؟
- 7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟
- 8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟
- 9- a, b او c په کوم شرط په یوه حسابي ردیف کی شامل دي؟
- 10- د یوه ردیف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنیو حدو د ضرب حاصل يې (285) دی عددونه پيدا کړئ؟
- 11- (3) او (243) د یوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟
- 12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دریم او اول حد تفاضل يې (136) وي؟
- 13- د یوه متوازي السطوح حجم (3375) دی او د ابعادو مجموعه يې (65) ده ابعاد يې پيدا کړئ؟

14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري او بل سړی اول ورځ یوه روپی، په دویمه ورځ دوه روپی، په همدی ترتیب تراخړه روپی، اخلي وواياست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسې مساوي شي؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یې د شپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یې (126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.2\overline{7}$, $0.9\overline{25}$, $0.1\overline{23}$ کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

17- $0.6\overline{36}$, $0.41\overline{6}$, $0.1\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قائم الزاویه مثلث زاویې د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوې څلور ضلعي زاویې هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمې زاویې (9) برابره وي د هرې زاویې پراخوالی پیدا کړئ؟

د يارلسم فصل

د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبيعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي. څرنگه چې د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د (n) لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n + 1)$ لپاره فارمول ثبوتوو.

مثال: ثبوت کړئ چې $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.
حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (1) لپاره صحيح دی. د (n) لپاره يې صحيح فرضوو.

د $(n + 1)$ لپاره يې ثبوتوو.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چې $1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو.

$$1 = \frac{1(3 \times 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو، د (n+1) لپاره يې ثبوتوو:

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) + \{3(n+1) - 2\} &= \frac{n(3n-1)}{2} + \{3(n+1) - 2\} \\ S_n &= \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 3n + 2n + 2}{2} \\ S_n &= \frac{3n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2} \\ S_n &= \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2} \end{aligned}$$

مثال: ثابت کړئ چې لاندې مساوات د هر طبيعي (n) لپاره صحيح دی.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنۍ رابطه صحيح ده ځکه چې:

$$1^2 = \frac{1}{6} \times 1(1+1)(2 \times 1 + 1) = \frac{1}{6}(2)(3) = \frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو. او د (n+1) لپاره يې ثبوتوو

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ S_{n+1} &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n+1)^2}{6} \\ S_{n+1} &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 4n^2 + 5n^2 + 10n + 3n + 6}{6} \\ S_{n+1} &= \frac{2n^2(n+2) + 5n(n+2) + 3(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(2n^2 + 5n + 3)}{6} \\ S_{n+1} &= \frac{(n+2)(2n^2 + 2n + 3n + 3)}{6} = \frac{(n+2)\{2n(n+1) + 3(n+1)\}}{6} \\ S_{n+1} &= \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)\{(n+1) + 1\}\{2(n+1) + 1\} \end{aligned}$$

ثابته شوه چې پورتنۍ مساوات د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دي.

مثال: ثبوت کړئ چې لاندې فارمول د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a}{a-1}(a^n - 1), \quad a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يې ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1}(a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د لپاره يې صحيح فرضوو.

د لپاره يې ثبوتوو.

$$\begin{aligned} a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} &= \frac{a}{a-1}(a^n - 1) + a^{n+1} \\ S_{n+1} &= \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1} \\ S_{n+1} &= \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

تمرین

لاندې فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

- 1) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
- 2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 (n+1)^2 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$
- 3) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$
- 4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$
- 5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$
- 6) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- 7) $4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$
- 8) $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$
- 9) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$
- 10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+2) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+7)$
- 11) $2 + 5 + 10 + \dots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}$
- 12) $a + (a+d) + (a+2d) + \dots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$

خوارسم فصل

فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وايي.

د فکتوریل علامه دا ($n!$) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times n$$

قضيه: $0! = 1$ کيږي.

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضيه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $k < n$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

د $\binom{n}{n} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کریں کہ $\binom{n}{n-1} = n$ کیہی؟

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \{n - (n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)! (n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)! \cdot 1} = n$$

ثبوت کریں کہ $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ کیہی؟

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0! (n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کریں کہ $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ کیہی؟

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \{(n+1) - (n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کریں کہ $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ کیہی؟

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! \{n - (k-1)\}!} + \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)! \cdot k(k+1)! \cdots n}{(k-1)! (n-k+1)!} + \frac{(n-k)! (n-k+1) \cdots n}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1) \cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k! \{k \cdot (k+1) \cdots n\} + (n-k+1)! \cdot (n-k+1) \cdots n}{(n-k+1)! \cdot k!}$$

$$= \frac{k! \cdot \{k(k+1) \cdots n\} + (n-k+1)! \cdot \{(n-k+2) \cdots n\}}{(n-k+1)! \cdot k!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k! (n-k+1)!} = \frac{n! (k+n-k+1)}{k! (n-k+1)!} = \frac{n! (n+1)}{k! (n-k+1)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \\
 \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k}
 \end{aligned}$$

د بېنوم قضيه *Binomial Theorem*:

که چېرته (a) او b حقيقي عددونه او (n) يو طبيعي عدد وي نو

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n \dots 1$$

د رياضي د استقراء پواسطه د پورتنۍ قضیې ثبوت پورتنۍ قضیه د (1) لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو او د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو.

د (1) مساوات دواړه خواوې په $(a+b)$ کې ضربوو.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n (a+b) &= (a+b) \left\{ \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n \right\} \\
 &= \binom{n}{0} (a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1} (a^n b + a^{n-1} b^2) + \dots \\
 &\quad + \binom{n}{k} (a^{n-k+1} b^k + a^{n-k} b^{k+1}) + \binom{n}{n} (a b^n + b^{n+1}) \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right\} a^n b + \left\{ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right\} a^{n-1} b^2 + \dots + \left\{ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right\} a^{n+1-k} b^k \\
 &\quad + \dots + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \dots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}
 \end{aligned}$$

که دغه مجموعه په Σ وښیونو لیکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ.

$$(x + y)^5$$

$$(x + y)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{5-k} y^k$$

$$(x + y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x y^4 + y^5$$

ثبوت کړئ چې $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ کېږي؟

پنجم فصل

ليميټ *limit*انټروال *Interval*:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلي ته انټروال وايي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- ترلي انټروال *Closed Interval*:

هغه انټروال دی چې د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې وي.

اوپه غټو قوسو ښودل کيږي. لکه:

$$A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,]$$

او د سيټ په شکل داسې ليکل کيږي.

$$A = [x \in \mathbb{R} / 1 < x < 10]$$

2- نيم کښ انټروال *Half Open Interval*:

هغه انټروال دی چې د يوه انجام نقطه پکې شامله او د بل انجام نقطه پکې شامله نه وي. لکه:

$$A = [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$$

اوه سيټ په شکل داسې ليکل کيږي: $A = [x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < 14]$

3- خلاص انټروال *Open Interval*:

هغه انټروال دی چې د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې نه وي. لکه:

$$A = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)$$

او د سيټ په شکل داسې ليکل کيږي.

$$A = (x \in \mathbb{R} / 4 < x < 16)$$

مجاورت *Vicinity*:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که يوه نقطه د يوه انټروال په وسطي نقطه کې واقع وي نو دا انټروال د دې نقطې متناظر مجاورت دی.

لکه (1) د (5) او (3) متناظر مجاورت دی. په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیت تعریف:

Kart weierstras کارت وېرس ترېس انگلیسي ریاضیدان چه په (1815 – 1897) م سنه کې اوسېده د لیمیت تعریف داسې کړېدې.

دیوی تابع لیمیت په یوه نقطه کې هغه عدد دی چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسې مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیت په مجاورت کې شامل وي.

یعنی د $F(x)$ د تابع لیمیت د (a) په نقطه کې (b) دي په دې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د (D) یو داسې مجاورت موجود وي چه د (D) د هر عنصر تصویر په (N) کې شامل وي. او داسې لیکل کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیت د $x \rightarrow 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (5x + 3) = 5 \cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

د پورته تابع د لیمیت ثبوت په دوه طریقو کېږي.

1- د جدول پواسطه 2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیت ثبوت:

(x) ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-12	-7	-2	3	8	13	16	23	28

د پورته جدول څخه معلومیږي چه (x) ته په هره اندازه چه (1) ته نژدې قیمت ورکړ شي په هماغه اندازه د (y) قیمت (8) ته نژدې کېږي.

1- د مجاورت په طريقه د تابع د ليميت ثبوت:

د تابع ليميت (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8 - \varepsilon, 8 + \varepsilon)$$

د (D) د مجاورت د پيدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8 - \varepsilon < 5x + 3 < 8 + \varepsilon$$

$$8 - \varepsilon - 3 < 5x < 8 + \varepsilon - 3$$

$$5 - \varepsilon < 5x < 5 + \varepsilon$$

$$\frac{5 - \varepsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5 + \varepsilon}{5}$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{5}$$

$$D = \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}, 1 + \frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$ قيمت ورکوو.

$$N = (8 - 0.5, 8 + 0.5)$$

$$N = (7.5, 8.5)$$

$$D = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{5}, 1 + \frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$

$$D = (0.9, 1.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0.9} (5x + 3) = 5 \times 0.9 + 3 = 7.5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.1} (5x + 3) = 5.5 + 3 = 8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع ليميت دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x \rightarrow 1} \left(3 - \frac{1}{x}\right) = 2$ کېږي؟

$$N = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$$

$$2 - \varepsilon < 3 - \frac{1}{x} < 2 + \varepsilon$$

$$2 - 3 - \varepsilon < -\frac{1}{x} < 2 - 3 + \varepsilon$$

$$-1 - \varepsilon < -\frac{1}{x} < -1 + \varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)} > -x > \frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$N = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) = \left(2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4} \right)$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{3}{4}} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = 3 - \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1} - \frac{5}{4} = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = 3 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{1} - \frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

د لیمیت د استعمال ځایونه *Utilization of limit*

اسحق نیوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لایبنز (Leibniz) په (1646 - 1716) م کالونو کې د لیمیت پواسطه د انتیګرال او دیفرینسیال مسايل حلول یعنی د لیمیت د استعمال ډېر مهم ځایونه د دیفرینسیال او انتیګرال د مسايلو حلول دي. او هم د مشتق تعریف د لیمیت څخه په غیر ناممکن دی.

ارشمیدس د دایرې د محیط د اندازه کولو لپاره داسې محاطي مضلعګانې په دایره کې رسمولې چې ضلعي یې بی اندازه کوچنۍ وي په دې ترتیب یې د (2π) تقریبي قیمت پیدا کړ. نوموړي هم د لیمیت د استعمال څخه استفاده کړې وه.

د لیمیت پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیت پیدا کړو. نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ د تابع لیمیت د $(x \rightarrow 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (5x - 8) = 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیت $(x \rightarrow -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیت په $x \rightarrow 3$ کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(4 - \frac{5}{x+2} \right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

د صفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیت پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع د لیمیت پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یی لیمیت همدغه ثابت عدد دی.

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 0} (7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$$

که په تابع کی ثابت عدد نه ؤ لیمیت یی په صفر کی صفر دی.

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیت:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت او مخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیت یی په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

ب: چه په صورت کې ثابت عدد وي او په مخرج کې نه وي ليميت يې په صفر کې لايټناهي دي.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 3x} = \frac{7}{0} = \infty$$

ج: چه په صورت کې ثابت عدد نه وي او په مخرج کې وي ليميت يې په صفر کې صفر دی.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 7x}{2x^2 + 7x - 11} = \frac{0}{-11} = 0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کې ثابت عدد نه وي دلته بيا څو حالتونه موجود دي.

a- چه د صورت او مخرج د تيت حد درجې مساوي وي ليميت يې په صفر کې د کوچني توان حد و
د ضربونسبت دي.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 - 6x^2 + 12x}{5x^3 + 3x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(7x^2 - 6x + 12)}{x(5x^2 + 3x - 6)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 - 6x + 12}{5x^2 + 3x - 6} = \frac{12}{-6} = -2$$

b- چه د کسر د صورت د تيت حد درجه د مخرج د تيت حد د درجې څخه ډېره وي ليميت يې
په صفر کې صفر دی.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{11x^4 + 5x^3 - 4x^2}{8x^3 - 4x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(11x^3 + 5x^2 - 4x)}{x(8x^2 - 4x - 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{11x^3 + 5x^2 - 4x}{8x^2 - 4x - 3} = \frac{0}{-3} = 0$$

چه د کسر د صورت د تيت حد درجه د مخرج د تيت حد د درجې څخه کمه وي ليميت يې په
صفر کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 + 5x^2 - 4x}{2x^4 + 2x^3 + 5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(7x^2 + 5x - 4)}{x(2x^3 + 2x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + 5x - 4}{2x^3 + 2x^2 + 5x}$$

$$= \frac{-4}{0} = -\infty$$

په (∞) کې د یوې تابع لیمیت:په (∞) د یوې تابع لیمیت په دوه حالتو کې مطالعه کوو.الف: په (∞) کې د تامې تابع لیمیت: د تامې تابع لیمیت په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 7x^2 + 7x - 17) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3 - \frac{7}{\infty} + \frac{7}{\infty^2} - \frac{17}{\infty^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^3 = 3 \cdot \infty^3 = \infty$$

ب: په (∞) کې د کسري تابع لیمیت: د کسري تابع لیمیت په (∞) کې په درې حالتو کې مطالعه کوو.a- که د کسر د صورت درجه د مخارج د درجې څخه ډېره وه لیمیت یې په (∞) کې (∞) دي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 8x^2 + 6x - 30}{2x^2 + 5x - 21}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{21}{x^3}} = \frac{7 - \frac{8}{\infty} + \frac{6}{\infty^2} - \frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty} + \frac{5}{\infty^2} - \frac{21}{\infty^3}} = \frac{7}{0} = \infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخارج د درجې سره مساوي وي نو لیمیت یې په (∞) کې د لوړ توان والا حدود ضریبو نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 8x^2 + 6x - 30}{2x^3 + 5x^2 - 21x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{30}{x^3}}{2 + \frac{5}{x} - \frac{21}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{8 - \frac{8}{\infty} + \frac{6}{\infty^2} - \frac{30}{\infty^3}}{2 + \frac{5}{\infty} - \frac{21}{\infty^2} + \frac{3}{\infty^3}} = \frac{8}{2} = 4$$

c- که د کسر د صورت درجه د منخرج د درجې څخه کمه وي لیمیت یې په (∞) کې صفر دي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 8}{x^3 + 2x^2 - 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

د لیمیت قضیې *Theorems of limit*

اوله قضیه:

د ثابتې تابع لیمیت په یوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_3 12 = 12$$

دویمه قضیه:

د یوه عدد او یو تابع د حاصل ضرب لیمیت د تابع د لیمیت او ثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kb$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 6x^2 = 6 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 6 \times 2^2 = 24$$

دریمه قضیه:

دو تابعگانه د مجموعی لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + 7x^3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 5x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 \\ (5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3) &= 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 \\ (5 \cdot 4 + 7 \cdot 8) &= 5 \cdot 4 + 7 \cdot 8 \\ (20 + 56) &= 20 + 56 \\ (76) &= 76 \end{aligned}$$

خلورمه قضیه:

دوه تابعگانو د حاصل ضرب لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot h(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \cdot c$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1)^2 &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \\ = (-1 - 1)^2 &= (-1 - 1) \cdot (-1 - 1) \\ (-2)^2 &= (-2)(-2) \Rightarrow 4 = 4 \end{aligned}$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c} \\ &\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0 \right) \end{aligned}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x - \lim_{x \rightarrow 0} 3}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0 - 3}{0 + 1} = -3$$

شپږمه قضيه:

د یوې جذري تابع لیمیت په یوه نقطه کې د تابع لیمیت د جذر سره مساوي دی په هماغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{8x^6} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} 8x^6} = \sqrt[3]{8 \cdot 2^6} = 2 \cdot 2^3 = 16$$

بې نهایت کوچنۍ تابع: که د یوې تابع لیمیت په یوه نقطه کې صفر شي دی تابع ته بې نهایت کوچنۍ تابع وایي. لکه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

تبصره:

a- د بې نهایت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

b- د بې نهایت کوچنۍ تابعګانو د ضرب حاصل هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x \rightarrow a$ په صورت کې یوه بې نهایت کوچنۍ تابع وي نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varepsilon(x)} = \infty$$

d- که چېرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع وي او $u(x) \neq 0$ وي نو $v(x) = \frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کې د $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)$ تابع لیمیت پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

مثال: د $\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}$ تابع لیمیت په $x \rightarrow \infty$ کی پیدا کری؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1- د $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ثبوت:

$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ فرضوو او دا چه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + \varepsilon(x)$ دی نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

2- د $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = \{b_1 + \varepsilon_1\} + \{b_2 + \varepsilon_2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2 + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\}$$

$$\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2$$

3- د دوه تابعگانو د حاصل ضرب لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د حاصل ضرب

سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2 + b_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_1 \cdot \varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_2 \varepsilon_1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = b_1 b_2$$

4- د دوه تابعگانو د نسبت لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د نسبت سره مساوي

دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

ثبوت:

$$f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواؤ څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1) - b_1(b_2 + \varepsilon_2)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$= \frac{b_1 b_2 + b_2 \varepsilon_1 - b_1 b_2 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2 + b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 + b_1 b_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

څرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه دي نو صفر کېږي. نو ثابت شوه چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د سانډويچ قضيه:

که $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ درې تابعگانې ولرو چې $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

نو $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ کېږي.مثال: که $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \leq u(x) \leq \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)$ وي نو $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = ?$ دی.

$u(x)$ وي نودسانډويچ د قضيي سره سم د $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)$ قيمت پيدا كړئ؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$$

تمرین:

لاندی لیمیتونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x^2 + 5x + 3)$

2- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x - 5)$

3- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$

4- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 4x^2 + 7x - 14}{2x^2 - 11x + 7}$

5- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 21x}{3x^3 + 5x^2 + 7x}$

6- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 4x^2}{7x^2 - 3x}$

7- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 3}{2x^2 - 3x + 1}$

8- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x + 5}{3x - 1}$

9- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 11}{2x^3 + 3x^2 - 4x + 7}$

10- $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 - 3x^2 + 4x - 12)$

11- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 3x + 7}{1 + \frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x-3}{x-5} + \frac{x}{x+5} + \frac{x+4}{x} \right)$

آتمه قضیه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

په داسې حال کې چې (n) یو طبعي عدد او (a) یو حقيقي عدد دې.

ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + a \lim_{x \rightarrow a} x^{n-2} + a^2 \lim_{x \rightarrow a} x^{n-3} + \dots + a^{n-2} \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + \dots + a^{n-2} \cdot a + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} + a^{n-1} = na^{n-1}$$

دغه قضيه د ټولو جذري افادو د ليميت د پيدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x - a} = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} a^{\frac{-(n-1)}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{1-5}{5}} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = ?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x = y^6)$ او $a = b^6$ بڼيو:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{\sqrt[3]{y^6} - \sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6} - \sqrt{b^6}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{y^2 - b^2}{y^3 - b^3}$$

$$= \lim_{y \rightarrow b} \frac{(y - b)(y + b)}{(y - b)(y^2 + by + b^2)}$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{y + b}{y^2 + by + b^2} = \frac{b + b}{b^2 + b^2 + b^2} = \frac{2b}{3b^2} = \frac{2}{3b}$$

$$\therefore b^6 = a \quad \therefore b = \sqrt[6]{a}$$

$$= \frac{2}{3 \sqrt[6]{a}}$$

ابهام Uncertainty:

په اعدادو يا (∞) باندې د عملیود نتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومی ته ابهام وائي. مبهم اشکال په لاندې ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنی ($\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$) ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لو هسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کې د لیمیت د پیدا کولو په وخت کې ابهام منع ته راشي صورت او مخراج په هغه متحول ویشو چه درجه یی لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \frac{\infty - 1}{\infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

2- د تجزئي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیت د پیدا کولو په وخت کې مبهم شکل غوره کړي او د تجزئي وړ وي تجزیه کوو یی.

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} &= \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} \\ \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) &= -2 - 2 = -4\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} &= \frac{2^2 - 6 \cdot 2 + 8}{2 - 2} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 4x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2) - 4(x - 2)}{x - 2} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} (x - 4) = 2 - 4 = -2\end{aligned}$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یو تابع ابهام د تقسیم او تجزیې پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی یې ضربوو.

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} &= \frac{\sqrt{16} - 4}{16 - 16} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\ \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}^2 - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\ \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} &= \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) &= \infty - \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2) \\ &= \sqrt{3+1}+2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{10x - 4x^2 - 4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-4x^2 + 10x - 4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-4x^2 + 2x + 8x - 4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{-2x(2x-1) + 4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2 \cdot 2 - 1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

د $(1^\infty, \infty^0, 0^0)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ کار اخیستل کیږي. چه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

د $e = 2.718281828$ عدد د یوه جرمني عالم ایولر Euler پواسطه کشف شوېدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ایولر د فارمول شکل ته ورواړو نو $\frac{1}{\alpha}$ په x بشیو:

$$x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \quad \therefore \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \therefore x \rightarrow \infty \quad \therefore \quad u \rightarrow 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\beta \frac{\alpha}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \left\{ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u} = x \Rightarrow u = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad u \rightarrow 0 \quad \therefore \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left\{ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right\}^{\alpha\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right\}^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \ln(1+x) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right\} = \ln \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}$$

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \quad \therefore x \rightarrow 0 \quad \therefore u \rightarrow \infty$$

$$= \ln \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\} = \ln \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right\} = \ln e = 1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

د سوال د حل لپاره $(e^x - 1)$ په (y) نښو:

$$e^x - 1 = y \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+y) = x \ln e = \ln(1+y)$$

$$x = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore y \rightarrow 0 \quad \therefore x \rightarrow \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره:

که یوه تابع د $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د لیمیت د لاس ته راوړلو لپاره یې طبعي لوگاریتم نیسو او د پورتنیو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل یې لرلو د $(0 \cdot \infty)$ شکل ته یې را اړوو او د مخکینیو څلورو حالتو څخه چې په هر حالت یې ابهام د منځه تللو ابهام یې د منځه وړو.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \{g(x) \ln f(x)\}$$

د مبہم شکل عمومی حالت: کہ $\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = 1^\infty$ وی پہ دی حالت کی (α) پہ
($u-1$) بنیو:

$$(\alpha = u - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} (1 + u - 1)^{\frac{v}{u-1} \cdot u-1} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (1 + \alpha)^{\frac{v}{\alpha} \alpha} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow a} (v\alpha)}$$

خرنگہ چہ $(\alpha = u - 1)$ دی نو کہ $(u \rightarrow 1)$ وکری پہ نتیجہ کی $(\alpha \rightarrow 0)$ کوی پہ
نتیجہ کی لیکو چہ:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)} = e^p$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = e^p, \quad p = \lim_{x \rightarrow a} \{v(u-1)\}$$

1- مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ پیدا کری؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x}, \quad v = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^p, \quad p = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x \left(1 + \frac{2}{x} - 1\right) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^p = e^2$$

2- مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبہ کری؟

حل: لمی د لیمیٹ بنہ لیکو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} v(u-1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل:

$$u = \cos x, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow 0} \{v(u-1)\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} (\cos x - 1) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^p = e^0 = 1$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} = ?$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1 + \frac{2}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{x+3}{x-1} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{4}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+8}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x}{x} + \frac{8}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{8}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{4 + \frac{8}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{4}{1} = 4$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\cos 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin^2 x - 1}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = ?$

حل:

$$x-1=y \Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = u \Rightarrow y = \frac{1}{u} \quad \therefore y \rightarrow 0 \quad \therefore u \rightarrow \infty$$

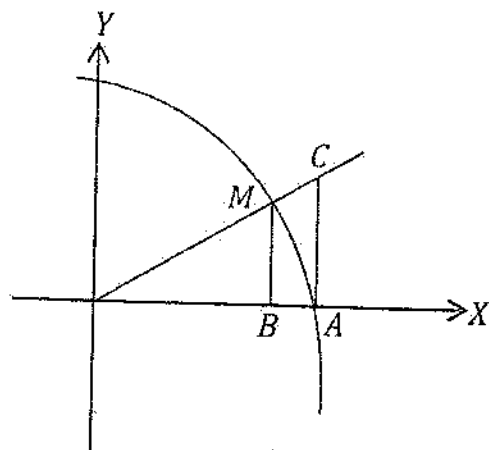
$$\frac{1}{\ln \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u} = e$$

د مثلثاتي تابعگانو لیمیت *limit of Trigonometrical Functions*

د یوې زاوېي د ساين او هغه زاوېي د نسبت لیمیت په صفر کی (1) دې، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ثبوت: په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسمو او هم ددی مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کې نیسو. مساحتونه یې پیدا کوو او مقایسه کوو یې.



$$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{MB} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \widehat{AM} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{OB} = \cos x, \quad \overline{MB} = \sin x, \quad \overline{OA} = 1, \quad \widehat{AM} = x$$

$$\sin x \cos x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

د سانډويچ د قضیې سره سم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = ? \text{ مثال: 1-}$$

حل:

$$2x = \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha}{2} \quad \therefore x \rightarrow 0 \quad \therefore \alpha \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} = ? \text{ مثال: 2-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 2x}{7x \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{7x \cos 2x} = \frac{10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{10}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = ? \text{ مثال: 3-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + 2\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = ? \text{ حلورم مثال: 4-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x \cdot \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{\frac{3x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x}}{5x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2} = ? \text{ مثال: 5-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x+6x}{2} \sin \frac{4x-6x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin(-x)}{x^2}$$

$$2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

6- مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1} = ?$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\cos^2 x - \cos x}$$

$$= \sqrt{2(1^2) - 1} = \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

د تابعگانو متماديټ (اتصال):

د اتصال له مخی تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع 2- غیر متمادي تابع

1- متمادي تابع:

هغه تابع ده چه دگراف د ترسیم په وخت کی یی د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنی گراف یی پریکړون نه لري په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپوننتشل تابع، لوگاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعگانې متمادي تابعگانې دي په دی شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلی نه وي.

2- غیر متمادي تابعگانې:

هغه تابعگانې دي چه گراف یی څو ټوټی وي. لکه هوموگرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکننټ او کوسیکننټ تابعگانې.

کولای شو چې متمادي تابعگانې په غیر متمادي تابعگانو بدلی کړو مگر نشو کولای چې غیر متمادي تابعگانې په متمادي تابعگانو بدلی کړو.

د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه درې دي:

1- د (a) نقطه باید په $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ کې شامل وي.

2- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیت په یوه نقطه کې باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

که پورتنۍ درې واړه شرطونه په یوه تابع کې موجود وه تابع متمادی ده او که د دغه درې شرطو څخه یو پکې موجود نه و تابع متمادی نه ده غیر متمادی ده.

1- مثال: وینایست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \rightarrow 2$ په نقطه کې متمادی ده.

حل:

$$2 \in \text{dom} f(x) \because 2 \in \mathbb{R} \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7 \quad -2$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7 \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادی ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کې وڅېړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په (-1) کې صفر کېږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفرګوي د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی ($-1 \notin \text{dom} f(x)$) نو تابع متمادی نه ده.

د تابع د لیمیت شرطونه: که دیوی تابع د ښي لاس لیمیت د تابع د چپ لاس د لیمیت سره مساوي وي نو تابع لیمیت لري. او که د ښي لاس لیمیت د چپ لاس د لیمیت سره مساوي نه و لیمیت نه لري.

د ښي لاس لیمیت :

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د ښي لاس لیمیت دې په دی شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(a, a + \delta)$ یو خلاص انټروال موجود وي چه ددی انټروال د هر عنصر تصویر د (N) په مجاورت شامل وي او داسې لیکل کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

د چپ لاس لیمیت:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس لیمیت دې پدی شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(-\infty - a, a)$ یو انټروال موجود وي چه ددی مجاورت د هر عنصر تصویر د (N) په مجاورت کې شامل وي او داسې لیکل کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; x < 2 \\ x^2 - 3 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

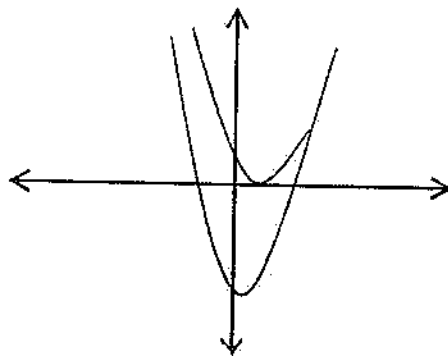
حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 - 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \exists$$



4- مثال: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ 1 - x & ; x < 1 \end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې یې متماذیت وڅېړئ؟
حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1+} (2x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} (1 - x) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \nexists$ تابع لیمیت نه لري.

نو تابع د $(x = 1)$ په نقطه کې غیر متماذي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x = a)$ په نقطه کې متماذي وي او $f(x)$ په $(x = g(a))$ کې متماذي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x = a)$ کې متماذي ده.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a))$$

2- د یوې طاقت لرونکې تابع د لیمیت د پيدا کولو لپاره لمړی د تابع لیمیت پيدا کوو او بیا یې په هماغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^a = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپوننشل تابع د لیمیت د پيدا کولو لپاره قاعده د تابع د توان د لیمیت په توان لیکو.

$$\lim_{x \rightarrow a} (b)^{f(x)} = b^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

4- د لوگاریتمي تابع لیمیت په یوه نقطه کې د تابع د لیمیت د لوگاریتم سره مساوي دی په هماغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \log_b f(x) = \log_b \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

5- د یوې مثلثاتي تابع لیمیت په یوه نقطه کې د هغه تابع د لیمیت د مثلثاتي نسبت سره مساوي دی په هماغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

د متماډي تابعگانو خواص:

که د دوه تابعگانو څخه هره یوه په یوه نقطه کې متماډي وي نو د دوی مجموعه، تفاضل، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کې متماډي دی.

مثال: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعگانې متماډي وي نو ثبوت کړئ چې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$ هم متماډي دي.

حل:

$$1: Df(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$

$$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متماډي ده.

$$1: Dg(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$

$$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متماډي ده.

اوس د تابعگانو د مجموعې او حاصل ضرب متماډیت وڅېړو.

الف:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 1) = 6$$

$$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = f(1) + g(1) = 6$$

ب: د او تابعگانو د حاصل ضرب متماډیت وڅېړئ؟

$$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

د تابعگانو حاصل ضرب هم متماډي دی.

د لاندی تابعگانو لیمیټ پیدا کړئ؟

1: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x + 17)$

2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x + 1}$

3: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 5x^2 - 11x + 1)$

4: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

شپاړلسم فصل

مشتق

مشتق مفعوله صيغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کې د مصدر څخه د نورو افعالو او اسماءو اخیستلو ته اشتقاق وایي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمې درجې، دریمې درجې او داسې نورو تابعگانو د مېل پیدا کول دي.

د خطي تابع مېل:

په خطي تابع کې د مستقیم خط مېل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ پواسطه پیدا کیږي.

مثال: $A(3, 7)$ او $B(5, 9)$ د مستقیمې کرښې دوه نقطې دي مېل یې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 7}{5 - 3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنگه چې په منحنی خطو کې دوه نقطې په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدې امله دمنحنی خطو د مېل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د مېل څخه استفاده کوي. نو ځکه د منحنی مېل ته مشتق وایي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راگرشوی ده د مېل ددغه تابع د گراف دوه نقطې په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطې پیدا کړو او مېل یې لاسته راوړو فرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحنی خط دوه نقطې دي نو د مستقیم خط د مېل څخه استفاده کوو نو لیکو چې:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحنی خط دهرې اختیاري نقطې مېل عبارت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د گراف مېل د $P(3, -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل: څرنگه چې د $P(3, -3)$ په نقطه کې $x = 3$ دی نو کولای شو چه د مېل په فارمول کې د (x) په عوض (3) وضع کړو.

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h) - (3+h)^2 - (2 \cdot 3 - 3^2)}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 2h - (9 + 6h + h^2) - 6 + 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 9 - 6h - h^2 + 9}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 - h) = -4 \Rightarrow m = -4$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 - 1$ د تابع مېل د $(x = -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\{(-3+h)^3 - 1\} - \{(-3)^3 - 1\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-27 + 27h - 9h^2 + h^3 - 1 + 27 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 9h^2 + 27h}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 - 9h + 27)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 9h + 27) = 27$$

منځنۍ یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعنې:

$$S = f(t)$$

د t_1 او t_2 په وختونو کې د وهل شوو فاصلو د تفاضل او وختو د تفاضل نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وايي. یاد اړه د تابع او متحول د زیادت نسبت ته متوسط سرعت وايي.

$$v = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیت ته لحظوي سرعت وايي

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کی متوسط تغیرات د $[2, 5]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2, 4]$ په انټروال کی پیدا

کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که x د (Δx) په اندازه زیادت وکړي نو y د (Δy) په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیت ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنۍ تصور پیري فرمات (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 - 1665) م کې کړی و نوموړي خپلې لیکنې د نړۍ ریاضیدانانو ته پیشنهاد کړلې. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 - 1727) م او جورج ویلیام لایبنز (1664 - 1715) م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کې ثابت او د ساینسدانانو کمیسیون ته یې پیشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یې په ډېر ښه ډول وکړ.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \dot{y} = \dot{f}(x)$$

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \end{aligned}$$

حل:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

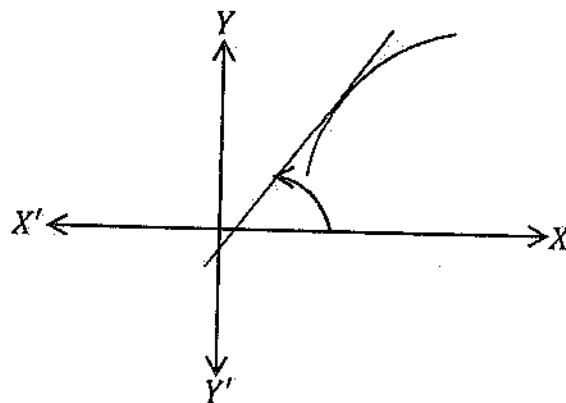
4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وڅېړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)\} - (2x^2 + x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 2x^2 - x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x + 1) = 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 1 \end{aligned}$$

د مشتق هندسي تعبیر

په یوه نقطه کې د یوه منحنی خط ممېل دهغه زاوېي تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یې د (XX') د محور د مثبت جهت سره جوړوي.



1- مثال: د هغه مماس ممېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحنی باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمېږي.

حل:

$$\begin{aligned}
 m = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(x + \Delta x)^3 - 1\} - \{2x^3 - 1\}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2
 \end{aligned}$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس مېل $m = f'(x) = f'(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

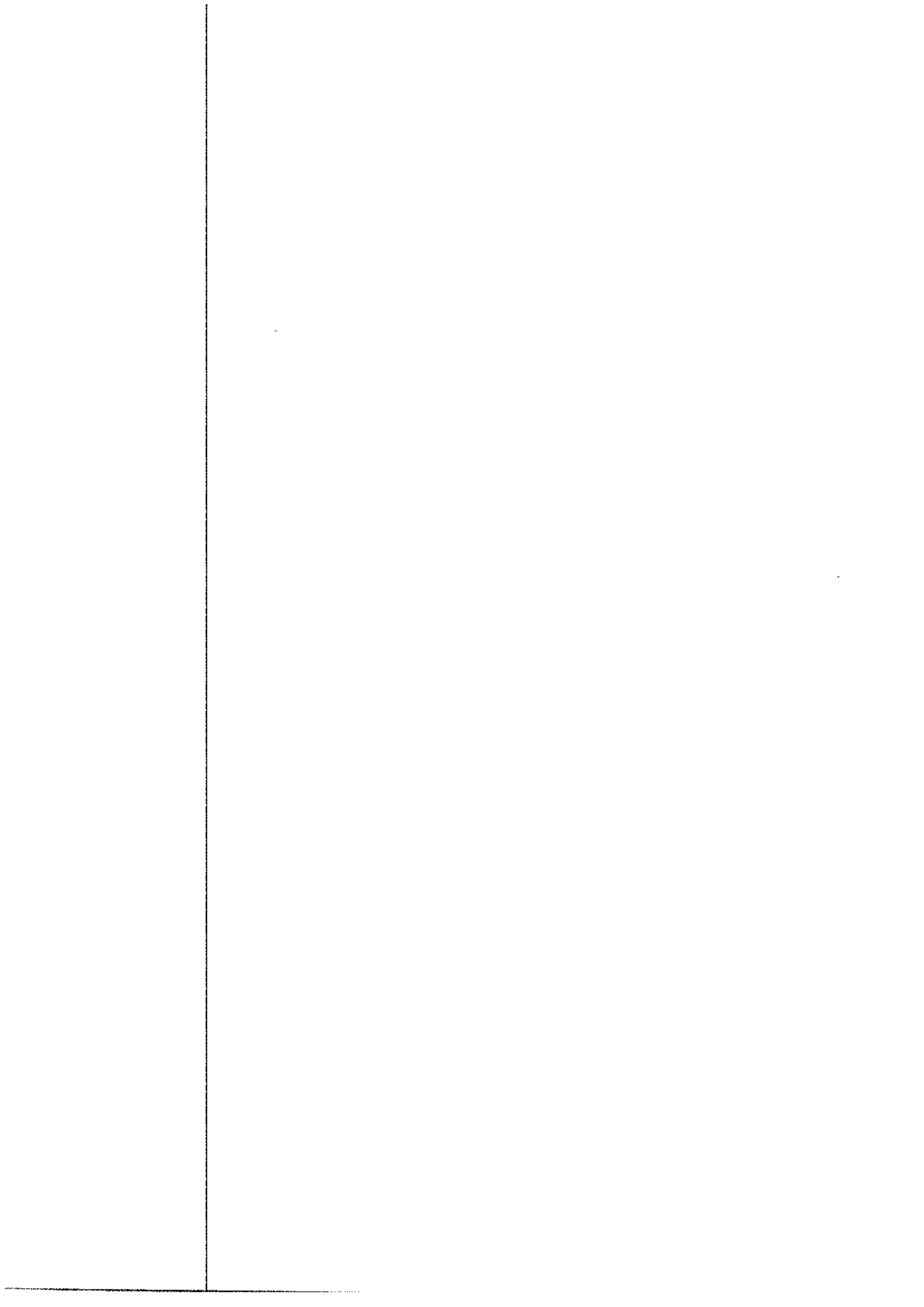
2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس مېل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4
 \end{aligned}$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې او خصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 2x_0 + \Delta x \\
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4
 \end{aligned}$$



4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د (x_0) پہ نقطہ کی پیدا کریں؟

حل:

$$y = f(x_0)$$

$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندی تابعگانو مشتق پیدا کریں؟

1- $f(x) = \sqrt{x+1}$

2- $f(x) = \frac{x^2-5}{x}$

$$3- f(x) = 1 - \frac{3}{x}$$

$$5- f(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$4- f(x) = \frac{2}{x^2 + 5x - 7}$$

$$6- f(x) = 5x - 1$$

د مشتق قوانین:

اوله قضیه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض: $y = c$ یوه تابع لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق:

مفروض: $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکې تابع ده.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = f'(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x) \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \}$$

$$y' = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعگانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعگانو د مجموعی مشتق د تابعگانو د مشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: u او v دوه تابعگانې لرو.

مطلوب: ثبوت وچه $y = u + v$

ثبوت: د تابعگانو د جمع حاصل په y ښیو:

$$y = u + v$$

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = u' + v'$$

د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق

د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق د تابعگانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعگانې لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه: $y = u - v$

ثبوت: د (u) او (v) تابعگانو تفاضل په (y) ښیو.

$$y = u - v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$

$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$

$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = u' - v'$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \quad \& \quad v = 1$$

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$

$$v' = 0 \quad \therefore y' = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2, \quad v = -3x, \quad w = 5$$

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y' = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$

$$y' = 8x - 3$$

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعگانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولي تابع مشتق ضرب دويمه تابع جمع د دويمې تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانې لرو. او د حاصل ضرب تابع يې په (y) ښيو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب: ثبوتو چه: $\dot{y} = \dot{u}v + v\dot{u}$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$

$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$

$$\Delta y = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\dot{y} = v\dot{u} + \dot{v}u + 0 \cdot \dot{v}$$

$$\dot{y} = \dot{u}v + \dot{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \Rightarrow \dot{u} = 3x^2$$

$$v = x^2 - 3 \Rightarrow \dot{v} = 2x$$

$$\dot{y} = \dot{u}v + \dot{v}u$$

$$\dot{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$

$$\dot{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \dot{u} = 4x - 5$$

$$v = 3x - 15 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$\dot{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$

$$\dot{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$

$$\dot{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

د حاصل تقسيم مشتق:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی د صورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندې.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانې لرو د خارج قسمت تابع يې په (y) ښوونو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتو چې:

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

1- مثال: د $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$u = 2 + 3x \Rightarrow \dot{u} = 3$$

$$v = 1 - 2x \Rightarrow \dot{v} = -2$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

$$\dot{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x) = \frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$u = 7x - 15 \Rightarrow \dot{u} = 7$$

$$v = 2x^2 + 3x \Rightarrow \dot{v} = 4x + 3$$

$$\dot{f}(x) = \frac{7(2x^2 + 3x) - (4x + 3)(7x - 15)}{(2x^2 + 3x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2 + 3x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2 + 3x)^2}$$

3- مثال: د $y = \frac{x^2}{3x+1}$ تابع مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$u = x^2 \Rightarrow \dot{u} = 2x$$

$$v = x + 1 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$\dot{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$

$$u = x^2 \Rightarrow \dot{u} = 2x$$

$$v = x + 1 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$\dot{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

$$\dot{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي، لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع. فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ يوه تابع راځي شوی ده.

مطلوب: ثبوتو چې:

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال: د $y = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}][\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sqrt{(x + \Delta x)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

مثال: د $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4x - 11}$ مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 6x + 4}{2\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4x - 11}}$$

د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي. لکه که د f تابع د $g(x)$ تابع وي او g د x تابع وي نو دغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق د فارمول د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

$$\Delta y = \Delta y \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) \Rightarrow \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$$

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

نوپه دې اساس که $y = u^n$ وي مشتق يې $y' = nu^{n-1} \cdot u'$ دی.

او که $y = \sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

1- مثال:

$$\begin{aligned}
 y &= (2x^2 - 1)^3 \\
 \dot{y} &= 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x \\
 &= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x \\
 \dot{y} &= 48x^5 - 48x^3 + 12x
 \end{aligned}$$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\dot{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \dot{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

خلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x \\
 &= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}
 \end{aligned}$$

نوٹ:

کہ د (f) تابع د (x₀) پہ نقطہ کی مشتق ولری نو f'(x) دہفہ مماس مہل دی چہ د [x₀, f(x₀)] پہ نقطہ پہ منحنی بانندی مماس وی.

مثال: د f(x) = x³ دتابع مہل د x₀ = 1 پہ نقطہ کی پیدا کری؟

حل: څرنگه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کپړي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مهل يې عبارت دی.

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کې د مشتق وړ وي نو دا تابع په دی نقطه کې متمادي ده مگر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کې متمادي وي مگر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ د تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ

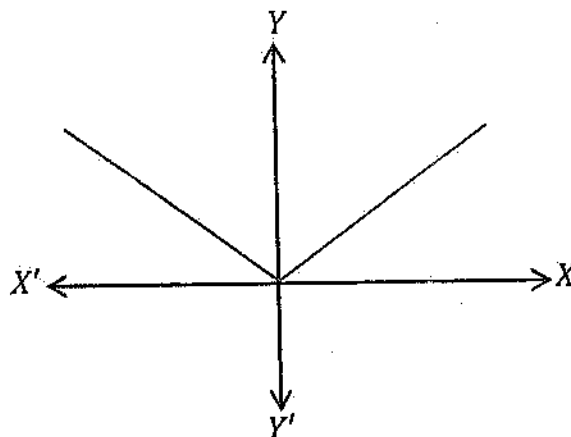
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

لیمیت نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



د مثلثاتی تابعگانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$= 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

$$y' = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او u د x تابع وي نو مشتق يې عبارت دی له:

$$f'(x) = u' \cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پيدا کړئ؟

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow u' = 4 \\ f'(x) = u' \cos u \end{array} \right]$$

$$f'(x) = 4 \cos 4x$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$$

$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow h'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

3- مثال: د $y = \frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = 1+x \Rightarrow \dot{v} = 1$$

$$\dot{y} = \frac{\cos x(1+x) - 1 \cdot \sin x}{(1+x)^2}$$

د $y = \cos x$ تابع مشتق:

د $y = \cos x$ تابع مشتق $\dot{y} = -\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

$$y = \cos x \Rightarrow \dot{y} = -$$

پورتنی مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2} (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} (-2 \sin x \cos x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{2(1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$= -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x$$

1- مثال: $f(x) = \sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$f(x) = \dot{u}v + \dot{v}u$$

$$f(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$$

$$f(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کری؟

$$y = x \Rightarrow \dot{y} = 1$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$f(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$$

$$f(x) = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \cos 2x$$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$$f(x) = 2(2 \sec 2x \tan 2x + 2 \sec^2 2x) = 4 \sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$$

د $y = \tan x$ تابع مشتق

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$\dot{y} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

خلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$u = \cos x \Rightarrow \dot{u} = -\sin x$$

$$v = \sin x \Rightarrow \dot{v} = \cos x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad \therefore \cot gx = -\csc^2 x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u = 1 \Rightarrow \dot{u} = 0$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\dot{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$u = 1 \Rightarrow \dot{u} = 0$$

$$v = \sin x \Rightarrow \dot{v} = \cos x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x}$$

$$\dot{y} = -\cot x \csc x$$

که په یوه تابع کې څو متحولې موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کې وي نو کله چې د دغه ډول تابعگانو مشتق پیدا کوو نو په ثبوت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاتډي فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

لمړۍ مثال: د $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'(x) = \frac{f'(x)}{f'(y)}$ رابطې څخه پیدا کوو.

$$y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'(x) = y'(x) - \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_x - (1)'_x = 0 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}$$

$$f'(y) = y'_y - \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_y - (1)'_y = 1 - \frac{x}{1} \cos \frac{x}{y} - 0 = 1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}$$

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{-\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}}$$

اوس په $y'(x)$ رابطه کې د (x) او (y) قیمتونه وضع کوو چې $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi, 1)} = \frac{\frac{1}{1} \cos \frac{\pi}{1}}{1 + \pi \cos \frac{\pi}{1}} = \frac{\cos \pi}{1 + \pi \cos \pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'(x) = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$\hat{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\hat{f}_{(x)} = -\frac{\hat{f}_{(x)}}{\hat{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دريم مثال د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\hat{f}_{(x)} = -2x$$

$$\hat{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\hat{y}_{(x)} = -\frac{\hat{f}_{(x)}}{\hat{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتني تابع ضمني مشتق په لاندې ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 \hat{y} - \hat{y} - 2x = 0$$

$$\hat{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\hat{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق:

که یوه دويمه درجه دوه مجهوله تابع راگرځوي وي او وغواړو چه دويم ضمني مشتق يي پيدا کړو نو اول ضمني مشتق يي د فارمول پواسطه پيدا کوو او بيا د مشتق د فارمولو پواسطه دويم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دويم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\hat{f}_{(x)} = 2x$$

$$\hat{f}_{(y)} = -2y$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f_{(x)}}{f_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\dot{y}(x)$ د رابطی $y''(x)$ پیدا کوو

$$y''(x) = \frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''(x) = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کی د (y) مشتق نظر (x) ته د $(1,1)$ په ټکي کی پیدا کړئ او د منحنی د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$f_{(x)} = 2x + y$$

$$f_{(y)} = x + 2y$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f_{(x)}}{f_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \Rightarrow x + 2y \neq 0$$

$$\dot{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلې ضمني مشتق په لاندی ډول هم پیدا کولای شو.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

$$2x + y + x\dot{y} + 2y\dot{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\dot{y} = 0$$

$$\dot{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$

$$f_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$

$$f_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f_{(x)}}{f_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د یو تابع دویم، دریم، څلورم ... او نور مشتقات ونیسو ترڅو چه مشتق یې صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق ونیسئ؟

حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

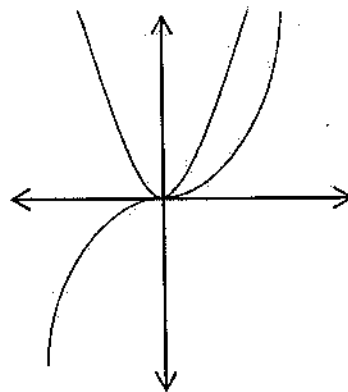
$$f'''(x) = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع گراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پیدا کړئ؟ او گراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$y = x^2 \quad y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دویم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نو د $(y^{(9)})^2 + y^2$ قیمت پیدا کړئ؟

$$y = \sin x + \cos x$$

$$y'(x) = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$

$$y''(x) = -\sin x - \cos x$$

$$y'''(x) = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$$

⋮

$$y^{(9)}(x) = \cos x - \sin x$$

$$(y^{(9)}(x))^2 + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$

$$= \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$$

د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو د تزايد او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو، اصغري نقطو، اعظمي حجم، د لنډې فاصلې، اعظمي مساحت اوداسې نورو شیانو د پیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعگانو د گراف د ترسیم لپاره.

4- د مهمو اشکالو د لیمیت د پیدا کولو لپاره.

لنډه دا چې د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه او نورو علومو کې زیات گټور دی.

1- د توابعو د تزايد او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a, b]$ په تړلي انټروال کې متمادي وي او په (a, b) انټروال کې مشتق ولري نو که $f'(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزایده ده. او که $f'(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: ونیسئ چې د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع گراف متزاید دي؟

حل: څرنګه چې تابع تامه ده نو $\text{dom} f(x) = \mathbb{R}$ دي مشتق یې په لاندې ډول دي:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

که په مشتق کې د (x) په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کېږي نو $f(x) > 0$ دی په نتیجه کې تابع متزايدة ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انتروال کې متناقضه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده او مشتق لري د تناقض د انتروال د معلومولو لپاره $f(x) < 0$ پیدا کوو.

$$f(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انتروال کې منفي دی نو تابع په همدې انتروال $(-1, 1)$ کې متناقضه ده.

درېم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ؟

حل:

$$D_{f(x)} = IR$$

$$f(x) = 5x - 4$$

$$f'(x) = 5 > 0$$

تابع متزايدة ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انتروال کې متزايدة او په کوم انتروال کې متناقضه ده.

حل: که < 0 وي تابع متناقضه ده او که > 0 وي تابع متزايدة ده.

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$$y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$$
 د تناقض شرط

$$y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$
 د تر اید شرط

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+2$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	4	1	0	1	4	$+\infty$

د یوې تابع بحراني ټکي

د یوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه Maximum point :

د تابع د گراف تر ټولو جگي نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه Minimum point :

د تابع د گراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



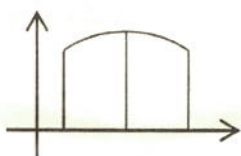
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يې صفروي.

$$y' > 0 \quad y' < 0$$

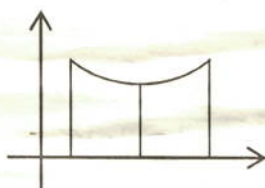
متزايدة تابع :

که د (a, b) په فاصله کې $y' > 0$ وي، تابع متزايدة ده.



متناقصه تابع :- که د (a, b) په فاصله کې $y' < 0$ وي، تابع متناقصه ده.

$$y' < 0 \quad y' > 0$$



د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دې نقطه کې د تابع گراف خپل جهت ته تغير ورکوي.

لمړې مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ يوه تابع راکړ شوی ده وواياست چه ددې تابع گراف خو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پيدا کوو اود (x) قيمتونه پيدا کوو.

$$\dot{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

$$\dot{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad \therefore A(2, -2) \text{ اصغري نقطه ده}$$

$$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \quad \therefore B\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{54}\right) \text{ اعظمي نقطه ده}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$\dot{f}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	-2	-2	$+\infty$

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه يا نسبتي نقطه پيدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پيدا او علامې يې مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{1 \cdot (x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{x^2-2x-2x^2+2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

$$-x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 + 8 = 12$$

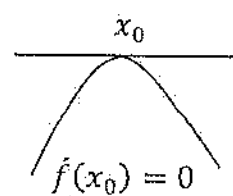
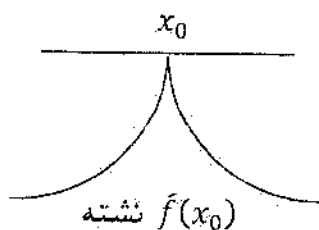
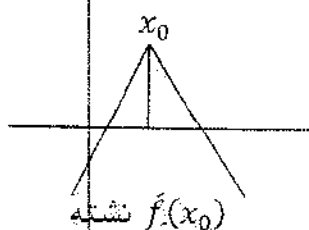
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 + \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 - \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = 0.73$$

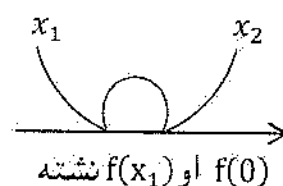
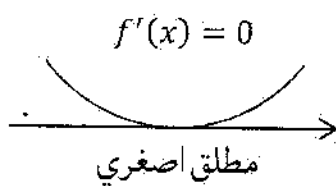
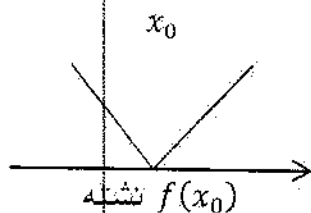
		-3	-2.73	-1	0.73			
x								
$f(x)$	-	-	0	+	+	0	-	-
$f'(x)$		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	
		$\frac{2}{15}$	min	0	max	-2		

د کسر اشاره د جذرو منع کی مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي Maximum د $f(x)$ په تابع کی که د هر (x) لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ ټکی ته مطلق اعظمي وايي.



مطلق اصغري Minimum که د $f(x)$ د تابع د تعريف د ناحیې د هر (x) لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



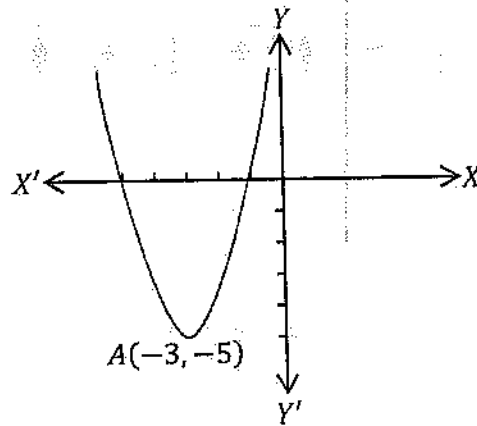
لېمړې مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x) = x + 3 \quad \because f'(x) = 0 \quad \therefore x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$$A(-3, -5)$$



دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تابع اعظمي او اصغري نقطې پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

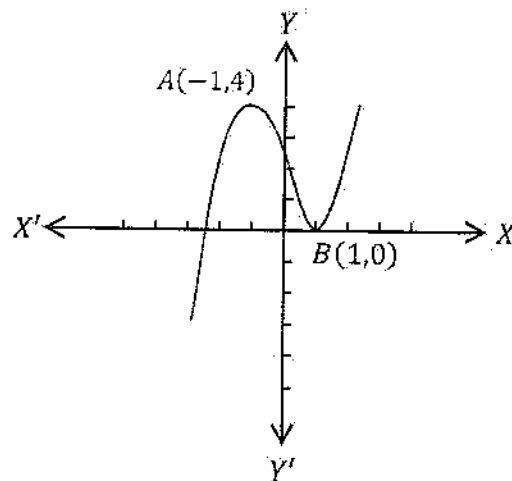
په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow A(1, 0) \quad \text{اصغري ده}$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow B(-1, 4) \quad \text{اعظمي ده}$$



د تابع د گراف د ترسیم طریقه:

- 1- د تابع اتصال مطالعه کوو.
- 2- د محور بنوسره د گراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.
- 3- د ترزاید او تناقص د انتروال د معلومولو لپاره د مشتق اشاری مطالعه کوو.
- 4- د گراف مجانبونه معلوموو.
- 5- د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.
- 6- په جدول کې د تابع د گراف وضعیت مطالعه کوو.
- 7- پیدا شوی نقطې د وضعیه کمیټونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو یې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع گراف رسم کړئ؟

1- د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ \& } x_2 = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطې $A(-1, 0)$ او $B(2, 0)$ دي.

2- د $Y\dot{Y}$ د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پيدا کړو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\dot{Y}$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تابع د گراف اعظمي يا اصغري نقطې د پيدا کولو لپاره د تابع مشتق نيسو.

$$\dot{y} = 1 - 2x$$

$$\dot{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د (x) دغه قيمت په تابع کې وضع کوو. د (y) قيمت لاس ته راوړو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه يا اعظمي ده يا اصغري ده. د تابع دويم مشتق پيدا کوو که $y'' > 0$ و اصغري نقطه ده او که $y'' < 0$ و نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنگه چه هميشه منفي دي نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پيدا کول:

د تابع دويم مشتق نيسو او قيمت يې پيدا کوو بيا يې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعيه کميات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\dot{y} = 3x^2 + 18x - 6$$

$$y'' = 6x + 18$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3, 73)$ انعطاف نقطه ده.

د دویمه درجه تابع گراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

دومین یې د حقیقي اعدادو سپټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کی تابع متمادي ده. د تناظر محور یې د اول مشتق پواسطه پیدا کیږي:

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محور دی.

د راس د نقطې د پیدا کولو لپاره د تناظر په محور کی د x قیمت په تابع کی وضع کوو دراس د نقطې وضعیه کمیتونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه یې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وډ تابع گراف مقعر دی یعنی گراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وډ تابع گراف محدب دی یعنی گراف اعظمي نقطه لري.

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ تابع تحولات مطالعه کړئ او گراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$D_f = (-\infty, +\infty) - 1$$

2- د XX د محور سره د تقاطع نقطه پیدا کوو:

$$y = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$A(1,0), \quad B(3,0)$$

3- د $(Y\hat{Y})$ د محور سره د تابع د تقاطع نقطه پیدا کوو.

$$x = 0$$

$$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$$

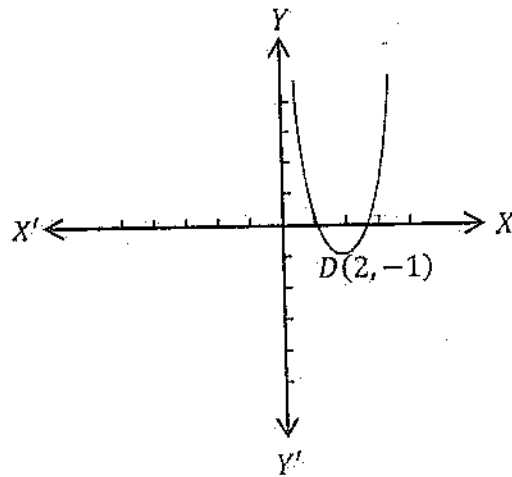
$$y = 3$$

$$C(0,3)$$

4- د بحراني نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو او د (x) قیمت پیدا کوو دا قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راځي د (x) او (y) یوه جوړه قیمتونه بحراني نقطه تعینوي بیا یې دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ و بحراني نقطه اصغري ده او که $y'' < 0$ و بحراني نقطه اعظمي ده.

$$f(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2, -1)$$



دویم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه او گراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$D_f = (-\infty, +\infty) - 1$$

2- د XX' سره تقاطع:

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$-x + 2 = 0$$

$$-x = -2 \Rightarrow x = 2$$

$$A(0,0) \text{ \& } B(2,0)$$

3- د YY' سره تقاطع:

$$x = 0$$

$$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$C(0,0)$$

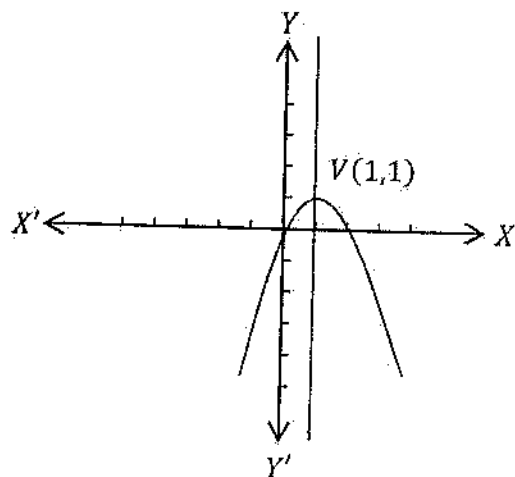
4- بحراني نقطه يې پيدا کوو. نومشتق يې نيسو.

$$f(x) = -2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

$$V(1,1)$$



هوموگرافیک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي. عمومي شکل يې دادی

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجانِب: - *Asymptote*: که د یوه مستقیم او یوه منحنی تر منځ فاصله په لایتناهي کي صفر شي دا مستقیم ددی منحنی مجانب دي.

مجانِب د منحنی لپاره لازېښود دي.

مجانِب په دری قسمه دی.

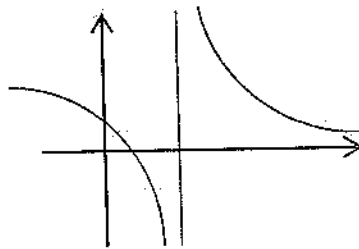
1- عمودي مجانب (*Vertical Asymptote*)

2- افقي مجانب (*Horizontal asymptote*)

3- مایل مجانب (*Slant Asymptote*)

1- عمودي مجانب:

که په یوه ثابت عدد کي د تابع لیمیت (∞) شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندی د YY محور سره موازي رسمېږي د تابع دگراف عمودي مجانب دی. یعنې که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.

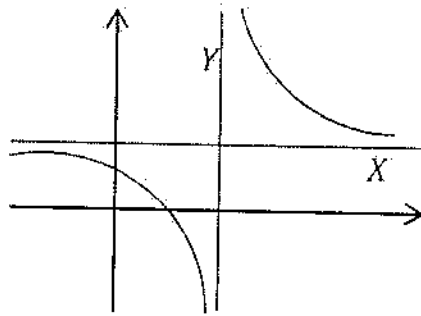


2- افقي مجانب:

که په لايتناهي کې د یو تابع لیمیت یو ثابت عدد و نو هغه خط چه ددی ثابت عدد په ترتیب د $Y\dot{Y}$ دمحور سره موازي رسمېږي د راگرشوي تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

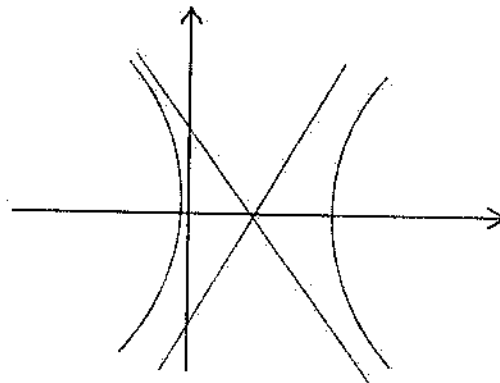
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د گراف افقي مجانب دي.



3- مایل مجانب *Slant Asymptote*

په کسري تابعگانو کې که د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه ډېره وه نو دغه ډول تابعگانی مایل مجانب لري د مایل مجانب د ترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړې مثال: $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

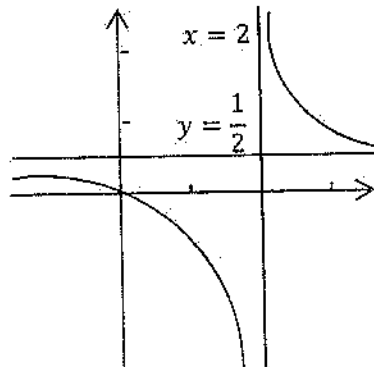
حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2 - 4} = \frac{3}{0} = \infty$$

عمودي مجانب دی. $x = 2$

مايل مجانب يې پيدا کوو.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{4}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{2 - \frac{4}{\infty}} = \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب دی. $y = \frac{1}{2}$ دویم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحنی مجانبونه وټاکئ؟

حل: مايل مجانب:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + 2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري. ځکه د هرې تابع گراف چه مايل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

درېم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پيدا کړئ؟

حل:

عمودي بجانب

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \infty$$

بالاخره $x = -1$ او $x = 2$ عمودي بجانبونه دي.

مايل بجانب نلري.

د بجانب د ټا کلو عمومي لار:

1- که د $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموگرافیک تابع کی (m) د صورت درجه او (n) د مخرج درجه وي نو

الف: که $m < n$ وي نو د (x) محورا فقي بجانب دی.

ب: که $m = n$ وي نو $y = b$ افقي بجانب دی (b) د صورت او مخرج د مساوي درجو والا حدود ضربونو نسبت دي.

ج: که $m > n$ وي افقي بجانب نلري د مايل بجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج د درجی څخه د واحد په اندازه ډېره وي مايل بجانب لري او افقي بجانب نلري.

مثال: $f(x) = \frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزايد او تناقص په باب خپل نظر وليکئ؟

حل:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x - 1(2x-5)}{x^2} = \frac{2x - 2x + 5}{x^2} = \frac{5}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

تابع متزايدة ده.

انعطاف نقطہ یی داسی پیدا کیجی

$$f(x) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$f'(x) = 6ax + 2b$$

$$f'(x) = 0$$

$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

$$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$$

$$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$$

$$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$$

1- مثال د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات و خہری او گراف یی رسم کری؟

حل:

$$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x+2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$$

A(0, -4) اصغری نقطہ ده.

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$$

$$y_2 = 0$$

B(-2, 0) اعظمی نقطہ ده.

انعطاف نقطہ پیدا کوو.

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0$$

$$6x + 6 = 0$$

$$x = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$$

د $C(-1, -2)$ انعطاف نقطه ده.

د XX' سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$$y = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)^2 = 0$$

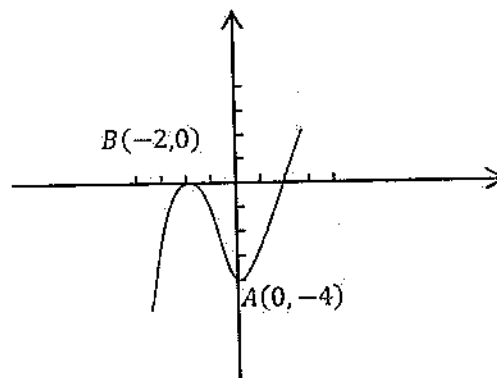
$$\left. \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x = 1 \\ C(1, 0) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x + 2)^2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x = -2 \\ D(-2, 0) \end{array} \right\}$$

د YY' سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کړو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

$$E(0, -4)$$



دويم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او گراف يې رسم کړئ؟

حل:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$\hat{f}(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2)$$

$$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د XX سره تقاطع پيدا کړو $y = 0$ فرضوو.

$$f(x) = 0$$

$$-x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow -x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$O(0,0) \Rightarrow B(3,0)$$

د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$$

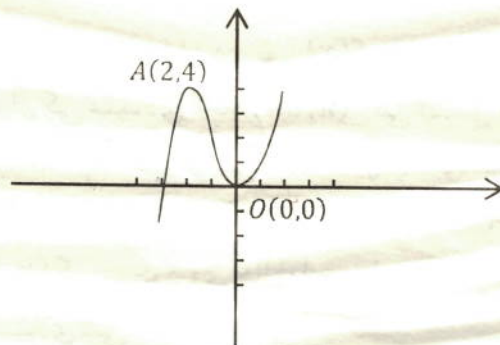
انعطاف نقطه پيدا کړو دويم جذري پيدا کړو.

$$f''(x) = -6x + 6$$

$$x = 1$$

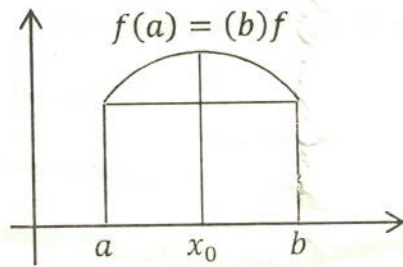
$$f(1) = 2$$

$$C(1,2)$$



د رول قضيه: *Theorem of Rolle*

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \leq x \leq b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نو د $a < x < b$ په انټروال کې یو ټکی شته چې $f'(x) = 0$ وي $(x_0, f(x_0))$



ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي. نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابت وي نو $f'(x) = 0$ دی.

2- که $f(x)$ تابع ثابت نه وي او $x_2, x_1 \in (a, b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نو تابع په $x_0 \in [a, b]$ نقطه کی Maximum لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع یوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کی $f'(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a, b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د Rolle قضیه پری تطبیق کړی؟

حل: پوهیږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر (x) لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نو د Rolle قضیې سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلأ د (x_0) یوه نقطه باید موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنگه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلې اقلأ یو حل باید په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی درې ځله دا قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د $[a, b] = [-1, 1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ په تابع باندی د Rolle قضیه تطبیق کړی؟

حل: د انټروال د پیل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذیر نه ده مگر د رول قضیه پری د تطبیق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1, 1]$ متمادي ده او د $[-1, 1]$ په انټروال کی د (x_0) یو عدد شته چه $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

$$y(x) = \frac{u(x)}{2\sqrt{u}}$$

$$f(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمدی وي او د (a, b) په انټروال کې د مشتق وړ وي نو د (a, b) په انټروال کې د (c) یو عدد شته چې لاندې رابطه تحقیق کړي.

$$f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ یعنی } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

ثبوت: $f(x) - f'(x) \cdot x$ په $g(x)$ ښیو:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \dots \dots \dots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \dots \dots \dots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرگندېږي چې $g(a) = g(b)$ دی نو درول د قضیې سره سم د $[a, b]$ په انټروال کې د (c) یو داسې عدد شته چې $g'(c) = 0$ دی نو لیکو چې

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$g'(c) = 0$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه د $[a, b] = [1, 3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کې متمدادي ده او د $(1,3)$ په انټروال کې د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیې سره سم د $(1,3)$ په انټروال کې یو (x_0) شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

د (c) د پیداکولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{26}{6}} = \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مګر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کېږي.

د لوهپیتال قاعده:

که د کسري تابعګانو لیمیت د $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوهپیتال په طریقه کولای شو چه لیمیت یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیت په یوه نقطه کې د تابع د مشتق د لیمیت سره مساوي دی په همغه نقطه کې. که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود و دویم مشتق یې نیسو په همدې ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کوو تر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots\dots$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} &= \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{8 + 2 - 10}{4 - 4} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x + 5x - 10}{x^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x(x - 2) + 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 5)}{(x - 2)(x + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x + 2} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

لمری مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \frac{0 + \sin 2 \cdot 0}{0 - \sin 2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \frac{3^4 - 81}{3 - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 81)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = 4 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

دبحرانی تکیو تطبیق:

1- داسی دوه عددونه پیدا کړئ چه د جمع حاصل یی (20) اود ضرب حاصل یی اعظمی

وی؟

حل:

$$x = \text{اول عدد}$$

$$20 - x = \text{دویم عدد}$$

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2 = \text{د ضرب حاصل}$$

$$f'(x) = 20 - 2x$$

$$f'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$$

$$f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

$$f(0) = 20 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$$f(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$$

اعظمي نقطه $[10, 100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يې (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t - 2)(t - 3)$ ده متوسط سرعت يې د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځنی سرعت} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{2 - 0}{4 - 3} = 2$$

3- د کرې د حجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$د کرې حجم = v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$د کرې مساحت = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{\text{sphere}}}{A_{\text{sphere}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د ساتي گيرېد او فارنهایت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ رابطه موجود ده د ساتي گيرېد او فارنهایت تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم لیکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F + \Delta F - 32) - \frac{5}{9}(F - 32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د یوې مستطیلې څمکې محیط (200) دی اعظمي مساحت یې پيدا کړئ؟

حل:

$$x = \text{د مستطیل طول}$$

$$y = \text{د مستطیل عرض}$$

$$S = \text{د مستطیل مساحت}$$

$$\text{محيط} = 2x + 2y = 200$$

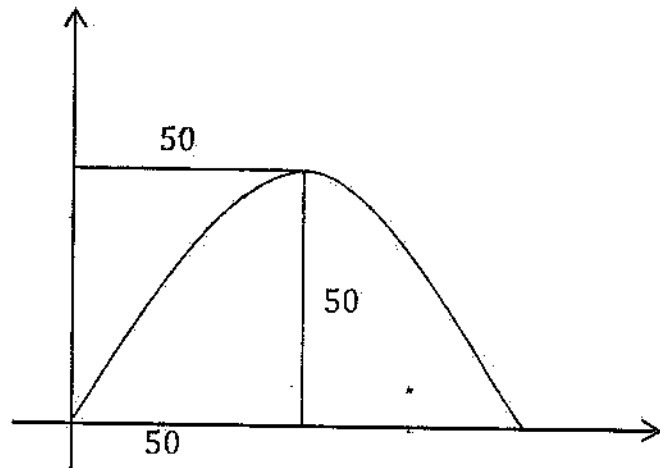
$$\text{محيط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2, D_f = IR$$

د. $[0, 100]$ په انټروال کې دتابع اعظمي مساحت پيدا کوو.

$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = -100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$



6- د (A) ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحنی دپاسه حرکت کوي وویاست چه څه وخت به د (A) او مبداء ترمنځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2_{(A)} + y^2_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$$

$$d'_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$$

$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x^4 = 4 \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د درې واړه بعدونو مجموعه يي (24) ده اعظمي حجم يي پيدا كړئ؟

حل: د قاعدې اوږدوالی په (x) او ارتفاع په (y) ښیو.

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

$$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$$

$$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2 \quad \therefore V'(x) = 0 \quad \therefore 48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$$

$$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$$

د مكعب مستطيل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه يي $(8cm)$ ده.

اولسم فصل

انتیگرال *Integral*

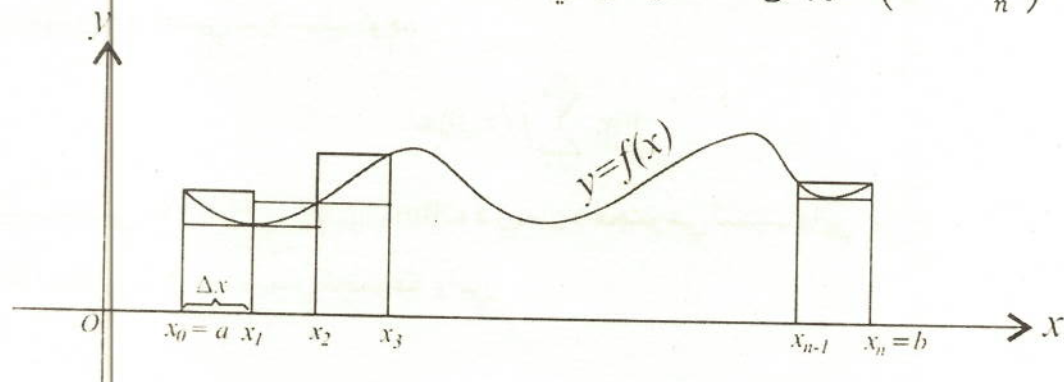
انتیگرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي. او په اصطلاح کی د مشتق د عملیې معکوسی عملیې ته انتیگرال وائي. یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقې ته انتیگرال وایي.

ارشمیدس چه په (287 - 212) ق م کی یې ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او د جامداتو د حجمو د محاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیگرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه. ریمان (1866 - 1826) اولاینز (1941 - 1875) معین انتیگرال کشف کړ.

د انتیگرال علامه لاینز ($\int$) لیکلی ده. چه د ریمان د مجموعی (sum) د لمړي توري غزېدلی شکل دی. غیر معین انتیگرال لیوویل (1882 - 1809) کشف کړی دی. گانوس (1855 - 1777) د انتیگرال اولین جدول ترتیب کړی دی. د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیگرال په باب زیات پرمختګ وشو.

د ریمان مجموع *Riemann's sum*:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په اتروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده. دهغه سطحی د مساحت د پیدا کولو لپاره چه د X د محور او $y = f(x)$ تابع د گراف تر منځ واقع دی که منظم هندسي شکل یې لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یې مساحت پیدا کیري. او هندسي شکل یې نه لرلو نو د $[a, b]$ ترلی اتروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطی څخه لاس ته راځي.



د هر مستطیل د هر انتروال اوږدوالی د $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ لپاره په لاندې ډول دی.

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کې د لاندینيو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیونو لیکو چې:

$$f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \text{د لاندینيو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه}$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه}$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په A وښیونو:

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

د رابطې د اطراف لیمیت نيسو.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

د سانډویچ د قضیې سره سم لیکو چې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

لیمیت یعنې $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیت وایي.

$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وایي.

لومړۍ مثال: د $[0, 2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحنی او (x, x^2) د محور ترمنځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0, 2]$ انټروال په څلورو برابر برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0, \quad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د گراف د ترسیم لپاره د (x) قیمتونه په تابع کې وضع کوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

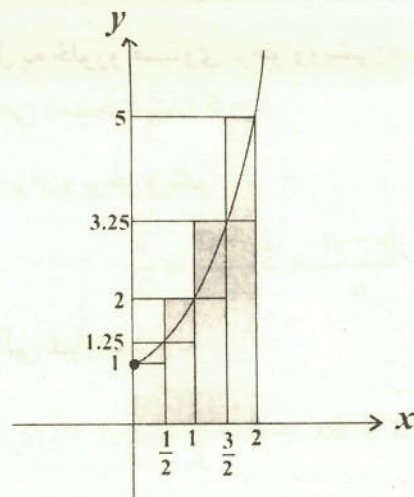
$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1, \quad A(0, 1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25, \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2, \quad C(1, 2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9 + 4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25, \quad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5, \quad E(2, 5)$$



$$د لاندینو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2} = 3.75$$

$$د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه = 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ریمان د مجموعی لیمیت د $[1, 10]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل: پوهیږو چه:

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n (1 + x_i) \Delta x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n x_i \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n (a + x_i) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{9}{n} i \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n i \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{11n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2} \right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دویم مثال: د $[0, 3]$ انتروال په شپږو مساوي برخو ووېشئ او $y = 3x$ د مستقیم خط او د (XX) د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3\Delta x = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2, \quad x_4 = 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$$

$$x_5 = 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3, \quad x_6 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], [x_4, x_5], [x_5, x_6]$$

$$[0, 1], \quad \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right], \quad \left[2, \frac{5}{2}\right], \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right], \quad \left[3, \frac{7}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0, & A(0,0), & & f(1) &= 3(1) = 3 & B(1,3) \\
 f\left(\frac{3}{2}\right) &= 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), & & & f(2) &= 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow D(2,6) \\
 f\left(\frac{5}{2}\right) &= 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right), & & & f(3) &= 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow F(3,9)
 \end{aligned}$$

د انتیگرال مفهوم *Concept of Integral*:

انتیگرال دهغه تابع پیدا کول دي چه مشتق يي موجود وي يا د ريمان د مجموعی لیمیت ته انتیگرال وایي د انتیگرال علامه دا ($\int$) ده چه د ريمان د مجموعی *Sum* د لمړي توري غزبدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int f(x) dx$$

چه دلته $f(x)$ د انتیگرال تابع ده او dx نظر (x) ته د $f(x)$ د تابع د انتیگرال متحول دي.

د انتیگرال اقسام:

انتیگرال په دوه قسمه دی.

1- غیرمعین انتیگرال

2- معین انتیگرال

1- غیرمعین انتیگرال *Indefinite Integral*:

که د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع یوه لمړنۍ تابع وي نو د $F(x) + c$ د تابعگانو سیټ د $f(x)$ د تابع غیرمعین انتیگرال دی. اوداسی لیکل کیږي.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int x dx$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{7}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4} \sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x dx = \int \sqrt[8]{x^6} dx = \frac{x^{\frac{6}{8}+1}}{\frac{6}{8}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7} \sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16} \sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c \\ &= \frac{9}{16} \sqrt[3]{x^8} + c \end{aligned}$$

د غیر معین انتیگرال خواص:

لکه څرنگه چې د تابعگانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیگرال هم ځانگړي خواص لري چې به یې د ثبوت په منل شوي دي.

1- که (k) یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیگرال یې داسی پیدا کېږي:

$$\int k dx = k \int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5 dx$ انتیگرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5 dx = 5 \int dx = 5x + c$$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که a یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي، د تابعګانو د مجموعې او تفاضل انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې او تفاضل سره مساوي دی.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3) dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x) dx = 8 \int dx - 2 \int x dx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال یې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

مثال:

$$\begin{aligned} \int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx &= \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9x dx + \int dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c \end{aligned}$$

6- د دوه تابعگانو د حاصل ضرب انتیگرال د تابعگانو د انتیگرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي.

الف: لمړی یې ضربوو بیا یې انتیگرال نیسو.

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int [(x + 1)(x - 2)] dx \\ &= \int (x^2 - x - 2) dx = \int x^2 dx - \int x dx - 2 \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \end{aligned}$$

ب: د هرې تابع انتیگرال پیدا او بیا یې ضربوو.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx &= \int (x + 1) dx \cdot \int (x - 2) dx \\ &= \left[\int x dx + \int dx \right] \left[\int x dx - 2 \int dx \right] \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + c = \left(\frac{x^2 + 2x}{2} \right) \left(\frac{x^2 - 4x}{2} \right) + c \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c &\neq \left(\frac{x^2 + 2x}{2} \right) \left(\frac{x^2 - 4x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

7- د تابعگانو د خارج قسمت انتیگرال د تابعگانو د انتیگرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعگانې راکړشوي دي. ثبوتو چې د تابعگانو د خارج قسمت انتیگرال د تابعگانو د انتیگرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

$$\int (x^2 + 2x + 1) dx = \int x^2 dx + \int 2x dx + \int dx$$

$$= \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1 + x) dx = \int dx + \int x dx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int x dx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^{m+1} dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعگانو د انتیگرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5 dx$ انتیگرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5 dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیگرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2 \int (1-2x)^{-\frac{1}{5}} dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2(-\frac{1}{5}+1)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیگرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^x dx = 4e^x + c$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیگرال پیدا کول:

$$\int 7^{4x-3} dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3} dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3} dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

معین انتیگرال Definite Integral

که چری د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی متمادی وي او د $f(x)$ تابع ریمان د مجموعی لیمیت ته کله چه $n \rightarrow \infty$ او د فرعي انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \rightarrow 0$ ته وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پوری انتیگرال ته معین انتیگرال وایي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) ته د انتیگرال لاندیني سرحد او (b) ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2 dx$ معین انتیگرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

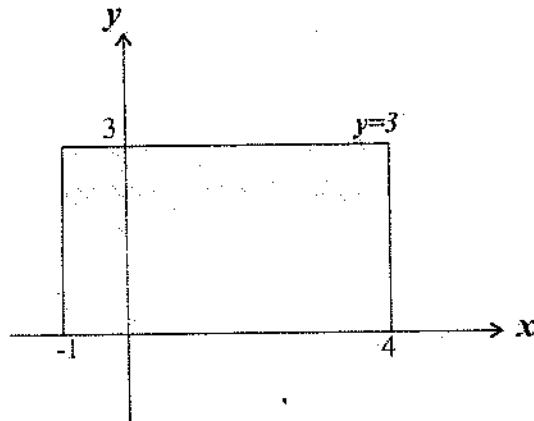
دویم مثال: د $y = 3$ مستقیم او د (XX) د محور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1, 4]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

$\int_{-1}^3 3 dx$ د مستطیل مساحت راښيي.

$$\text{د مستطیل مساحت} = 3[4 - (-1)] = 3 \cdot 5 = 15$$

د انتیگرال پواسطه یی مساحت په لاندی ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^3 3 dx = [3x]_{-1}^4 = 3[4 - (-1)] = 15$$



درېم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقيم او (XX) د محور ترمنځ په $[0, 3]$ انتروال کې جوړېږي محاسبه کړئ.

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3 \right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال: د هغه سطحې مساحت پيدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او (XX) د محور تر منځ د $[1, 2]$ په انتروال کې محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$

$$A_2 = 1(-1) = -1$$

$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (-2x+1)dx &= \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2 \\ &= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3 \end{aligned}$$

د معین انتیگرال خواص Properties of definite integral

1- د $[a, b]$ په انټروال کې د ثابتې تابع انتیگرال یعنې $\int_a^b c dx$ عبارت دی.

$$\int_a^b C dx = C \int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a, b]$ انټروال په (n) مساوي برخو ویشو یعنې $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر (x_i) لپاره د i -ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$= C \left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n} \right)$$

$$C(b-a) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = C(b-a) \frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد او یوې تابع د حاصل ضرب انتیگرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیگرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

ثبوت: که د $[a, b]$ انټروال د x_i چه $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ وي په (n) مساوي برخو ویشو نو د ریښان مجموعې او انتیگرال د تعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n k f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

مثال: د $\int_{-2}^2 4dx$ انټیگرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^2 4dx = 4 \int_{-2}^2 dx = 4[2 - (-2)] = 4 \cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ تابع یوه لمرنۍ تابع او په $[a, b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$ انټیگرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انتروال کې متمادی وي او $a = b$ وي نو انتیگرال یې صفر دی.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال د $\int_3^3 3x^2 dx$ انتیگرال محاسبه کړئ؟

$$\int_3^3 3x^2 dx = \left[\frac{3x^3}{3} \right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعگانو د مجموعی او تفاضل انتیگرال په یوه انتروال کې د تابعگانو د انتیگرالو د مجموعی او تفاضل د انتیگرالو سره مساوي دی په همغه انتروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانو انتیگرال د $[a, b]$ په انتروال کې نیول شوی دی نو:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \{f(x_i) \pm g(x_i)\} \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f(x_i) \pm \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

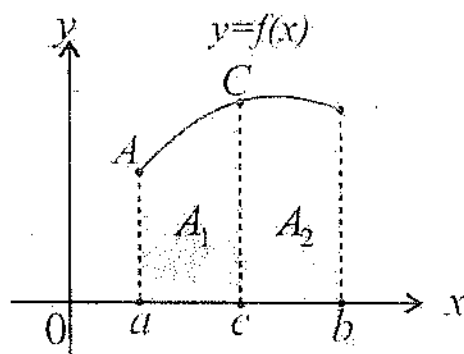
مثالونه:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2) dx &= \int_0^1 4 dx + \int_0^1 3x^2 dx \\ &= 4 \int_0^1 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx = 4[x]_0^1 + 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5 \\ \int_0^3 (x^2 - 1) dx &= \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27 - 9}{3} = \frac{18}{3} = 6\end{aligned}$$

6- که چېرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه ترلي انتروال چه د a, b او (c) ټکي پکې شامل وي او انتیگرال منونکي وي. نو د ټول انتروال انتیگرال د انتروال د ټوټو د انتیگرالو د مجموعی سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ثبوت: د $[a, b]$ انتروال د $[a, c]$ او $[c, b]$ په دوه انتروالو ویشو.



$A = \int_a^b f(x) dx$ د هغې سطحی مساحت دی چه د $f(x)$ د تابع د گراف او (XX) د محور ترمنځ د $[a, b]$ په انتروال کې واقع دي.

$$A_1 = \int_a^c f(x) dx \quad \text{او} \quad A_2 = \int_c^b f(x) dx$$

د تابع د گراف د ټوټو مساحت دی. نو لیکو چه:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

مثال: که $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ او $\int_0^8 f(x) dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x) dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \leq g(x)$ تابعگانی په $[a, b]$ کی انتیگرال منونکي وي او $g(x) \geq f(x)$ او $\Delta x \geq 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دی پس لیمیت یې هم مثبت وي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښیاست چه

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4} dx \leq \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2} dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12} [x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6} [x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12} (b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6} (b^3 - a^3)$$

اطراف په $(b - a)$ ویشو

$$1 - \frac{1}{12}(b^2 - a^2) \leq 1 + \frac{1}{6}(b^2 - a^2)$$

$$-\frac{1}{12}(b^2 - a^2) \leq \frac{1}{6}(b^2 - a^2)$$

$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6} \Rightarrow -1 < 2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادی وي او (m) اصغري نقطه او (M) اعظمي نقطه وي نو

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

ثبوت:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

دغه قضیه د انتیگرال د تخمینې قضیې په نوم یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ انتیگرال په تخمینې توګه حساب کړئ؟

څرنگه چې د $f(x) = e^{-x^2}$ تابع په $[0, 1]$ انټروال کې متمادی ده او $M = f(0) = e^0 = 1$ مطلق اعظمي او $m = f(1) = e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو لیکو چې:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$e^{-1}(1 - 0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1 - 0)$$

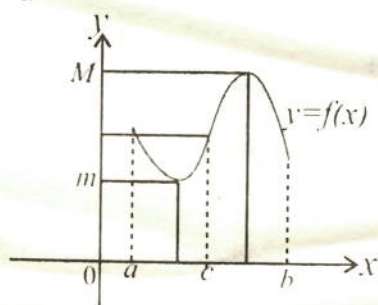
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a, b]$ کی متمادي وي نو د (c) یو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره د (m) او (M) قیمتونه په ترتیب سره د $[a, b]$ په انټروال کی د تابع اصغري او اعظمي نقطې دي او $c \in [a, b]$ دی

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ دی نو $m \leq k \leq M$ دی او د هر (c) حقیقي عدد لپاره $a \leq c \leq b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

پورته رابطه د متوسط قیمت درابطی په نوم یادېږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي او حاصل ضرب يې د مستطیل مساحت دی. یعنې:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1, 4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c) قیمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{64-1}{3} \right] = \frac{63}{3} = 21$$

د (x) په عوض (c) وضع کوو او د متوسط قیمت د قضیې څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې:

اوله قضیه:

که $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادی وي او (x) په دې انټروال شامل وي که $x \in [a, b]$ نولیکلای شوچه:

$$\dot{F}(x) = f(x)$$

$$\dot{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\dot{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) - F(x) + F(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x)|_a^{x+h} - F(x)|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بڼیو:

$$\dot{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t)|_a^{x+h} - F(t)|_a^x}{h}$$

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه لیکو چه

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$\hat{F}(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot 2x$$

$$\hat{F}(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ دتابع اولنۍ تابع اود $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي پدې صورت کې لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

ثبوت: که $F(x) = \int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x \in [a, b]$ لپاره $\hat{F}(x) = f(x)$ دی د تابعگانو تفاضل په (k) نښو:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$\hat{F}(x) = \int_a^b f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^b f(t)dt - F(x) = k \dots 1$$

د (x) په عوض (a) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt - F(a) = k \Rightarrow 0 - F(a) = k \Rightarrow k = -F(a)$$

د k قیمت په (1) رابطه کی وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt - F(x) = -F(a)$$

د (x) په عوض (b) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

اخي رابطه د $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$ شکل ښودل کيږي. دغه رابطه د اولنۍ تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتيگرال ترمنځ رابطه ښيي. چه د نيوتن «لاينز» په نوم ياديږي.

مثال: $\int_0^1 x^2 dx$ انتيگرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

یہ تعویضی طریقہ سرحد انتیگرال نیول:

انتیگرال دلاس ته راوړلو لپاره یی

$u = g(x)$ او $F(x) = f(x)$ نیو $\frac{du}{dx} = g(x)$ او $du = g(x)dx$ نیو:

$$\int_a^b f\{g(x)\} g(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیگرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x, \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5} \left[\frac{1}{u} \right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5} \left[\frac{1}{-7} - \frac{1}{-2} \right]$$

$$= -\frac{1}{5} \left[\frac{2-7}{14} \right] = -\frac{1}{5} \left[\frac{-5}{14} \right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3 (1 + 2x^3)^5 dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3, \quad \frac{du}{dx} = 6x^2, \quad x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2 (1 + 2x^3)^5 dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} du = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6} \left[\frac{u^6}{6} \right]_1^3 = \frac{1}{6} \left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{729 - 1}{6} \right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\bar{2}$$

پورته فارمول په غیر معین انتیگرال کی هم د تطبیق وړ دی.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$\begin{aligned}
 u &= 1 - 4x^2, \quad \frac{du}{dx} = -8x, \quad x dx = -\frac{1}{8} du \\
 \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot x dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{8} du\right) \\
 &= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) + C \\
 &= -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C
 \end{aligned}$$

دویم مثال: $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$ انتیگرال حساب کری؟

$$\begin{aligned}
 u &= x^4 + 2, \quad \frac{du}{dx} = 4x^3, \quad x^3 dx = \frac{1}{4} du \\
 \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \int \cos u x^3 dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4} du \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C \\
 \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C
 \end{aligned}$$

قسمي انتیگرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتیگرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ بنیو او د حاصل ضرب مشتق یې پیدا کوو.

$$\begin{aligned}
 (u \cdot v)' &= u'v + v'u \Rightarrow v'u = (u \cdot v)' - u'v \\
 \int v'u dx &= u \cdot v - \int u'v dx \\
 \int u dv &= u \cdot v - \int v du
 \end{aligned}$$

پورته رابطه په قسمي طریقہ د غیر معین انتیگرال فارمول دی.

که u او v تابعگانې د $[a, b]$ په انټروال کې تعریف شوی وي نو د معین انتیگرال فارمول په قسمي طریقہ په لاندې ډول دی.

$$\int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du \quad \vee \quad \int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

لمری مثال: د $\int x \sin x \, dx$ انتیگرال پیدا کړئ؟

$$u = x, \quad du = dx$$

$$v = -\cos x, \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \Rightarrow dv = \sin x \, dx$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x \, dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$u = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x \, dx$$

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

$$\int_0^1 -xe^x \, dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x \, dx$$

$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

دلوگاریتمي او اکسپوننشل تابعگانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $f'(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$f'(x) = (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right)$$

$$\frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \ln \left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او څرنگه چه $h \rightarrow 0$ تقرب وکړي نو $u \rightarrow \infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \ln \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

2- که $g(x) = a^x$ وي نومشتق يې دلاندي فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$\dot{g}(x) = a^x \ln a$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

$$(\ln y)' = (x \ln a)'$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = 1 \cdot \ln a + x \cdot 0 = \ln a$$

$$\dot{y} = y \ln a = a^x \ln a$$

د اعشاري لوگاريتم مشتق:

د $f(x) = \log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او کله چه $h \rightarrow 0$ تقرب وکړي نو $u \rightarrow \infty$ ته تقرب کوي.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}' = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)} \log_a e$$

$$f(x) = \{\log_a g(x)\}' = \{\log_a g(x)\}' \cdot \dot{g}(x)$$

$$= \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot \dot{g}(x) = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)} \log_a e$$

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = \dot{x} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = 1 \Rightarrow \dot{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \dot{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\dot{y} = \dot{u} \cdot a^u \ln a$$

3- که په لوگاریتمي تابعگانو کی د لوگاریتم قاعده د طبعي لوگاریتم څخه اعشاري لوگاریتم ته بدله شي ټول لوگاریتمي عددونه د صورت څخه مخرج ته اويا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{u} \log_a e = \frac{\dot{u}}{u \log_e a} = \frac{\dot{u}}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \dot{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \{ \log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1) \} \\
 f'(x) &= \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)' = \frac{1}{2} \{ \log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1) \}' \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \log_a e - \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} \log_a e \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2x}{x^2+1} \log_a e - \frac{2x}{x^2-1} \log_a e \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2x \log_a e \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) \\
 &= x \log_a e \left(\frac{x^2-1 - x^2-1}{x^4-1} \right) = \frac{-2x}{x^4-1} \log_a e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \{ \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \} \\
 f'(x) &= \left(\ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)' = \frac{1}{2} \{ \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \}' \\
 &= \frac{1}{2} [\{ \ln(x^2+1) \}' - \{ \ln(x^2-1) \}'] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) = \frac{-2x}{x^4-1}
 \end{aligned}$$

خلورم مثال: د $y = e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کری؟

$$y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنجم مثال: د $y = \sqrt[3]{2}$ مشتق پیدا کری؟

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[3]{2} \\
 \ln y &= \ln \sqrt[3]{2} = \ln 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln 2
 \end{aligned}$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x} \ln 2\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot (\ln 2)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln 2 \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 \cdot y = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \ln 2$$

شیپرم مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کری؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اوم مثال:

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$y' = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4 + 1} \log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4 + 1) \ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$y' = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_3 e = \frac{\frac{1}{x} \log_2 e}{\log_2 x} \log_3 e = \frac{1}{x \log_2 x \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \frac{\log_e x}{\log_e 2} \cdot \ln 2 \ln 3}$$

$$y' = \frac{1}{x \frac{\ln x}{\ln 2} \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \ln x \ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2 + 1)$$

$$\dot{y} = ?$$

$$x^2 + 1 = u$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{u} \log_a e = \frac{2x}{x^2 + 1} \log_{(x^2-1)} e$$

د معکوسو تابعگانو مشتق:

که دوه تابعگانې یو د بل معکوس وي نو مشتقونه یې هم یو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

یا:

$$\dot{y}_{(x)} = \frac{1}{\dot{x}_{(y)}}$$

نود ضمني تابعگانو د مشتق له مخې لیکو.

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{y}_x \cdot \dot{x}_y = \dot{y}_y \Rightarrow \dot{y}_x \cdot \dot{x}_y = 1 \Rightarrow \dot{y}_x = \frac{1}{\dot{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع له مخې پیدا کړئ؟

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\dot{y}_x = \frac{1}{\dot{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}} \log_e a = y \ln a = a^x \ln a$$

د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق دلاندې رابطو پواسطه پیدا کېږي.

$$1- (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2- (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3- (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4- (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(\arcsin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(\arccos x)' = ?$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}$$

$$= \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = ?$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

$$= \frac{\frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

لمري مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

$$\dot{y} = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

دويم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

$$\dot{y} = \{\log_5(\arctan x)\}' = \log_5 u = \frac{\dot{u}}{u \ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 + x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1 + x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

درېم مثال: د $y = \arctan e^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پيدا کړئ؟

$$\dot{y} = (\arctan e^x)' = (\arctan u)' = \frac{\dot{u}}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$\dot{y}(0) = \frac{e^0}{1 + e^{2 \cdot 0}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د يوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی د مجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړ شوی وي. د واقعي کسر د قسمي کسرو پيدا کول درې حالت لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري بېنومونه وي. لکه

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$= \frac{A(x^2 + x - 2) + B(x^2 - 3x - 10) + C(x^2 - 6x + 5)}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x - 2A - 10B + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$4x^2 - x - 39 = (A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x - 2A - 10B + 5C$$

$$A + B + C = 4$$

$$A - 3B - 6C = -1$$

$$-2A - 10B + 5C = -39$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x - 5} + \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$

دویم حالت:

چه د کسرد مخرجه ضربی عواملو کی تکراری بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x - 2)$$

$$3x^2 - 6x + 2 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - 3Bx + 2B + Cx - 2C$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (A + B)x^2 - (2A + 3B - C)x + A + 2B - 2C$$

$$A + B = 3$$

$$-2A - 3B$$

$$+ C = -6$$

$$A + 2B - 2C = 2$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

دریم حالت:

چه د کسرد مخرجه ضربی عوامل غیر تکراری ترینومونه وي په صورت کی یې بېنوم لیکل کیږي.

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)} \\
&= \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + B + 4C}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)} \\
&= 5x^2 + 8x + 9 = (A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + B + 4C \\
&A + C = 5 \\
&A + B + 2C = 8 \\
&B + 4C = 9 \\
&A = 3, \quad B = 1, \quad C = 1 \\
&\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}
\end{aligned}$$

د اکسپوننشل تابعگانو انتیګرالونه:

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرو چه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a \neq 1 \text{ \& } a \in \mathbb{R}$$

ثبوت:

$$\begin{aligned}
&\int a^x dx \\
&u = 1, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad du = 0 \cdot dx \\
&v = a^x, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a}, \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx \\
&\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C
\end{aligned}$$

لمری مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{1}{8} \cdot 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1} dx = ?$$

$$\int 3^{x+1} dx = \int 3^x \cdot 3 dx = 3 \int 3^x dx = 3 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

د لوگاریتمی تابعگانواتیگرال:

که $f(x) = \ln x$ ($x \in \mathbb{R}^+$) وي نواتیگرال یې په لاندې ډول دی:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

که $f(x) = \log_a x$ ($x, a \in \mathbb{R}^+$) وي نواتیگرال یې داسې پیدا کوو:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e, \quad du = \frac{1}{x} \log_a e dx$$

$$v = x, \quad \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a x - \int x \cdot \frac{1}{x} \log_a e dx = x \log_a x - \log_a e \int dx$$

$$= x \log_a x - x \log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

مثال: $\int \ln 3x dx$ غبرمعین انتیگرال پیدا کریں؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx$$

$$= x \ln 3 + x \ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یہ تعویضی طریقہ ہم کو لای شوجہ د غبرمعین انتیگرال قیمت پیدا کرو۔

لمری مثال:

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx = ?$$

$$u = -2x - 3, \quad \frac{du}{dx} = -2, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{1}{2} e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x+2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$

دریم مثال: $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیگرال پیدا کریں؟

$$\int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$2x = u, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

خلورم مثال: $f(x) = x \cdot \ln x^2$ انتیگرال حساب کریں؟

$$\int f(x)dx = \int (x \ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$\int f(x)dx = \int x \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2} u \cdot \ln u - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \ln x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C$$

معین انتیگرالونه هم په تعویضي طریقہ حلولای شو.

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = ?$$

$$u = 2x, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{cases} x = -1, & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1, & u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$x = 1, \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2, \quad u = x^2 = 4$$

$$\int_1^2 2x \ln x^2 dx = \int_1^4 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_1^4 = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

د قسمي کسرو پواسطه د واقعي کسر د انتیگرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د یوه واقعي کسر انتیگرال پیدا کړو نو لمری یې قسمي کسرونه پیدا کوو بیا د قسمي کسرو انتیگرالونه پیدا کوو او جمع کوو یې.

لمری مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

$$= \frac{Ax - 4A + Bx - 2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = \frac{(A+B)x - 4A - 2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$7x - 12 = (A+B)x - 4A - 2B$$

$$A + B = 7$$

$$-4A - 2B = -12 \Rightarrow 4A + 2B = 12 \dots\dots\dots 1$$

$$A = 7 - B \Rightarrow 4(7 - B) + 2B = 12$$

$$28 - 4B + 2B = 12$$

$$-2B = 12 - 28 = -16 \Rightarrow B = 8$$

$$A = 7 - B = 7 - 8 = -1 \Rightarrow A = -1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{x-4}$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx$$

$$= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 + C$$

$$= \ln\{(x-2)^{-1} \cdot (x-4)^8\} = \ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\} + C$$

د منحنی سطحی د مساحت پیدا کول Accounting area of curve plane

هغه مستوي چه د (XX) د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د گراف او $x = a$ و $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت يې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کيږي.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x) \geq 0$ په انتروال کې مثبت او متماذي وي يعنی $[a, b]$ د تابع $y = f(x)$ د (XX) د محور په پورتنۍ طرف کې پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدې صورت کې د $f(x)$ د تابع گراف د (XX) د محور په کښتني طرف کې پروت دی.

لمړۍ مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د گراف او د (YY) د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د گراف بحراني ټکي او د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$$x = 4 - y^2$$

$$\dot{x} = 0 - 2y = -2y$$

په بحراني نقطه د تابع مشتق صفر وي نو $\dot{x} = 0$ نو:

$$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

د (y) قیمت په اوله معادله کې وضع کوو د (x) قیمت لاس ته راځي

$$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$$

$$x = 4$$

$A(4, 0)$ نقطه بحراني نقطه ده. د YY د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو

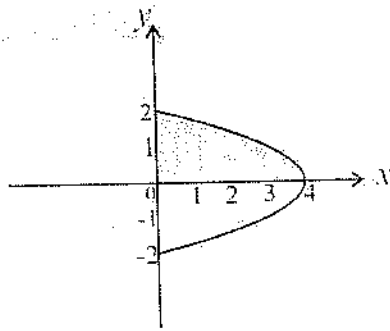
$x = 0$ فرضوو او د y قیمت لاس ته راځي.

$$x = 0$$

$$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$B(0, 2)$$

$$C(0, -2)$$



$$A = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = 2 \int_0^2 (4 - y^2) dy = 2 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left(\frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د (XX) د محور او $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ د تابع د گراف پواسطه د محصورې سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$y' = -x$$

$$y' = 0 \quad x = 0$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کړو. $y = 0$ فرضوو.

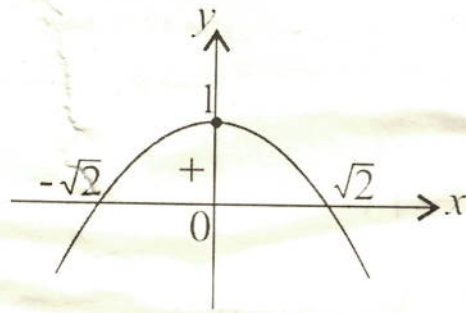
$$y = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}, 0)$$

$$(-\sqrt{2}, 0)$$



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \left(\left[x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \right)$$

$$A = 2 \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{6} - 0 \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

دریم مثال: د هغه سطحی مساحت پیدا کړئ، چه د $y = x^2 - 3$ د تابع د گراف او (XX') د محور تر منځ محصوروي.

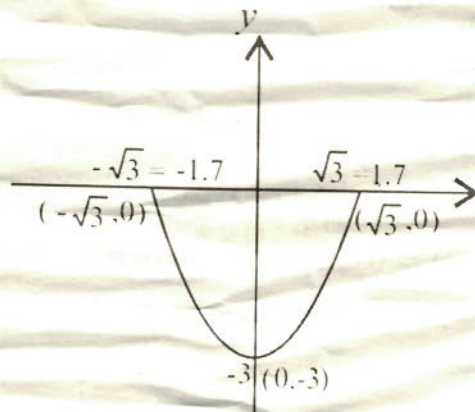
حل:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3, & y' &= 2x \\ y' &= 0 & \therefore x &= 0 \\ y &= 0^2 - 3 = -3, & A &= (0, -3) \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$B(\sqrt{3}, 0)$$

$$C(-\sqrt{3}, 0)$$



څرنگه چه گراف يې د $y = x^2 - 3$ د محور لاندې واقع دی نو انتیگرال يې منفي دی. او څرنگه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يې د سر حداتو د نیمایي څخه پیدا کوو.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) \\
 &= -2 \left(\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx - 3 \int_0^{\sqrt{3}} dx \right) = -2 \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}} \right) \\
 &= -2 \left(\frac{1}{3} [\sqrt{3}^3 - 0] - 3[\sqrt{3} - 0] \right) = -2 \left(\frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} \right) \\
 &= -\frac{2}{3} (\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3} (1.7)^3 + 6(1.7) \\
 &= -\frac{2}{3} (4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247
 \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع گراف رسم کړئ او د منحنی او (XX') د محور ترمنځ فاصله پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 - 3x \\
 y' &= 2x - 3 \Rightarrow y' = 0 \\
 2x - 3 &= 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\
 y &= x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4} \\
 \text{بحراني نقطه } A &\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)
 \end{aligned}$$

څرنگه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د (XX') د محور سره د گراف د تقاطع د نقطې د پیدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0, x_1 = 0, O(0,0)$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, B(3,0)$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^4$$

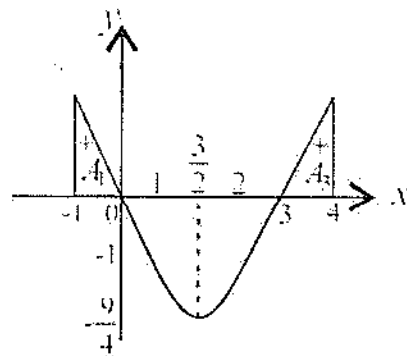
$$A = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right) \right] + \left[\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot (3)^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right) \right]$$

$$= - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 \right) + \left\{ \left(\frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



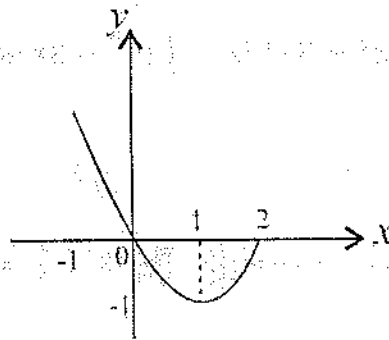
پنجم مثال: د $y = x^2 - 2x$ د منحنی او (XX) د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = -1$ او $x = 2$ تر منځ واقع وي.

$$y' = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

بحراني نقطه $A(-1, 1)$

د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.



$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad O(0,0)$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, \quad B(2,0)$$

منحنی د $[-1, 2]$ په انټروال کې د مبداء څخه تیرېږي یوه برخه یې د $[-1, 0]$ په انټروال کې د (XX) د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال یې مثبت دی. بله برخه یې د $[0, 2]$ په انټروال کې د (XX) د محور په لاندینۍ برخه کې واقع دی او انټروال یې منفي دی.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 \\ &= \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \right\} - \left\{ \left(\frac{8}{3} - 4 \right) - 0 \right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \\ &= -\left(\frac{-1-3}{3} \right) - \left(\frac{8-12}{3} \right) \\ &= -\left(\frac{-4}{3} \right) - \left(\frac{-4}{3} \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

د هغه سطحو د مساحت محاسبه چه د منحنی خطو پواسطه محاصره وي.

Accounting of area bounded by tow curves

د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوه منحنیگانو پواسطه د محصور شوي سطحی د محاسبی لپاره که $f(x) > g(x)$ وي یعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ د تابع د پاسه واقع وي د پاسنی تابع د انتیگرال څخه د لاندینۍ تابع انتیگرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاندته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

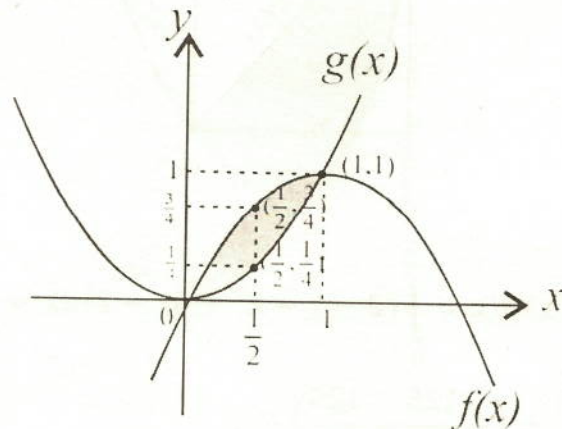
که د $G(x)$ تابع گراف د $f(x)$ تابع د گراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیگانو د گرافونو ترمنځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل: - اول د منحنیگانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - x^2 \\ g(x) &= x^2 \\ f(x) &= g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow \\ 2x - x^2 - x^2 &= 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0 \\ 2x(1 - x) &= 0 \\ 2x &= 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 1 - x &= 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$



د منحنیگانو د تقاطع نقطې عبارت دي $O(0,0)$ او $A(1,1)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعگانو د گرافونو ترمنځ د سطحې مساحت پيدا کړئ؟

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

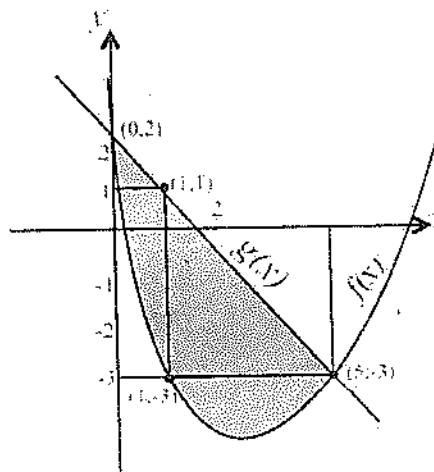
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0, \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0, 2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5, -3)$$



$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2} \right) - 0 \\ &= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

دريم مثال: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعگانو د گرافونو ترمنځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$

$$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad -2x + 6 = 0 \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$$

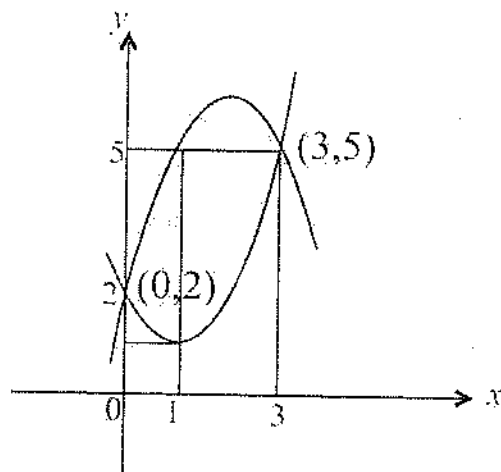
د منحنیگانود تقاطع نقطی عبارت دي $A(0,2)$, $B(3,5)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^3$$

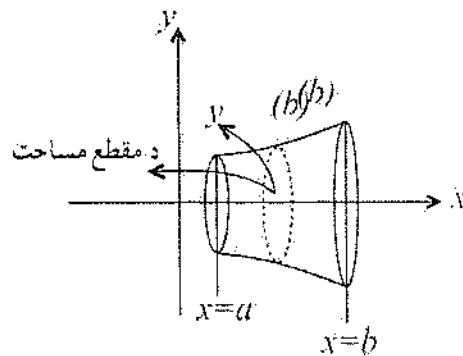
$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$



د کروي اجسامو د حجمو محاسبه

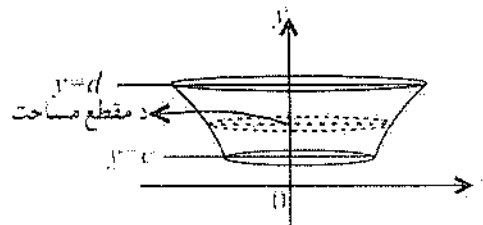
Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ د تابع گراف منحنی وي او د $x = a$ او $x = b$ د خطو منځ کی محصور وي د منحنی خط د دوران په نتیجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دایروي سطحی دي چه مساحتونه يې $A(x) = \pi r^2$ دي او د (YY) د محور سره موازي دي شعاع يې $r = y$ ده د حجم فارمول يې د ريمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.



$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع د منحنی گراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت يې نظر د (YY) محور ته د $A(y) = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ ده او شعاع يې $r = y$ ده حجم يې د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.



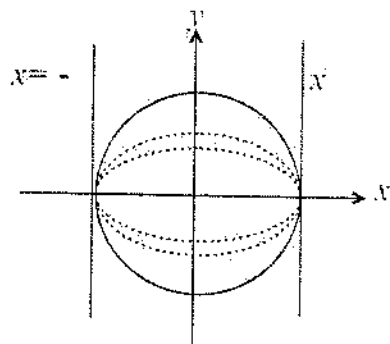
$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y_i) \Delta y = \int_c^d \pi r^2 dy = \int_c^d \pi y^2 dy = \int_c^d \pi \{f(y)\}^2 dy$$

د انتیگرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول:

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخېږي کره لاس ته راځي. د دایرې معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمې کری حجم د دایرې د معادلې څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو یې د کری حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

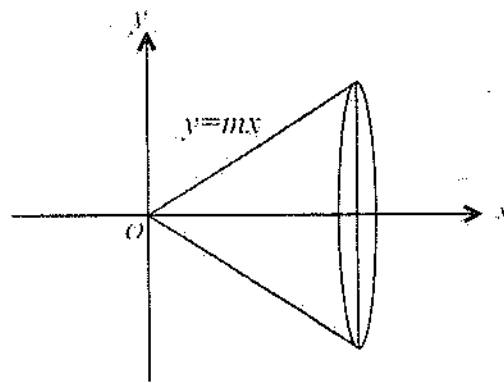
$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

د انتیگرال پواسطه د مخروط د حجم پیدا کول:

که د مستقیم دیوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط د همدغه ثابتې نقطې په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$



$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$$y = mx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

د پورته شکل څخه معلومېږي چه د مخروط قاعده دایروي ده او شعاع يې د $(Y\hat{Y})$ د محور سره موازي ده يعنې y/r اود مخروط ارتفاع (h) ده چه د (x) په محور باندې منطبق ده يعنې $(x = h)$ نو د $y = mx$ په رابطه کې يې قيمت لیکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

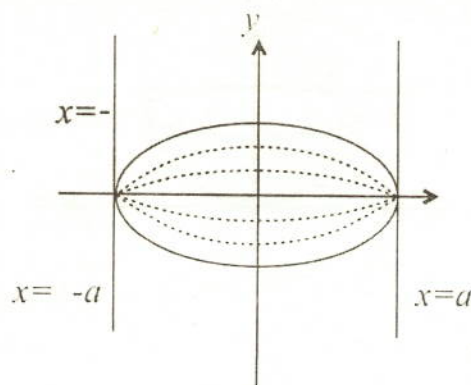
$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

د انتیگرال پواسطه د بیضوي د حجم پیدا کول:

هغه بیضوي چه مرکز يې د وضعیه کمیټونو په میداء واقع وي معادله يې عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

د نیمې بیضوي حجم پیدا کوو او دوه چنده کوو يې د ټولې بیضوي حجم لاس ته راځي:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \right] dx = 2\pi \left[b^2x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left[\left(b^2a - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left[b^2a - \frac{b^2a}{3} \right]$$

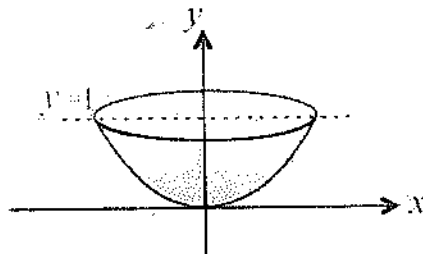
$$= 2\pi \left[\frac{3ab^2 - ab^2}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{2ab^2}{3} \right]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چیرته د الپس محراقونه د $(Y\check{Y})$ د محور پر منځ پراته وي حجم یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2b$$

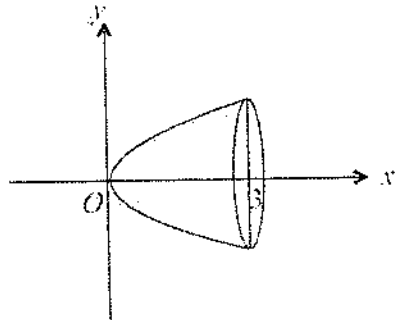
لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y = x^2$ او $y = 1$ کرني تر منځ پروت وي او د $(Y\check{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پیدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy$$

$$= \frac{1}{2} \pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \pi = \frac{\pi}{2}$$

دويم مثال د $y = \sqrt{2x}$ او $y = 3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi (\sqrt{2x})^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 9\pi$$

تبصره:

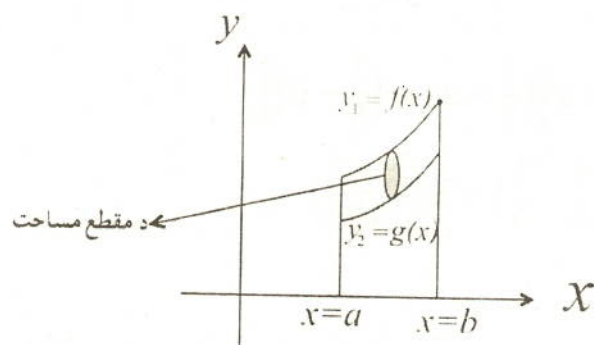
که $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابعګانې $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنیګانو او د $x = a$ او $x = b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

Δx = د استوانې ارتفاع

$$A(x) = (\text{استوانې د مقطع مساحت}) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi (y_1 - y_2)$$

د هغه استوانی د حجم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ د تابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف

څخه پورته پورته رڼي

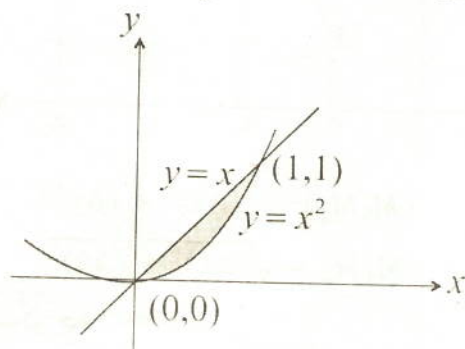


$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

د هغه استوانی د حجم د فارمول پیدا کول چه د $g(x)$ د تابع گراف د $f(x)$ د تابع د گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحنی او $y = x$ د کرښی تر منځ د (x) د محوری په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.

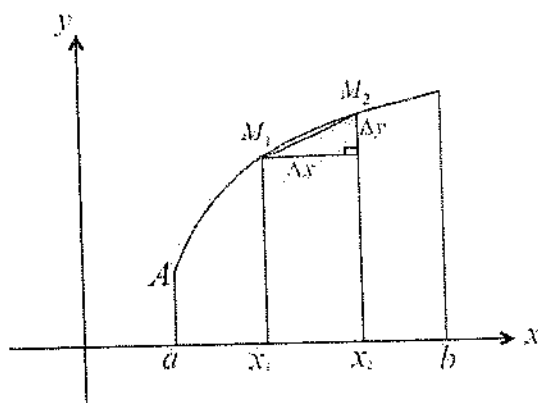


$$\left. \begin{array}{l} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 > y_1, \quad g(x) > f(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{5} - 0 \right) \right] \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \pi \left(\frac{5-3}{15} \right) \\
 &V = \pi \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{2\pi}{15}
 \end{aligned}$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د AM_1 او M_1M_2 او M_2B په درې ټوټو ویشود A, M_1, M_2 او د B د نقطو څخه په (XX) عمودونه رسموو بیا M_1 د M_2 سره په یوه روښانه خط نښلولود M_1 څخه په M_2 عمود رسموو او د تقاطع نقطه په H نښوو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوو د فیثاغورث د قضیې سره لیکو



$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$\dot{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \dot{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \dot{f}(x) \Delta t$$

$$\Delta y = \dot{g}(x) \Delta t$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\dot{f}(t)\Delta t)^2 + (\dot{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{[\dot{f}(t)]^2 + [\dot{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعی څخه لیکوچه:

$$L = \int_a^b \sqrt{(\dot{f}(t))^2 + (\dot{g}(t))^2} \cdot \Delta t$$

لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایری محیط محاسبه کړئ؟

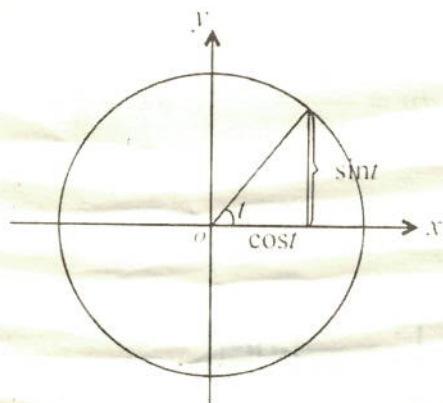
د دایرې پارامتریک معادله په لاندې ډول ده.

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

که $0 \leq t \leq \pi$ نو د دایرې نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt$$



$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} \cdot dt$$

$$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r \quad \text{د دایرہ نیمایی محیط}$$

$$\text{د دایرہ مکمل محیط} = 2\pi r$$

تبصرہ :

1- د $y = f(x)$ منحنی معادلہ پہ $a \leq x \leq b$ انتروال کی راکر شوی دہ د (x) دیپارامتر پہ پام کی نیولو سرہ د منحنی د قوس اوپردوالی داسی محاسبہ کوو۔

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ د منحنی د قوس اوپردوالی پہ $0 \leq x \leq 4$ انتروال کی پیدا کری؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x, \quad du = \frac{9}{4}dx, \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{4}{9} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{8}{27} [\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1 \right]$$

$$L = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحنی په $a \leq y \leq b$ انتروال کی راکړ شوی دې د (y) د پارامتر په پام کی نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ د منحنی د قوس اوږدوالی د $[1, 4]$ په انتروال کی حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du, \quad u = \frac{9}{4}y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{9}{4}y + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4, \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4} \right)^3} \right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right]$$

تفاضلي معادلې (Differential Equations):

هر هغه مساوات چه د یوې تابع مشتق او یو یا څو مستقل او غېر مستقل متحوله پکې موجود وي تفاضلي معادلی بلل کیږي لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

دغه تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.
 که په يوه تفاضلي معادله کې د يوه غېرمستقل متحول معمولي مشتق نظر مستقل متحول ته
 ونيول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy, \quad (4x + y)dx + xdy = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زياتو مستقلو متحولو ته ونيول شي دغسې ډيفرينشال
 معادلې ته جزئي يا يوطرفه ډيفرينشال معادلې وايي. لکه:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5 \frac{\partial u}{\partial y}$$

د ډيفرينشال ترتيب:

د يوې افادې د مشتق نيولو شمېرې ته د ډيفرينشال معادلې ترتيب وايي.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^5 + 3y = 4x$$

څرنګه چې د افادې څلورم مشتق نيول شوی دی نو د ډيفرينشال ترتيب (4) ده مشتق نيول د
 (d) د توان څخه معلومېږي

د ډيفرينشال معادلې درجه:

د مشتق د لوړ ترتيب توان ته د ډيفرينشال معادلې درجه وايي.
 که د ډيفرينشال معادلې توان کسري وي، توان يې بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{ (y''')^{\frac{2}{3}} \right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

د پورتنۍ معادلې درجه (2) ده.

$$y''' = \sqrt{4+y'} \text{ يا } y'''' = \sqrt{5x+3y} \text{ معادلو درجه يوه ده.}$$

کله کله يوه ډيفرينشېال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x) \frac{d^2y}{dx^2} - \cos xy = 0$$

دپورته معادلې درجه معلومه نه ده. ځکه چې د (y) نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کې ده نو نه شو کولای چې د پولینوم په شکل يې وليکواونه يې مشتق پيدا کيږي.

خطي ډيفرينشېال معادلې *Linear Differential equation*

هغه ډيفرينشېال معادله ده چې د (y) اول مشتق يې موجود وي او د (y) او (y') د ضرب حاصل يې معدوم وي. لکه:

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - x^2y = 3x$$

هغه ډيفرينشېال معادلې چې خطي نه وي د غيرخطي معادلو يا $(non - linear equation)$ په نوم ياديږي لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4y^2 = 0 \quad (y \neq 1 \text{ د } y \text{ توان})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7x \cdot \frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin xy = 0$$

$$5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0$$

څرنگه چې د دغه معادلو پروگرام د لېسې د ښوونې څخه لوړ دی د عالي رياضياتو په مستقل کتاب کې د ډيفرينشېال معادلو د تفصيل تصميم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفيق غواړو.

احصائيه

اتلسم فصل

احصائيه

احصائيه په لغت كې سرشماری ته وايي.

او په اصطلاح احصائيه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي كوي. قاعده يي داده چه نفوس، حاصلات، او نور شيان محاسبه كوي او بيا يي د عددو په شكل ليكي.

احصائيه ډېر قسمونه لري لكه اقتصادي احصائيه، اخلاقي احصائيه، سياسي احصائيه، د نفوسو احصائيه او داسې نور.

داتا Data:

راتول شوو معلوماتو ته داتا وايي.

د اطلاعاتو د راتولو طريقه:

اطلاعات معمولاً په څلورو طريقو راتولېږي

1- د پوښتنو پواسطه

2- د ليكنو پواسطه

3- د ليدنې پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

كه وغواړو چه د يوې كورنۍ د عايداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو كه عايدات لږ وي كولاى شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د ليكنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

كه د يوې كورنۍ عايدات زيات وي په ذهن كې يي حفظ مشكل وي نو د ليكنې پواسطه يي د عايداتو اطلاعات راتولوو او په راجستير كې يي ليكو چه د عايداتو اطلاعات وساتل شي او د منځه لاړ نه شي.

3- د ليدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د يوه شاگرد نمره په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طريقه داده چه نتايج يا اطلاعاتمه وکتل شي او دنوموړي د نمره په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً د يوه مرکب جسم د اجزاؤ د ښه معلومات لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتيا وړ اطلاعات تری لاس ته راځي. جامعه بلل کيږي.

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: د جامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره تری پوښتنې کيږي او د جامعې خواص پکې موجود وي. لکه يو موټی وريجی د يو گدام وريجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

د په يوه صفت موصوف شيانو څخه د يوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه بايد لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې د غړي په توگه د يوه شي يا يوه کس ټاکل بايد امکان ولري.

2- تر ټاکنې د مخه بايد د نمونې د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونې ټول غړي بايد په نمونه کې برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي او که نه. مثلاً که د دولت په مامورينو کې د ښوونکو معاش دوه چنده شي نو دا پېښه يوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يې:

که په يوه ټولنه کې د يوې موضوع په باب راټول شوي معلومات يا اطلاعات د يوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع يوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

1- کیفی تصادفی متحول

2- مقداری تصادفی متحول

1- کیفی تصادفی متحول:

چه معلومات یی په توصیفی ډول بیانېږي عدد ته ضرورت نه لري. لکه د کارگرانو د سواد اندازه، یا د یوه کلي دینداره خلک

2- مقداری تصادفی متحول:

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات یی په شمېر سره کیږي، او په دوه ډوله دی:

الف- متصل مقداری تصادفی متحول ب- منفصل مقداری تصادفی متحول

الف- متصل مقداری تصادفی متحول: چه معلومات یی په عدد سره کیږي او د پرلپسې عددو تر منځ یی عدد پیدا نه شي.

ب- منفصل مقداری تصادفی متحول: چه د پرلپسې عددو تر منځ یی عدد موجود وي.

د فریکونسي جدول *Table of frequency*

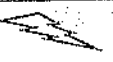
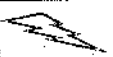
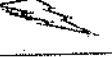
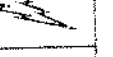
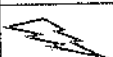
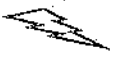
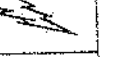
هغه جدول دی چه د داتاگانو معلومات پکې ترتیب شوی وي. که جدول په عمودي ډول ترتیب شوی وي د جدول د چپ طرف ستون داتاگانې یا معلومات ښیي او دښي طرف ستون یی د داتاگانو فریکونسي ښیي. لکه درنگونو جدول چه چپ طرف رنگونه یا داتا ښیي اوښي طرف فریکونسي ښیي. او که جدول په افقي ډول ترتیب شوی وي اول سطر د داتاگانو نمایندګي کوي او دویم سطر د هرې داتا فریکونسي ښیي.

مجموعه	1	2	3	4	5	6	7	8	دکورنۍ غړي
40	4	7	9	8	6	2	3	1	دکورنۍ شمېر

انځوریز ګراف یا تصویری ګراف

که په راکړ شوو معلوماتو باندې دښې پېژندګلوی لپاره شکلونه یا سمبولونه په یوه جدول کې استعمال شي دغه ګراف د انځوریز ګراف په نوم یادېږي.

د شکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زیاتې اری خرڅې کړي دي.

							
							
							
							
اوله ورځ	دويمه ورځ	درېمه ورځ	څلورمه ورځ	پنځمه ورځ	شپږمه ورځ	اوومه ورځ	اتمه ورځ

مود Mode:

د راټول شويو معلوماتو زياتي فريکونسي ته مود وايي.

مود د مالونو په خرڅولو کې، د رايو په اچولو کې، د امتحان په نمره او داسې نورو شيانو کې استعمالېږي.

اوسط Mean:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مثال: يو دکاندار په اوله ورځ څلور کټونه په دويمه ورځ پنځه کټونه په درېمه ورځ شپږ کټونه خرڅ کړي دي ووايست چه په اوسط ډول يې د ورځې څو کټونه خرڅ کړيدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

د مجزا داتاگانو د کثرت جدول

هغه جدول دي چه په هره طبقه کی د داتاگانو شمېر راښيي

مثلاً دیوه ټولگي د شاگردانو د ریاضي د مضمون نمرې په یوه جدول کی لیکل شوی دي دا نمرې په گروپو ویشو او په هرگروپ کی د شاملو نمرو شمېر لیکو په دغه شمېر کی زیات عدد ته د داتا کثرت وایي . اودی جدول ته د داتاگانو د کثرت جدول وایي که په جدول کی د داتاگانو د کثرت عدد کوچنی یا صفر وي . د جدول جوړول فایده نه کوي.

42	25	30	35	48	67	59	51	58	78
62	77	48	56	75	78	72	71	56	43
54	53	57	63	72	70	42	55	47	20
59	40	62	12	75	26	76	72	63	56

جدول يي داسی جوړیږي.

شمېر	نمرې
0	0 - 9
1	10 - 19
3	20 - 29
2	30 - 39
7	40 - 49
11	50 - 59
5	60 - 69
11	70 - 79

د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه:

په یوه طبقه کی کوچني عدد ته ټیټ سرحد او غټ عدد ته لوړ سرحد وایي. هغه داتاگانې چه په یوه طبقه کی راځي د طبقې د وسعت په نوم یادېږي. د یوې طبقې د وسعت د پیدا کولو د طبقې سرحدات یو دبل څخه منفي کوو.

د لمړۍ طبقې وسعت	$50 - 0 = 50$
د دويمې طبقې وسعت	$60 - 50 = 10$

ډله ايز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هرې مياشتې د رخصتۍ ورځو ته کثرت ووايو نو د ټول کال د رخصتيو مجموعه ډله ايز کثرت يا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو ډاتاگانو کثرت}}$$

مثال: په يوه ازموینه کې د دوه ټولگيو نمرې په لاندې جدول کې راوړل شوي دي دا ټولگي د نمرې په لحاظ پرتله کړئ؟

د الف ټولگي	مطلق کثرت
10-30 ضعیف	6
30-50 متوسط	10
50-70 ښه	4

د ب ټولگي	مطلق کثرت
10-30 ضعیف	19
30-50 متوسط	25
50-70 ښه	16

حل: د دواړو ټولگيو نسبي کثرت پيدا کوو

د نسبي کثرت فیصدي	نسبي کثرت	مطلق کثرت	د الف ټولگی
30%	$\frac{6}{20}$	6	10-30
50%	$\frac{10}{20}$	10	30-50
20%	$\frac{4}{20}$	4	50-70

د نسبي کثرت فیصدي	نسبي کثرت	مطلق کثرت	د ب ټولگی
31.6%	$\frac{19}{60}$	19	10-30
41.6%	$\frac{25}{60}$	25	30-50
26.6%	$\frac{16}{60}$	16	50-70

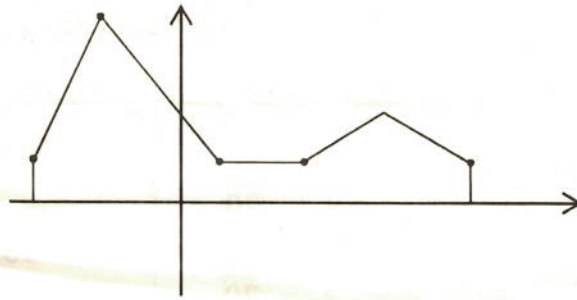
میله اي گراف

که د هری طبقی گراف داسې رسم شي چه هر واحد يي یوه مربع ونښودل شي اومربعگانی یو پر بل کېښودل شي دغه گراف ته میله يي گراف وايي .

مثلاً دخو کلونو دینبی د حاصلاتو گراف یا درنگونو گراف چه هره مربع په یوه رنگ خوښوونکي دلالت وکړي .

د منکسری کرښی گراف:

داتا گانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیټونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل يي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه گراف ته د منکسری کرښی گراف وايي



د گسسته يا غېر متصلو داتا گانو اوسط:

داتاگانې جمع کوو او د داتاگانو په شمېر يې ویشود داتاگانو اوسط په لاس راځي. د داتاگانو د تکرار په صورت کې د مکرري داتاگانې په فریکونسي کې ضربوو او جمع کوو يې د داتاگانو په شمېر يې ویشود داتاگانو اوسط په لاس راځي. که د داتاگانو لمرې گروپ په x_1 او فریکونسي يې په f_1 وېښو او اوسط په $\bar{x}$ وېښو نو د اوسط فارمول په لاندې ډول دی

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{n}$$

مثال: د یوه شرکت د عایداتو اندازه په لاندې ډول ده.

دنده	د افغانیو په حساب میاشتنی عاید
رئیس	50000
دوه مرستیالان	40000
منشي	20000
دری متخصصان	30000
پنځه مامورین	25000
دوه خانه سامانه	10000

د شرکت مدیر وایي چه باید اوسط عاید باید 30000 وي ووايست چه دا د عا درسته ده

job	f	x	f × x
رئیس	1	50000	1 × 50000 = 50000
مرستیال	2	40000	2 × 40000 = 80000

منشی	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصصین	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مامورین	5	25000	$5 \times 25000 = 125000$
خانہ سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\bar{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده.

د جدول په مرسته د نښتو داتاگانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاگانو ته نښتې داتاگانې وایي که د دغه داتاگانو فریکونسیانې مختلفې وي هغه داتاگانې چې فریکونسیانې یې نژدې وي په یوه ګروپ کې لیکو او د ګسسته داتاگانو د فارمول په څېر یې اوسط پیدا کوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بورېو کې وچول او یې ویل چې د بورېو وزن په اوسط ډول اوه منه دي. د ښاروالۍ له خوا بورې بیا وتلل شولې چې نتیجه یې په لاندې جدول کې درج ده.

د بورېو شمېر	د هرې بورې وزن
11	6.5 - 6
14	6.5 - 7
12	7 - 7.5
8	7.5 - 8

د هر ګروپ اوسط د بورېو په شمېر کې ضربوو. اوسط یې پیدا کوو.

د بورېو شمېر	د بورېو وزن
11	6.25

6.75	14
7.25	12
7.75	8

$$x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8 \text{ د بوريو وزن}$$

$$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$$

$$n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45 \text{ د بوريو شمېر}$$

$$\bar{x} = \frac{312.25}{45} = 6.938 \text{ په اوسط ډول د بوريو وزن}$$

د داتاگانو د گېډۍ کولو طريقه

که د داتاگانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې و کولای شو چه د داتاگانو څخه گېډۍ جوړه کړو.
لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127
115 - 120
120 - 128
128 - 143

وسعت:

د لويي داتا او کوچني داتا تر منځ فاصلي ته وسعت وايي.

د گېډۍ اوږدوالی:

که د داتاگانو وسعت د گېډيو په شمېر و وېشل شي د گېډۍ طول يا اوږدوالی لاس ته راځي.

ميله ئي گراف:

که مربعگانی يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي. ميله ئي گراف لاس ته راځي.

د متصلو داتاگانو دسته بندي:

هم جنسه داتاگانو ته متصلی داتاگانۍ وايي. د دسته بندي لپاره يي هغه داتاگانۍ چه د واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه گېډۍ کې ليکو.

د (15) ذده کوونکو اوږدوالی په لاندی ډول ليکل شوی دې

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	132	146

پورته داتاگانو څخه گډېدې جوړې کړئ.

د دده کوونکو شمېر	د دده کوونکو دونی اوږدوالی
6	130 - 140
5	140 - 150
4	150 - 160

وزني اوسط یا منځنی قیمت:

هره داتا په مربوطه ضریب کی ضربوو او د داتاگانو په مجموعه یې ویشو.

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

مثال: د ځینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي. لکه A, B, C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري یو محصل لاندې لمبرې اخیستې دي.

مضمون	نمری	د کړیدیتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	D	3
ژبه	F	1

د محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

مضمون	حرفي نمری	د کړیدیتو شمېر x	عددي لمبری w	$w \cdot x$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$

کيميا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بيولوژي	D	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	F	1	4	$4 \times 1 = 4$

$n = 12$ د کريدیتونو شمېر

$$\bar{x} = \frac{9 + 12 + 4 + 9 + 4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

مستطيلي گراف

په مستطيلي گراف کې د مستطيل قاعده د داتاگانو اتصال يا پيوستون راييبي مساحت د گېډې کثرت راييبي که د گېډيو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت ليکوپه دې حالت کې اوږدوالي د کثرت عمودي محور دی.
مثال: په يوه ټولگي کې د دده کوونکو وزن په لاندې ډول دی.

د دده کوونکو وزن په کيلوگرام	40 - 45	45 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 90
د دده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

وزن د (XX) په محور بڼيو او څرنگه چې $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د (XX) په محور ټول وزنونه په يوه واحد اندازه کوو. (40 - 45) په يو واحد بڼيو. مستطيلو د ارتفاعگانود پيدا کولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

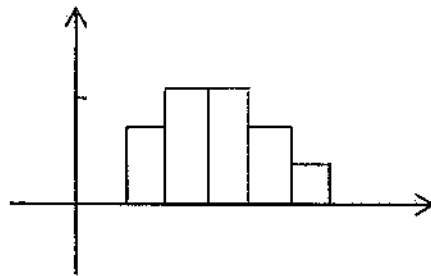
$$40 - 50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45 - 50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50 - 60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$



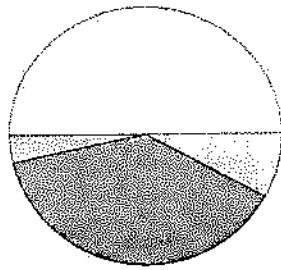
دایروي گراف:

د دایري په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاگانو بنودلو ته دایروي گراف وايي.
د کثرت د درجې د لاس ته راوړلو لپاره د داتاگانو کثرت د ټولو داتاگانو په شمېر لېکواو په (360°) کې يې ضربوو دهرې گڼه ی مرکزې زاویه لاس ته راځي.

$$\text{د داتاگانو کثرت} \times 360^\circ = \frac{\text{کثرت د درجې له جنسه}}{\text{د ټولو داتاگانو شمېر}}$$

مثال: د یوې مؤسسي د کارکوونکو شمېر (200) کسه دې وظیفې يې د تحصیل د درجې له جنسه وېشلی دي.

مرکزي زاویه د درجې له جنسه	کثرت	د تحصیل درجه
$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$	5	ډاکټر
$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$	10	ماستر
$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$	100	لیسانس
$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$	45	څوارلسم پاس
$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$	40	دولسم پاس



ميانه Median

د داتاگانو د تحول وسطي عدد ته ميانه وايي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سټ په څير يې ترتيبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد يې (3) دې، که د داتاگانو شمېر جفت وي د منځنيو دوه

داتاگانو اوسط د داتاگانو ميانه ده. لکه (10 4 3 9 6 2) چه ميانه يې داسې پيدا

کيږي. (10 9 4 6 3 2) چه $\frac{4+6}{2} = 5$ يعنې ميانه يې (5) ده.

د تحول ساحه Evolution of field

که د متحول د اوږدوالي تغير په يوه ساحه کې ممکن وي دغه ساحې ته د تحول ساحه وايي.

په ټولنه کې د ساحې وسعت د ټولنې پراگنده گي نښي په هره اندازه چه دا توپير کم وي پراگنده گي کمه ده او د ټولنې د وگړو تر منځ نژدېکت زيات دې، که د تحول ساحه صفر وه نو د ټولنې د څېړنې ځانگړتياوې برابري دي او ټولنه متجانسه ده.

مثال: په څلور مياشتنۍ ازموينه کې د دوه دده کوونکو لمبرې په لاندې ډول دي.

20 21 25 32 33 35 36 37 38 39

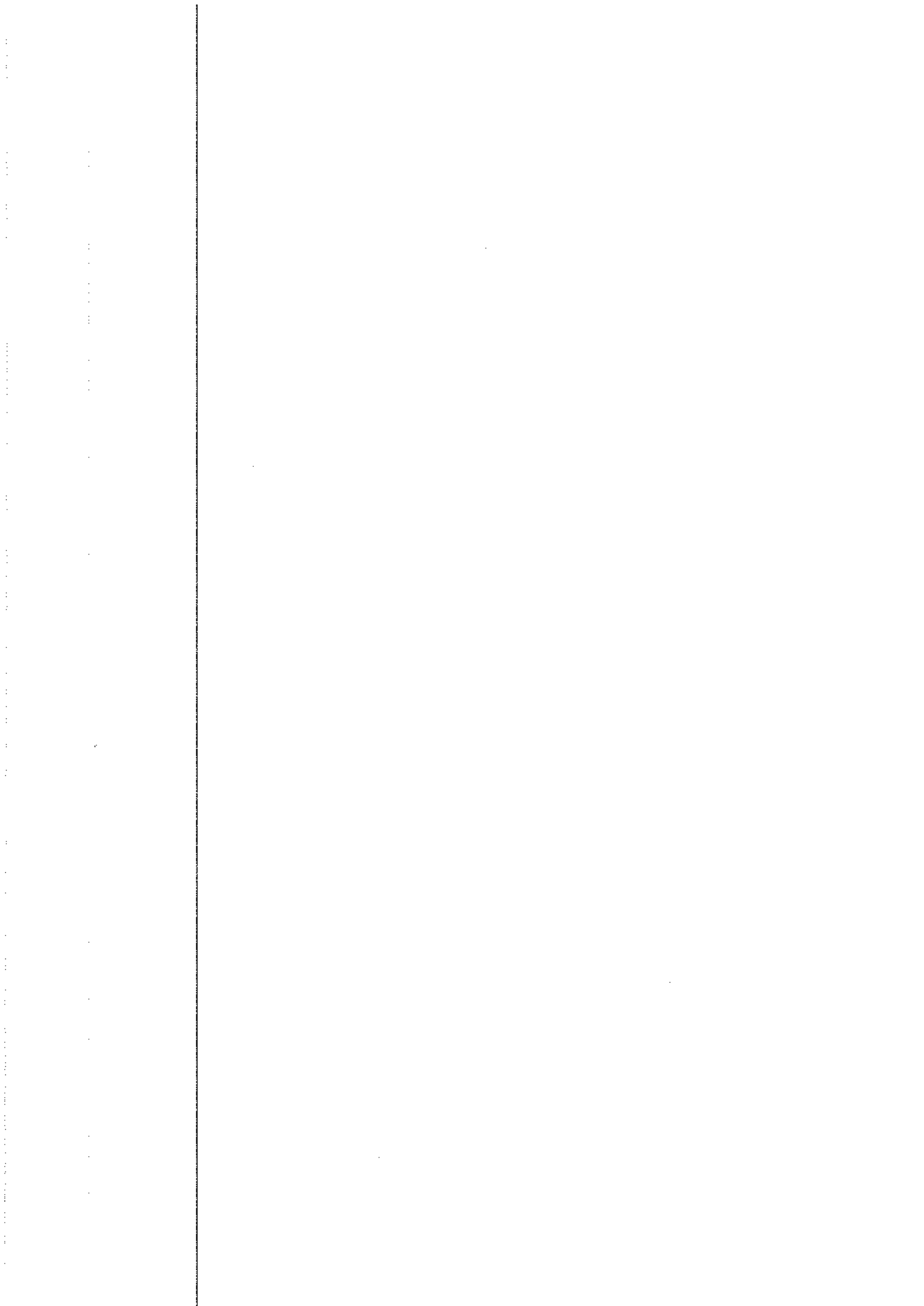
20 33 34 35 35 35 34 34 35 39

د دواړو سټونو د تحول ساحه پيدا کړئ او ووايست چه په کومه گډې کې پراگنده گي زياته ده؟

حل: د لوړو سرحدو څخه ټيټ سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مگر په اول گروپ کې پراگنده گي زياته ده.



د انحراف اوسط Average deviation

د داتاگانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وايي.

د داتاگانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدې امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کې د هغوی مطلقه قيمتونه جمع کوي او په لاندې ډول جمع کيږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

مثال: د (40) تنو شاگردانو لمبرې په لاندې جدول کې راڅرګندي دي.

نمرې	کثرت
0 – 10	2
10 – 20	7
20 – 30	4
30 – 40	5
40 – 50	10
50 – 60	12

د انحراف اوسط يې پيدا کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{10 + 105 + 100 + 175 + 450 + 660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

f = کثرت	د داتاگانو اوسط	$f \cdot x$	$x - \bar{x}$	$f(x - \bar{x})$
2	5	10	$5 - 37.5 = -32.5$	$2 \times (-32.5) = -65$
7	15	105	$15 - 37.5 = -22.5$	$7(-22.5) = -157.5$
4	25	100	$25 - 37.5 = -12.5$	$4 \times (-12.5) = -50$
5	35	175	$35 - 37.5 = -2.5$	$5 \times (-2.5) = -12.5$
10	45	450	$45 - 37.5 = 7.5$	$10 \times 7.5 = 75$
12	55	660	$55 - 37.5 = 17.5$	$12 \times 17.5 = 210$
$\frac{1}{n = 40}$		1500		

$$f(x - \bar{x}) = -65 - 157.5 - 50 - 12.5 + 75 + 210 = 0$$

ليدل کيږي چه د جمع حاصل يي صفر دي نو د انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کې نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

د خوشلعي فريکونسي گراف

د خوشلعي فريکونسي گراف د متصلو داتاگانو د پاره استعمالیږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه گراف يي رسم کړو د هر کلاس مرکز (منځنۍ نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښیو.

د کلاس مرکز او فريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کې يوه نقطه تعينوي دغه نقطې وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کې $(x_1 - c, 0)$ نقطه او کلاسونو په اخر کې $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو د خوشلعي فريکونسي گراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندې جدول کې د داتا خوشلعي او مستطيلي گراف رسم کړئ.

$cl =$ د کلاسونو حدود	11 - 16	16 - 21	21 - 26	26 - 31	31 - 36
$f_i =$ مطلقه فريکونسي	3	5	8	7	2
$x_i =$ د کلاسونو مرکز	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

$c = 5$ دی نو د دوه اختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

$$(x_1 - 5, 0) = (13.5 - 5, 0) = (8.5, 0)$$

$$(x_2 + 5, 0) = (33.5 + 5, 0) = (38.5, 0)$$

داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو څخه تر (n) پوری کود ورکود د $(p = 1, 2, 3)$ موقعیت دلاندی رابطی پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کی داوولی ربعی او دریمی ربعو مقادیر پیدا کړئ؟

حل:

د دیتا شمېره

1 2 3 4 5 6
80 85 90 100 120 140

د لمړۍ او دریمې ربعو ځایونه عبارت دي.

$$C_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

$$q_1 = 85 \quad \& \quad q_2 = 120$$

صندوقچه یی گراف:

صندوقچه یی گراف هغه گراف دی چه د نورو گرافونو په نسبت د دېتا تیت والی زیات روښانه کوي د دېتا گراف د لاندی اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنی دېتا

ب- لمړۍ څلورمه

ج- میانه

د- دریمه څلورمه

ج- لویه دېتا

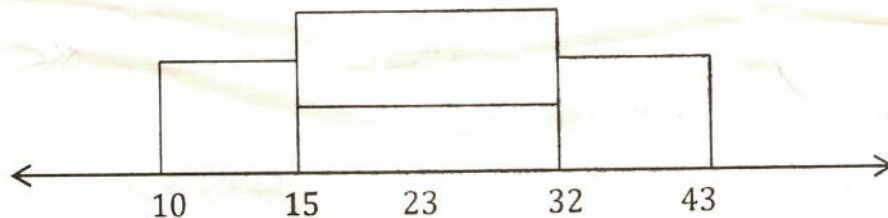
مثال: په یوه ښار کی په (15) ورځو کی د ترافیکي پېښو شمېر په لاندی ډول دې صندوقچه یی گراف ئی رسم کړئ.

12	10	15	23	14	27	16
34	41	43	32	18	25	31

پورتنی داتا په ترتیب لیکو .

10	12	14	15	16	18	23
25	27	31	32	34	41	43

تر ټولو کوچنۍ داتا ($q_1 = 10$) ده او تر ټولو لویه داتا ($q_n = 43$) ده میانه ($med = 23$) ده
لمړۍ ربعه $q_1 = 15$

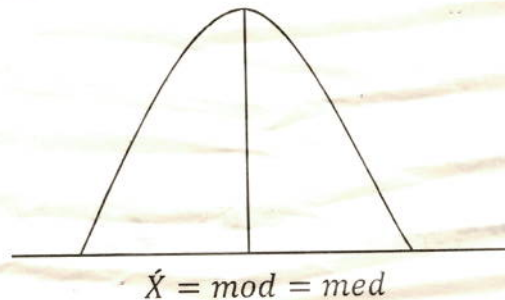


پورتنی گراف صندوقچه یی گراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړۍ او
خلورمۍ ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او 15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 تر منځ ده.

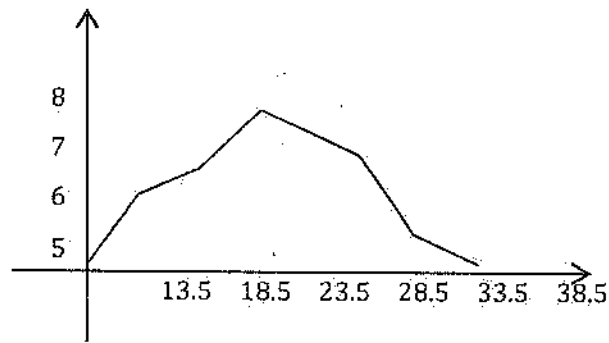
د نارمل منحني د مرکزي ټاکونکو پرتله کول:

نارمل منحني یو متناظر منحني دې چه دیوه زنگ په ډول شکل لري او زیاتی طبعي پېښی د
همدغه منحني په واسطه بنسودل کیږي. اوسط ، میانه او موډ یی په مرکزي برخه کی قرار لري
نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

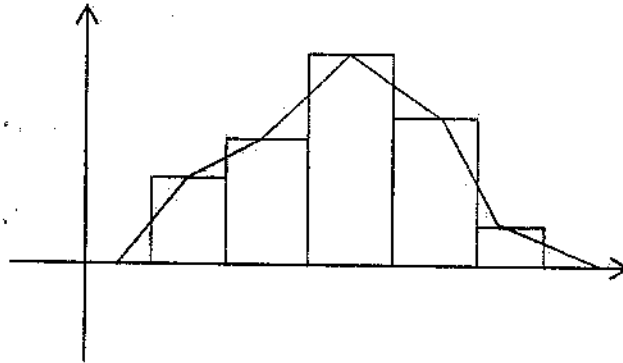
که منحني متناظر وي نو اوسط په میانه منطبق دی او څرنگه چه یوه اعظمي نقطه لري نو ځکه
یی موډ هم د اوسط او میانې سره مساوي دی.



$$\bar{X} = mod = med$$



مستطیلی گراف اود فریکونسی خو ضلعي گراف:



د فریکونسی خو ضلعي دگراف راسونه د فریکونسی دارونده جدول د مستطیلو د پورتنۍ ضلعي په نیمایي منطق دي دفریکونسی خو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقی او پانی گراف *Grph of stem and wrench*

په دوه رقمي عدد کی د لسیز رقم ساقه او د یويز رقم پانه ده.

مثال : د سانتی متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانو د تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

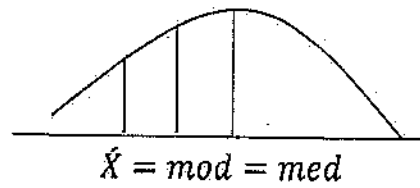
پورتنۍ داتاگانۍ په صعودي ډول ترتیب کړي او څرنګه چه د (4) رقم یعنی د لسیز رقم پکی مشترک دی نو داتاگانۍ په لاندی ډول ترتیبوو.

0			
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
8	8		9
9	9	9	

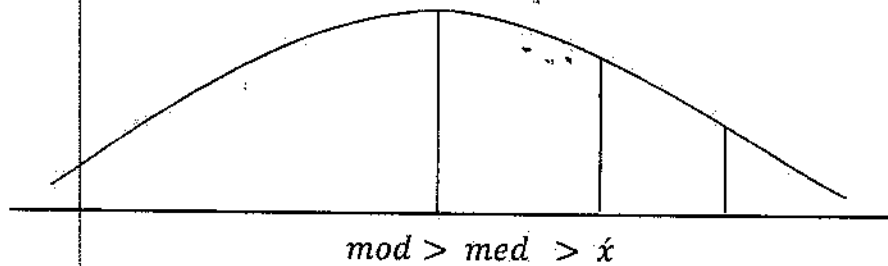
3						9	
3	5		7			9	
3	5	6	7	8		9	
0	2	3	5	6	7	8	9

اوله ربعه د شي 25% دويمه ربعه د شي 50% او دريمه ربعه د شي 75% وي. که داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د (Q_2) سره مساوي ده د داتا داوولې نيمايي ميانه (Q_1) ده او د دويمې نيمايي ميانه (Q_3) ده.

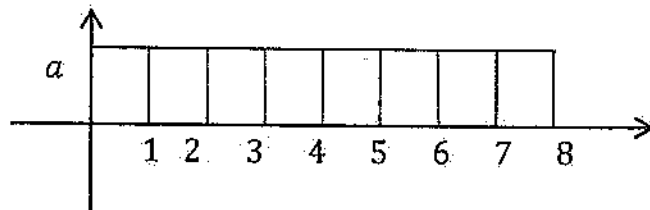
که اوسط اومیانه مساوی وی نو تر اوسط او میانی د مخه داتاگانی اوداوسط او میانی د وروسته دپتاگانو سره مساوی ډي. اوکه اوسط د میانی کینی خواته پروت وی نو دهغه داتاگانو شمېر چه داوسط ښی خواته پرتی ډي زیات دی تر هغه دپتاگانو دشمېر څخه چه د اوسط چپی خواته پرتی ډي.



او که اوسط دمیانی ښی خواته پروت وی نو دهغه داتاگانو شمېر چه د اوسط چپی خواته پرتی ډي زیات دېد هغه داتاگانو تر شمېر چه د اوسط ښی خواته پرتی ډي.



مثال: په لاندی گراف کی اوسط او میانه پیدا کړی؟



$$med = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\bar{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

رېجي انحراف

رېجي انحراف يوله هغه ټاكونكو څخه دی چه د دېټا تیت والی بشکاره کوي.
مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لري په هغه اندازه دېټا نژدی وي یعنی تیتوالی یی کم وي.
کله کله دڅلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښیي چه دی ته د څلورمی د نیمايي لمن وایي.

مثال: د لاندی عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس (Variance):

واریانس په لغت کی اختلاف ته وایي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاگانې ولرو دهری داتا اوسط پیدا کړود داتاگانواو دهغوی د اوسطونود تفاضل د مربعگانود مجموعی اوسط ته واریانس وایي.
د انحرافونو د مربعگانو مجموعه عبارت ده:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

پورتنی مجموعه په (n) ویشواو په (s^2) یې ښیو. واریانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

د واریانس د پیدا کولو لپاره د لاندې فارمول څخه هم ګټه اخلې.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې دېټا واریانس د دواړو فارمولو په مرسته پیدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ فارمول پواسطه:

$$\bar{x}' = \frac{1 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1 - 5.6)^2 + (5 - 5.6)^2 + (6 - 5.6)^2 + (7 - 5.6)^2 + (9 - 5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

$$s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

يادونه:

که دڅو کلاسو د پټاګانې $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ وي او فريکونسي ګانې يې په لاندې ډول وي. $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ واريانس يې د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$N = \sum_{i=1}^n f_i$$

د متحول د مربع واحد د واريانس واحد دی.

معياري انحراف (مطلق تیتوالی):

د واريانس مربع جذر ته معياري انحراف وايي په (s) سره يې نښي او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يې د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right\} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن د حرارت درجه په لاندې ډول راکړشوی ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2}$$

چه $\bar{x}$ د دېټا اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ده.

د بدلون ضریب یا نسبي پراگنده گي:

د بدلون یا تغیر ضریب د معیاري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی
مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{معیاري انحراف} \\ \text{اوسط} = \text{د بدلونونو یا تغیراتو ضریب}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب کړو د تحول ضریب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتو دېټاگانو لپاره دی. که دېټاگانې مساوي وي د بدلون ضریب صفر دی. که ټولې دېټاگانې په یوه مثبت عدد کې ضرب شي د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

که دهرې دېټاسره یو مثبت عدد ورزیات شي د بدلون ضریب کوچنی کیږي.

مثال: د (1, 3, 5) دېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دویم مثال: د تلویزون د تصویري لامپونو تولیدوونکې د (A) او (B) دوه ډوله لامپونه تولیدوي د (A) متوسط عمر (1495) ساعته او د (B) متوسط عمر (1875) ساعته دي معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره (280) او (310) دي د کوم لامپ د ضریب بدلون زیات دی.

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنگه چې $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامل پ ډېره پراکنده کي نري ولی ټينگښت يي کم دي.

په نورمال منحني کي ټيټوالی:

د نورمال منحني په دواړو خواو کي د $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ او يا د $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ پواسطه پراکنده کي يا ټيټوالی پيدا کيږي.

مثال: د يوې موسسې د معاش اوسط (12500) او معياري انحراف يي (700) دی.

الف: په نورماله توزيع کي د فيصدي په نظر کي نيولو سره د معاش توزيع تشرېح کړئ؟

ب: ايا وېلاي شئ چې (14000) افغانی معاش غېر عادي معاش دی؟

حل: لمړې $\bar{x} \pm s$ او $\bar{x} \pm 2s$ او $\bar{x} \pm 3s$ قيمتونه په لاس راوړو.

فيصدي	فاصله د افغانیو له مخی	فاصله د (s) له مخی
68%	11800 - 13200	$\bar{x} \pm s$
96%	11100 - 13900	$\bar{x} \pm 2s$
99.6%	10400 - 14600	$\bar{x} \pm 3s$

$$\bar{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \bar{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانی معاش غېر عادي معاش دی ځکه چې د (2s) داندازی څخه زیات او هم د ($\bar{x}$) داندازی څخه ډېر دي.

د نورماله توزیع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواو کې د نورمال په نسبت د منحنی د ټیټوالی، جگوالی او نژدېکت عامل ته شاخص وایي. شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص *Skewness*:

هغه توزیع چه د اوسط په دواړو خواو کې متناظره نه وي خلمېدل نومیږي. د لاندی دوو ضریبونو پواسطه ښودل کیږي.

الف- د خلمېدلو ضریب: د خلمېدلو ضریب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره استعمالیږي. فارمول یې په لاندی ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نو توزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحنی د توزیع خلمېدل مثبت دي *Positive Skewness* یعنی خلمېدل یې ښی خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحنی د توزیع خلمېدل منفي *Negative Skewness* دي. یعنی چیی خواته خلمیږي. که چېرته د کثرت جدول موجود وي خلمېدلو (عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{\sum s^3}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

ب- د پیرسون د خلمیدو ضریب: د پیرسون د خلمېده گي ضریب په لاندی ډول دی.

$$sk(p) = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پرسوب *kurtosis* شاخص:

دا شاخص ښیي چه څه وخت منحنی جگوالی او څه وخت ټیټوالی لري فارمول یې په لاندی ډول دی:

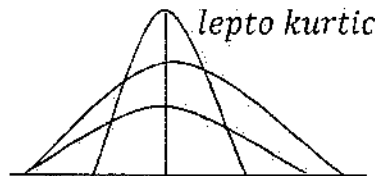
$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

که د کثرت جدول موجود وي نو د پرسوب فارمول په لاندې ډول دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کې (s) معیاري انحراف دی. دغه شاخص د پرتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراگنده کې پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ: د ضریب درې ډوله خلمېدل او پرسوب بڼې:



حل: په نورمالي توزیع کې $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پرسوب یې د نورمال منحني څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پرسوب یې کم دی.

خو متحوله ټولنې:

که په یوه کلاس کې یوازې د شاگردانو دوئی په باب خبرې کېږي نو په دغه ځای کې متحول یو دی. او که د شاگردانو د چاغښت په باب هم خبرې وشي نو په دې صورت کې متحولونه دوه کېږي. د دغسې متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکې د قایمو مختصاتو په سیستم کې جوړېږي. لمړی د متحولونو معادلی جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کې په نڅېنه کوو او وصلوو یې.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندې وڅېړل. دغذا تر تطبیق دمخه یې د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا یې د عمليي تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړ او لاندې دېټا گانې یې په لاس راوړلې:

(1.8), (2.3), (1.7), (3.5), (2.4)

په هره جوړه کې لمړۍ مختصه د موږکانو د غذا تر تطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

د موږ کانو شمېر	1	2	3	4	5
د موږ کانو لمړنۍ وزن	1	2	1	3	2
د غذايي موادو تر تطبيق وروسته د موږ کانو وزن	8	3	7	5	4

پورتنۍ جدول په ستوني ډول جوړ کړئ:

د غذايي رژيم تر تطبيق وروسته د موږ کانو وزن	د موږ کانو لمړنۍ وزن	د موږ کانو شمېر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

پورتنۍ دېټاگانۍ دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

د پراگنده گۍ گراف Scatter Diagram:

د دېټا د اندازه کولو لپاره په يوه مستوي کې پاشل شوی نقطی د پراگنده گراف په نوم ياديږي.

لاندې مرتبې جوړې راکړ شوي دي.

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$$

پورته دېټا د شېر او خط دېټا ده. که سکه پورته خواته وغورزول شي او د شېر مخ کېښته خواته وي نوډ (y) په محور يو ډېرېږي.

د موږ کانو د غذايي رژيم دېټا په لاندې ډول ده.

$$(2, 4), (1, 8), (2, 3), (3, 5), (1, 7)$$

په دغه دېټا کې د هرې نقطې تابع بېله ده. نوله همدغه جهتته څو متحوله ټولنه ورته وائي.

پېوستون او د پېوستون ضريب:

د يوه مستقيم او نقطو تر منځ د فاصلې د پيدا کولو فارمول ته د پېوستون ضريب وائي او په (r) سره يې نيسي. او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لانڈی دیتا دمورگانو دغذائی رژیم دیتا ده.

دمورگانو شمېر	لمړنی وزن (x)	وروستنی وزن (y)	xy
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دمورگانو دغذائی رژیم د وزنونو ترمنځ دپیوستون ضریب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په (x) او وروستني وزنونه په (y) ښیو دمورگانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8, \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5} = \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5} = \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\begin{aligned} \bar{xy} &= \frac{\sum x + \sum y}{n} \\ &= \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5} \\ &= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8 \end{aligned}$$

د پیوستون ضریب په لاندي ډول لاس ته راځي.

$$r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

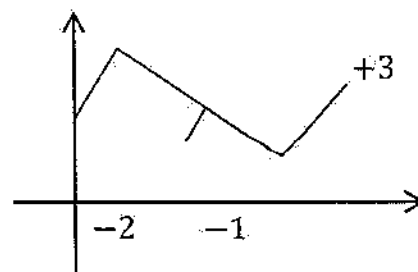
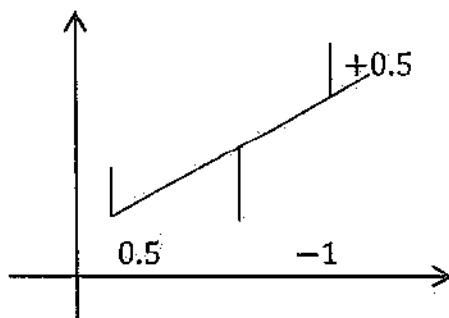
د خطي مېلان معادله:

$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه د مستقيم خط مېلان دی. که $a > 0$ وي کرښه متزايدة ده. او که $a < 0$ وي نو کرښه متناقصه ده که (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي.

نویقطه په خط پرته ده. که د نقطې په مستوي داسې پاشلی وي چه کرښې ته نژدی وي نو د پیوستون ضریب به (-1) او $(+1)$ ته نژدی وي که یوه داسې کرښه چه معادله یې $y = ax + b$ وي د ټکوله منځه داسې تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدی وي نو د دغه کرښې د ترسیم لپاره باید یوه داسې معادله جوړه کړو د فارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کې نیسو.

x	1	5	9
y	6	5	7

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوې یې د مشاهدې څخه معلوموو.



په پورته دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاگانو الجبري مجموعه صفرده.

د الف حالت: $0 = (-2) + (-1) + 3$ د کرښې د خطاگانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $0 = (0.5) + (-1) + 0.5$ د کرښې د خطاگانو الجبري مجموعه

څرنگه چه په دواړو حالتو د جمعې حاصل صفر دی نو مناسبه کرښه نه معلومېږي. نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامې یو اوبل دمنځه یونسي نو وروسته تر مربع کولو یې جمع کوو.

$$14 = (-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 = \text{د خطاگانو ددویم توان جمع}$$

$$\text{د خطاگانو د دویم توان جمع} = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$$

هغه کرښه چه د مربعگانو مجموعه يي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریگریشن کرښی وایی. د رگریشن او مشاهداتو توپیر په وښو نو د دویم توانونو د لا کوچني والي په خاطر لیکو.

$$\text{د خطاگانو د دویمو توانونو مجموعه} = \sum (y - \bar{y})^2 = \sum \{y - (ax + b)\}^2$$

$$= \sum (y - b - ax)^2$$

$$= (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2$$

په دې حالت کی (x) او (y) ثابت عددونه دي (a) او (b) متحولین دي

$$b = \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}} \times \text{د پیوستون ضریب}$$

د (a) او (b) د محاسبی دغه لار د لږکیو مربعگانو د تگلاری په نوم یادېږي.

نتیجه: د ریگریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار د معلومولو دبل

متحول د مقدار څخه استفاده کېږي.

مثال: - لاندی دېتاپه نظر کی ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ریگریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل: څرنگه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4 + 3 + 2 + 1 + 0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2}{5}$$

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{s_x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{(4 - 2)^2 + (3 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (0 - 2)^2}{5}$$

$$= \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_y^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{s_y^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4 + 6 + 6 + 4 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r \frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څېړل کیږي. عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یې نمونه یې فضاء او د قیمتونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ وي.

که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,\dots}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \dots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي او پیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي په دی صورت کی ددی احتمال چه (x) د (k_1) او (k_2) په منځ کی وي د لاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

که چېرې (x) پیوسته ناڅاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چېرې ناڅاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط (Expected Value) د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي. د لاندی رابطی سره برابر دی

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د (x) اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که (x) تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د (x) وریانس چه د (s^2) په شکل ښودل کیږي د لاندی رابطی سره برابر دی

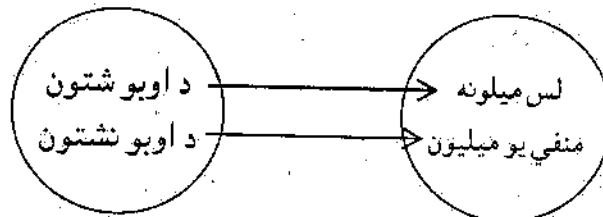
$$s^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یو غونډۍ په سر یوه څاه وکني د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تماميږي. که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس میلیون افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي یو میلیون تاوان ورکوي.

الف: دا موضوع د یو تابع په شکل وښیئ.

ب: که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (Expected Value)، واریانس او د تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ؟

د الف حل:



د ب حل: تصادفي متحول، د احتمال تابع، اوسط، واریانس، او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	معیاري انحراف
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	s
-1 10	0.8 0.2	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$ $10 \cdot 0.2 = 2$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$ $(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$ $77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	4.4
	0.1	1.2		$\sum s^2 = 19.360$	

د دوه جمله یی توزیع او د برنولی آزماینښت:

د احتمال دوه جمله یی توزیع یوه مجزا (گسسته) توزیع ده چه د مختلفو پېښود توصیف لپاره استعمالیږي.

د برنولی ناڅاپي آزماینښت په بریالیتوب او نابریالیتوب په دوه دستودسته بندي کیږي.

د برنولي توزیع کولای شوچه په $P(x = m) = P^m(1 - P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ ښو وښیو. (P) د بریالیتوب او $q = 1 - P$ د نابریالیتوب احتمال دی.

که یو آزماینښت (n) ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي. چه دهرآزماینښت د بریالیتوب احتمال په (P) او د نابریالیتوب احتمال په (q) ښیو (n) ځله آزماینښت څخه د (m) ځلي بریالیتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}, 0 \leq m \leq n$$

د دوه جمله یی دتوزیع اوسط په $\bar{x} = np$ او معیاري انحراف یی په $s = \sqrt{npq}$ ښودل کیږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د یوه مریض د جوړېدلو احتمال (0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او یا د (3) څخه تر (4) تنو پوری جوړ شي.

حل:

$$n = 15, \quad m = 5, \quad P = 0.4, \quad q = 0.6$$

$$P(m = 5) = \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 \cdot (0.6)^{15-5}$$

$$= \frac{15!}{5!(15-5)!} \times 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191$$

$$= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i}$$

$$= (3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3} + (4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{15!}{3!(15-3)!} \cdot (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!(15-4)!} \cdot (0.0256)(0.6)^{11} \\
&= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} \\
&= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601
\end{aligned}$$

د پواسن د احتمال توزیع:

د پواسن د احتمال د توزیع فارمول دا $P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$ او $e = 2.718281 \dots$ دی.

مثال: (200) کسانو د طیارې ټیټې اخیستې دي که د مسافرینو نه راتگ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟
حل:

$$\begin{aligned}
n &= 200, \quad P = 0.01 \\
P(x = m) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}, \quad \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2 \\
P(3) &= \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8 = \frac{8}{7.389046158} \\
&= \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287
\end{aligned}$$

دا احتمال د دوه جمله یي په فارمول محاسبه کوو.

$$\begin{aligned}
P(x = m) &= \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \\
\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ P = 0.01 \end{array} \right\} &\Rightarrow q = 0.09 \\
P(x = m) = P(3) &= \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.09)^{200-3} \\
&= \frac{200!}{3!(200-3)!} (0.01)^3 (0.09)^{197} = 0.1814
\end{aligned}$$

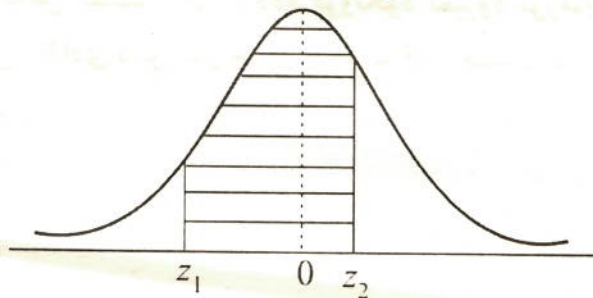
د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي دېټا د سټنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ چه (z) د سټنډرډ نورمال متحول او منحني ته د سټنډرډ نورمال منحني يا د نورمال احتمال منحني په نوم ياديږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د يوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ سره يې تړ بدلولو وروسته په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1) dz$$



د سټنډرډ نورمال د توزيع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د (z) د مقدار دوه لمړي رقمونه د اعشاریې د علامې دواړو خواو ته رقمونه د منحني ارتفاع رابښي او پورتنی سطر د اعشاریې د علامې سلیز رقم د منحني دواحد قاعده رابښي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د (z) په ستون کې (1.5) او په سطر کې (0.06) پیدا کوو. گورو چه د (1.5) د عدد په کرښه او د (0.06) د عدد په ستون کې واقع دی (0.9406) دی چه همدغه د منحني مساحت دی.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستگاه داسې تنظیم شوی ده چه که (952) ملي لېتره مایع په بوتل کې واچوي معیاري انحراف يې (4) ملي لېتره کیږي که مایع د (952) او (956) ملي بټرو تر منځ وي معیاري انحراف يې څو دی؟

حل: لمړې د له جنسه پیدا کوو.

یادداشت:

که د پواسن په فارمول کې د (λ) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو شمېر احتمال رانېسي.

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددی احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$$\lambda = 60, \quad t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$m = 4, \quad \lambda t = 60 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$P(m = 4) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} = \frac{e^{-3} \cdot 3^4}{4!} = \frac{(2.71828)^{-3} \cdot 3^4}{4!}$$

$$= \frac{1}{(2.71828)^3 \cdot 81} = \frac{81}{20.0854} = \frac{1 \cdot 81}{24 \cdot 20.0854} = \frac{27}{8 \cdot 20.0854}$$

$$= \frac{27}{160.6832} = 0.168032$$

د نورمال توزیع:

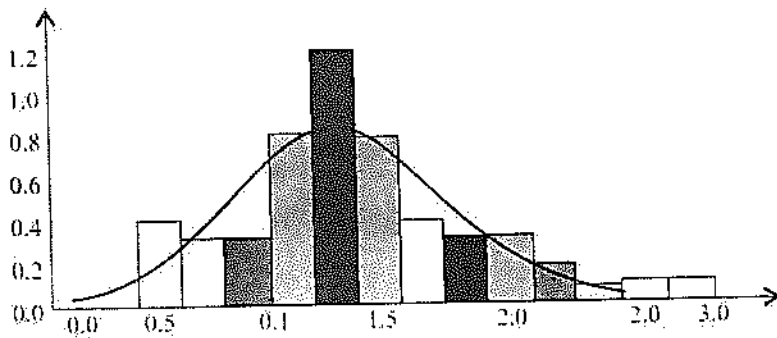
د نورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندې ډول ده.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x پیوسته تصادفي مقدار (s) معیاري انحراف او $f(x)$ د منحنی جگوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعگانو څخه ده.

مثال: د موټر ماشین د تېلو د سوځولو په وخت کې یوه اندازه ییزه لویګی خارجوي د هغه مضر لویګی مقدارچه د (46) موټرانو څخه تولیدیږي. په (1980) میلادي کې دیوه فزیکدان پواسطه چه لورنزن نومېده وڅېړل شو. لویګی یوه اندازه N_2 او O_2 لري لاندې مستطیلي ګراف د N_2 او O_2 اندازه چه واحد یې gr/mil دي او په (46) موټرانو کې د تېلو د سوځېدو څخه تولیدیږي د دغه موټرانو نورمال احتمال توزیع، اوسط او وریانس راښيي. د هر مستطیل مساحت د مستطیل د قاعدې او ارتفاع د حاصل ضرب څخه لاس ته راځي. مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې یې د قاعدې طول دی مساحت یې په لاندې ډول لاس ته راځي. $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

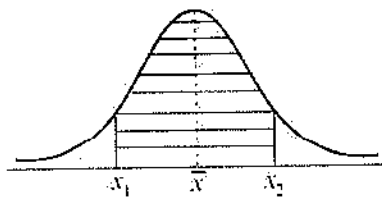


د نورمال توزیع منحنی لاندې مساحت اود هغه سټېنډرډ کول:

کله چه (x) پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ قیمت واخلي نو باید د (x) د احتمال د توزیع له تابع څخه انټیګرال ونیول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx$$



$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د څخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر څخه تر (1)

پوری ده. د جدول څخه معلومیږي چه $P(0 \leq z \leq 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%) ډک شوي وي د (952) څخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کی د دده کوونکود نمبرود نورمال توزیع اوسط (70)

اومعیاري انحراف يي (8) دی د نورمال جدول څخه په گټه اخیستوسره د (54) څخه تر (84)

پوری فیصدي پیدا کړی؟

حل:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

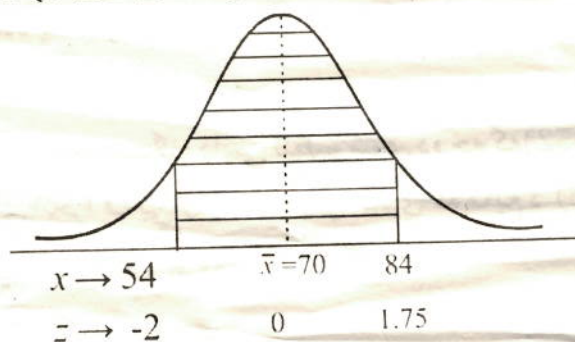
$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



نمونه اخیستل

ناخاپه نمونه اخیستنه:

که د ټولنی ټول عناصر په ټاکل کېدلو کی هم چانسو وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنی په ټولو عناصر باندی یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یی نمونه اخیستنه:

په دی نمونه اخیستنه کی ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه یی نمونه اخیستنه: - که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بېلابېلو څانگو ویشو او له هری څانگی څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهری ټولنی عددی خصوصیاتو (اوسط ، معیاری انحراف) ته د ټولنی پارامتر وایي.

د هری ټولنی د عددی نمونه گیری خصوصیاتو (اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ناخاپه متحولونو ته د (x) یوه ناخاپی نمونه وایي که چېرته یی تابع په دی ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطی (5) سپینی او (7) توری گلولی شته د قطی د منځ څخه (5) گلولی یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي. د ټاکل شوو ناخاپه نمونو د تصادفی متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد د توری گلولی لپاره اود (1) عدد د سپینی گلولی لپاره انتخابوو.

(x_1, x_2, x_3) ناخاپه متحولونه د برنولي ناخاپه متحولین دي. د $P = \frac{5}{12}$ او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

$$f(0) = \left(\frac{5}{12}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-0} = 1 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$f(1) = \left(\frac{5}{12}\right)^1 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-1} = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$$

$$f(2) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-2} = \frac{25}{144} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} = \frac{25}{144} \cdot \frac{12}{7} = \frac{25}{84}$$

$$f(3) = \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{-2} = \frac{125}{1728} \cdot \frac{144}{\left(\frac{7}{12}\right)^2} = \frac{144 \cdot 125}{1728 \cdot 49} = \frac{125}{12 \cdot 49} = \frac{125}{588}$$

$$f(4) = \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-4} = \frac{12^4}{12^3} = \frac{12^3 \cdot 5^4}{12^4 \cdot 7^3} = \frac{5^4}{12 \cdot 343}$$

$$f(5) = ?$$

د نمونې د اوسط توزیع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1, x_2, \dots, x_n$ ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزیع عبارت ده.

x	x_1	x_2	$\dots x_n$
(x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots \frac{1}{n}$

$$E(\bar{x}_n) = \mu \text{ د متحول اوسط}$$

$$U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta \text{ د متحول وریانس}$$

$$s_n^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ د نمونه یي وریانس}$$

$$E(S^2) = \delta^2 \text{ د وریانس اوسط}$$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ نمونه یي اوسط μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس وي او s^2 د نمونې وریانس وي.

احتمالات

نولسم فصل

احتمالات Probability

که د یوې پېښې وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د ټاکل وړ وي د ناڅاپي پېښې یا احتمال په نوم یادېږي. د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دی. مثلاً د معارف رئیس بی سواده دې نو احتمال یې صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راڅیږي احتمال یې یو دی.

چانس:

که دیوې پېښې دوو راندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغې پېښې ته چانس وایي.

په چانس کې د ممکن، ناممکن، خامخا او داسې نورې کلیمې استعمالېږي.

تصادفي پېښه:

هغه پېښه چې نتیجه یې معلومه وي. تصادفي پېښه، ناڅاپي آزمایش یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمد د بامه راوړلو پېښه یې ماته شوله.

تجربوي احتمال:

هغه احتمال چې د یوې تجربې په سرته رسولو کې په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د (Cl_2) او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجې د شمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{تصادفي پېښو د حالتونو شمېر} \\ \text{د تجربې د ټولو حالتونو شمېر} = \text{تصادفي پېښې احتمال}$$

نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندیز ته ویل کیږي. مگر نسبي کثرت د آزمایشات تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې د تجربې احتمال د پېښې د نسبي کثرت سره مساوي وي د نسبي کثرت مجموعه (1) ده.

مثال: تېر کال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوريدلو.

الف: اورښت او د ورځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: د راتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به د لیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

$$\text{الف: } \frac{10}{33} = \frac{1}{3} = 30\% \text{ نسبي کثرت}$$

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

په نمونه یي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددی امکان شته چه هر ممکن حالت منع ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وایي.

احتمال په (P) او $P(A)$ د (A) د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه یي فضا (n) غږي ولري په دی صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسی سکه په نظر کې نیسو چه دواړه مخونه یي شپږ وي. لاندی سوالونو ته جوابونه ووايي.

الف: چه پېسه شپږ راشي.

ب: چه پېسه خط راشي.

ج: ایا د شپږ او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

حل

$$P(\text{شېر}) = \frac{1}{1} = 1 \text{ الف}$$

$$P(\text{خط}) = \frac{0}{1} = 0 \text{ ب}$$

$$0 \neq 1 \text{ ج}$$

مثال: د يوه نورمال رمل اچول په نظر کې نيسو څرنگه چه د نمونې فضا $S = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ده نوله همدې کبله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(2) = P(1) = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%$$

د يوې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه:

د (S) د نمونه يي فضا هر قرعي سيټ يوه اتفاقي پېښه ده چه په (E) سره بنودل کېږي. که د غړو شمېر يې (n) وي د اتفاقي پېښو ټول شمېر (2^n) دی.

د ښار په گڼه گوڼه کې د ورځې د (10) او (12) بجو په شاوخوا کې د احمد د چپ بټوه غلا شوی ده د پوليسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه درې گڼکپان په دغه سيمه کې ليدل شوي دي د پېښې نمونه يي فضا ده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب خپل معلومات وليکي؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه يي فضا $S = (x, y, z)$ ده. کلي سيټ يې پيدا کړئ؟

$$E_1 = (x) \text{ يوازی غل دی.}$$

$$E_2 = (y) \text{ يوازی غل دی.}$$

$$E_3 = (z) \text{ يوازی غل دی.}$$

$$E_4 = (x, y) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_5 = (x, z) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_6 = (y, z) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_7 = (x, y, z) \text{ درې واړه غله دي.}$$

$$E_8 = \{\} = \phi \text{ يو هم غل نه دی.}$$

د احتمال قاعدې

1- د یوې اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه (E) وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې (S) د یوه آزمایش نمونه یي فضا وي نو $P(S) = 1$ د (S) ناڅاپي پېښه د ډاډمنۍ پېښې په نوم یادېږي.

3- د ناشونۍ پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو ډ اچولو نمونه یي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده خط $T =$ او شپږ $S =$ دی لاندیني احتمالات پیدا کړئ؟

الف: دواړه سکی شپږ دي.

ب: لږ تر لږه یوه سکه شپږ ده.

ج: دواړه سکی یو شان دي.

د: دواړه سکی یو شان نه دي.

ها: د سکو یوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

ونه ایز دیاگرام

کولای شو چه هر ناڅاپي آزمایش د و نه ایز دیاگرام پواسطه رسم کړو طریقه یې داسی ده چه د آزمایش د پیل څخه دیاگرام پیل کوو بیا د هرې نتیجې څخه ځانگی شروع کوو په هره ځانگه کی نتیجی د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول گراف ته و نه ایز دیاگرام وایي. د احتمالاتو د جمع حاصل د هرې ځانگی د نشرېدو په ټکي کی د (1) سره مساوي دې همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دې.

مثال: په یوه کڅوړه کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنگ (r) درې توپونه په شنه رنگ (g) او یو توپ په تور رنگ (b) رنگ شوي دي توپونه د لیدو لپاره را ایستل کیږي او بیا بهرته ایښودل کیږي مربوطه احتمالات یې پیدا کړئ؟

حل:-

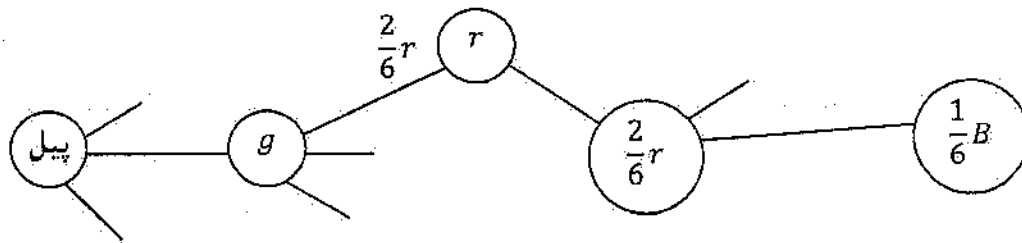
w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
P(w)	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

په پورته جدول کی ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرگند کیږي

د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده:

د یوې لومړنۍ پېښې احتمالات عبارت دي د پېښې د پیل څخه د پېښې تراخه پورې د احتمالاتو د ضرب د حاصل څخه په دغه موضوع باندې د ښه پوهېدلو لپاره د یوې کورنۍ شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یې د ټولې کورنۍ د غړو شمېر لاس ته راځي. مثال: په یوه کڅوړه کی سړی مری درې شنی مری او یوه توره مری ایښودل شوي دي مری د کڅوړې څخه داسی راویاسو چه ترکتلو وروسته بیا کڅوړې ته اچول کیږي او پیل (شنې، سړی، توري) څخه وي.

حل:



$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

یعنی د (شني، سري، توري) مړيو د وتلو احتمال 0.92% دی

د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- که د (S) په نمونه يي فضا کې د (A) او (B) دوه داسې ناڅاپي پېښې وي چې $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- که د (S) په نمونه يي فضا کې د (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې يود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: که د (S) په نمونه يي فضا کې د (A) يا (B) يوه پېښه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښه هم را منځ ته شوی ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4- که د (A) پېښه د (S) په نمونه يي فضا کې پېښه شوی وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښه په دې معنی ده چه اقلاد (A) يا (B) پېښه، پېښه شوی ده.

مثال: که د (C) پېښه د (A) او (B) دوه بېلابېلې پېښې په ځان کې ولري نو په دې صورت کې د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه هم په ځان کې لري.

حل: فرضاً $A = \{1, 2\}$ او $B = \{2, 3\}$ وي او $C = \{1, 2, 3, 4\}$ وي لیدل کېږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دي ځکه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

د ناڅاپي پېښو تقاطع

- 1- په يوه نمونه يي فضا کې د دوه يا څو ناڅاپي پېښو تقاطع د تبديلي د قانون پيروي کوي. فرضاً د (A) او (B) او (C) ناڅاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحيح ده.
- 2- که په يوه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې واقع شي نو د دوی تقاطع د هرې ناڅاپي پېښې فرعي سيټ دی.

فرضاً د (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq B$ او $A \cap B \subseteq A$

- 3- که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

- 4- که A او B دوه ناڅاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نو دواړو پېښو تقاطع کوچنی پېښه ده

$$A \cap B = A$$

مثال: د يوه بسونځي د فوټبال د ټيم څخه درې تنه د واليبال په ټيم کې هم شامل دي که د فوټبال د ټيم غړي په (A) او د واليبال د ټيم غړي په (B) وښيو او د دواړو ټيمونو گډ غړي په (C) وښيو نو د ټيمونو تر منځ اړيکه د سيټ تيوري په شکل وليکئ

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \text{ \& } A \cap B \subseteq B$$

کلي او مکمله سيټ

د څو فرعي سيټونو مجموعي سيټ ته کلي سيټ وايي. که په يوه کلي سيټ کې دوه سيټونه موجود وي نو دا سيټونه يو د بل مکمله سيټونه دي.

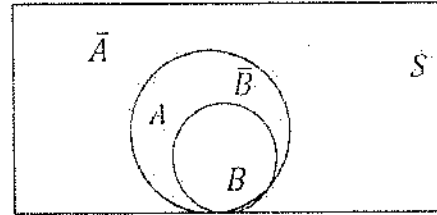
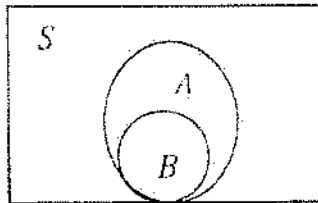
که (S) يوه نمونه يي فضا وي او (A) يوه ناڅاپي پېښه وي او $(\bar{A})$ يوه بله ناڅاپي پېښه وي چه د (A) سره په يوه وخت کې پېښه شوې نه وي. (S) د دغه دواړه سيټونو کلي سيټ دي او $(\bar{A})$ د (A) مکمله سيټ دی.

$$A \cup \bar{A} = S \quad \text{الف:}$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1 \quad \text{ب:}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{ج}$$

که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه د (B) ناڅاپي پېښه په برکې ولري. په ګرافيکي ډول ونښي چې د $(\bar{A})$ ناڅاپي د $(\bar{B})$ یوه ناڅاپي پېښه په برکې لري. حل: څرنگه چې $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلومېږي چې:



د سیټونو او میل جوړونه:

د سیټ تیوري په واسطه د احتمالاتو مسائل حلېږي یعنې د ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسایلو حل اوس د سیټ تیوري په واسطه حلېږي چې په دې اساس د سیټ تیوري د فعالیت ساحه نوره هم پراخه شوه.

مثال د په نمونه یي فضا کې د او ناڅاپي پېښې په لاندې ډیاګرام کې راګرځوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی.

a: د دې احتمال چې د (A) یا (B) حادثه ناڅاپي پېښه شي.

b: د دې احتمال چې د (A) پېښه، پېښه شي.

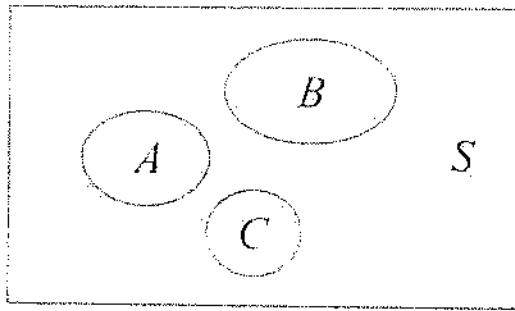
c: د دې احتمال چې د (C) پېښه پېښه نه شي.

حل:

a: د (A) یا (B) احتمال په حقیقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنگه چې دا پېښې یو د بل

څخه بېلې دي نو یعنې $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



b. د دې احتمال چه د (A) پېښه ناڅاپه پېښه شي د $(\bar{A})$ د پېښې څخه عبارت دی چه د $(\bar{A})$ پېښه نه ده پېښه شوی د $(\bar{A})$ پېښه د (B) او (C) د پېښو اتحاد دي يعنی دغه دواړه پېښې نه دي پېښې شوي نو $P(\bar{A}) = P(C \cup B)$ څرنگه $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره د دې چه د (C) پېښه ناڅاپه پېښه نه شي هغه پېښې د پېښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د (A) او (B) پېښې. پېښې شي يعنی $(A \cup B)$ د پېښې د پېښېدلو څخه عبارت دی نو

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمېرنې اصل:

د دوه سیتونو د شمېرنې اصل په ترکیب او ترتیب پورې اړه لري

1- د دوه سیتونو د عناصرو د شمېرنې لپاره عناصر سره ضربو مجموعه يي د سیتونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده

2- که د یوه سیت عناصر (m) او د بل سیت عناصر (n) وي نو $(m \times n)$ يي د حاصل ضرب مجموعه ده

مثال د $(0, 1, 2, 3, 4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړېږي او څو عددونه په (2) پوره وېشل کېږي

حل $(4 \times 5 = 20)$ دوه رقمي عددونه وړ څخه جوړېږي او $(3 \times 4 = 12)$ عددونه په (2) پوره وېشل کېږي

پرموتېشن (ترتيب) Permutation

که څو شيان ولرو او ددی شيانو څخه جوړې جوړې کړو په دغه جوړو کې د شيانو بدلولو ته ترتيب وايي.

(a, b, c, d) څلور حروف راگرشوي دي غواړو څه دوه، دوه يې جوړه کړو نو په لاندې ډول يې جوړه کوو.

(ab, ac, ad, bc, bd, cd) نو که څلور شيان دوه، دوه جوړه کړو نو شپږ جوړې ورڅخه جوړېږي.

فکتوريل:

د مثبتو مسلسلو عددونو ضربولو ته فکتوريل وايي. او په (1) سره بنودل کېږي.

$0! = 1$ او همدا ډول $1! = 1$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وگورئ.

(n) مسلسل عددونه په (P_n) بڼې $(P_n = n!)$ دی.

ترکيب (Combinatuin):

هغه روش څه د هغه پواسطه د بينوم ضربونه پيدا کېږي د ترکيب په نوم ياديږي. او په لاندې ډول ليکل کېږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$0 \leq k \leq n$ او $\binom{n}{k}$ داسی ويل کېږي. (k) د پاسه (n)

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبېنېشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قيمت پيدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$$

وریشن (تبدیل) Variation

په تبدیل او ترتیب کی د جوړو شمېر ته تبدیل وایي.

وریشن یا تبدیل په (V_k^n) نښي. د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k! C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داوول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توگه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمېر یی پیدا کړئ؟

حل:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26!} \\ = 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

دامکاناتو شمېر		د ټاکنو ډول k غړي د n غړو څخه	
سره له تکراره	$k \leq n$	پرته له تکرار څخه	$k \leq n$
$P(n, k) = \frac{n!}{k!}$	$P(n, k) = n! , n = k$	ترتیب یا پرموتیشن	
$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	ترکیب یا کمبېمیشن	
$V_k^n = n^k$	$V_k^n = k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	تبدیل یا وریشن	

مثال: د یوی سکي په اچولو کی چه د راتگ امکان یی په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتگ احتمال یی د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي، (3) ځلي، (6) ځلي، (8) ځلي، (16) ځليو غورځول شي د هم چانسو لمړنیو پېښو په نمونه یی فضا کی یو ونه ایزگراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

په پورتنی مثال کې د شپږ او خط دراتګ احتمال په یو، دوه، درې، څلور ځلي غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

څلور ځله		درې ځله		دوه ځله		یو ځل		هیڅ ځل		دسکې غورځول	
خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	
1	$\frac{4}{16}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1			
2	$\frac{6}{16}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{1}{4}$	2					
3	$\frac{4}{16}$	3	$\frac{1}{8}$	3							
4	$\frac{1}{16}$	4									

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کې د حدونو ضریبونه دي. دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کې ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کې ترې استفاده وکړو

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}a^5 + \textcircled{5}a^4b + \textcircled{10}a^3b^2 + \textcircled{10}a^2b^3 + \textcircled{5}ab^4 + \textcircled{1}b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}a^6 + \textcircled{6}a^5b + \textcircled{15}a^4b^2 + \textcircled{20}a^3b^3 + \textcircled{15}a^2b^4 + \textcircled{6}ab^5 + \textcircled{1}b^6$$

عمومي شکل يې دا دی:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

د خطراتو احتمال په مرتبه کې عبارت دی

$$P(\text{د خطراتک}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بېنوم قضيه:

د بېنوم قضيه محکمې ويل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره:

که د یوې ناڅاپي پېښې پېښېدلو ته (1) او نه پېښېدلو ته يې (0) ووايو لاندې جدول د $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ

k	ممکنی پایلی	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1 - P)^2$	$\binom{2}{0} p^0 (1 - p)^2$
1	10	$2P(1 - P)$	
2	11		$\binom{2}{2} p^2 (1 - p)^2$
		$\{P + (1 - P)\}^2$	$\sum \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = ?$

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په (n) ځله تکرار کی د بینوم دانکشاف (k) . ام حد لاندی احتمال لري.

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n, p, k)$ ښودل کیږي او د پرتولي د پرابلم د احتمال په نوم یادېږي. اوداسی لیکل کیږي.

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

د دوه جمله یي احتمال:

که یوه نمونه یي فضا دوه غړي ولري نو که د یوه غړي احتمال یي (P) وي نو دبل حالت احتمال یي $(1 - P)$ دی چه بایلل ورته وایي. که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کی او د بایللو احتمال په ښودل کیږي.

$$n - k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کی د وړلو احتمال $\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بایللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه یي په لاندی ډول کیږي.

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کې د دې احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتې انجونې دي خو دې؟

حل:

$$P = \frac{1}{2}$$

نو

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{10}{32} = 0.3125 = 31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځوود دې احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کې راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل وړل وګڼو نو

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{729} = \frac{60}{729} = 0.0823 = 8.23\%$$

څلورم مثال: د یوې سکې د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دې که څلور واره وغورځول شي د دې احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1 - P = \frac{1}{3} P$$

$$P = \frac{3}{4}, \quad Q = \frac{1}{4}$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ تر لږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زیات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دی ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \quad \text{so} \quad 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

متمادي او غیر متمادي فضاگانې:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یي فضا یو معین یا غیر معین سیټ دی یعنې که د فضا عناصر معین (Countable) وي نمونه یي فضا معینه ده. چه پرېکړې فضا هم ورته وایي او که د فضا عناصر معین نه وي نو فضا غیر معینه ده چه نښتې یا متمادي فضا هم ورته وایي مثال: د لاندې فضاگانو څخه کومه یوه متصّله او کوم یوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل

ج: د (30) دده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د یوې د کړۍ د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د ساتنې گېرېد څخه تر (1000) درجو د ساتنې گېرېد پورې

ه: د (30) او (45) درجو ترمنځ د یوې زاوېي ټاکل

حل: څرنگه چه د (الف اوج) نمونه يي فضاگانې د محدودو عناصرو د شمېر شخړه جوړې شوي دي نو پرېکړې فضاگانې دي او (ب، د اوها) فضاگانې د نامحدودو عددونو شخړه جوړې شوي دي نو نېټې يا امتدادي فضاگانې ورته وايي.

دويم مثال: عبدالله د خپل کور د گلاتو د اوبولو لپاره يو واټر پمپ واخيستلو د واټر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړی؟

حل: $\{\}$ خالي نېټ د واټر پمپ د وړاندو وخت دی او $S = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ د واټر پمپ د عمر اوږد والې دی.

هم چانسې پېښې:

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسې پېښو په نوم يادېږي.

که چېرې $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو (e_i) د هر $i = 1, 2, 3, \dots, n$ لپاره يوه ناڅاپه لومړنۍ پېښه ده په دې شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي د لومړنيو پېښو د احتمالاتو مجموعه د يوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = \sum_{i=1}^n P(e_i) = 1$$

مثال: څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسې ده د هر يوه د کتلو احتمال پيدا کړی؟

حل: که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو د هرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دی نو لیکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنۍ پېښې هم چانسې دي

د متمادي فضاگانو احتمال:

پېښته نمونه يي فضا گانې د لايتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور ،
سطحه او د اجسامو په حجمونو کې ليدل کيږي. د دغه ډول ټکو بنسټونه ممکنه نه ده مگر د
احتمال د نسبت لپاره يي خطونه ، سطحې او حجمونه په ټوټو وېشو د اعدادو د محور څخه د
يوه حرف لکه (x) او په سطحو کې دوه تورو لکه (x, y) څخه او په اجسامو کې د درې
تورو څخه لکه (x, y, z) څخه استفاده کوو.

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0, 3)$ په انټروال کې د يو ټکي وټاکي چه:

$$1 < x < 2.5$$

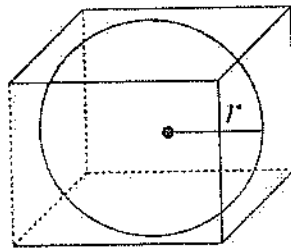
$$P(A) = \frac{\bar{A}}{B} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دويم مثال: يوه کره په يوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې
يوه نقطه ټاکو ايا ددی احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د کرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{\text{globe}}}{A_{\text{CUB}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi (1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$



مشروط احتمال:

که S نمونه يي فضا او (A) او (B) په دغه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په
داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ يعنی د (A) د پېښې احتمال نظر د (B) ناڅاپي پېښې ته مشروط
احتمال بلل کيږي.

د پورته فارمول څخه لیکو چې:

-1

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

-2

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عموميټ ورکړو نو لیکو چې:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

لومړۍ مثال: یو شاگرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ د گاډۍ څخه ګټه اخلي چې (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښې:

1- د گاډۍ پواسطه راتلل.

2- په ټاکلي وخت رسیدل او په دې صورت کې د (A) مشروط احتمال نظر (B) ته $P_B(A)$ مطلوب دي؟

حل:

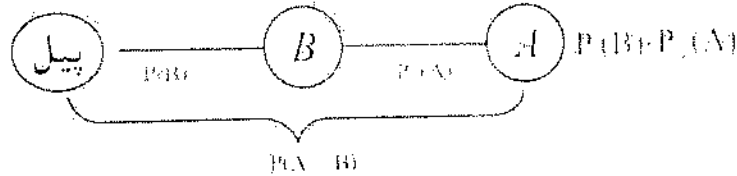
$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\bar{3} = 58.33\%$$

د حاصل ضرب اصل

د په نمونه یي فضا کې د او د دوه ناڅاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف سره سم لیکو چې:

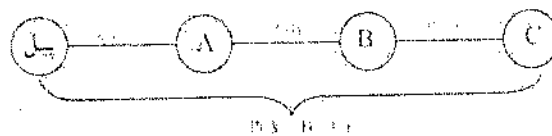
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ایز دیاگرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

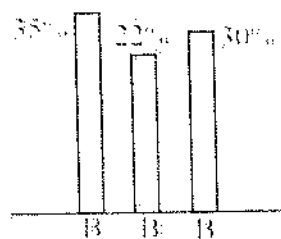
دا مطلب د او او درې پېښو لپاره هم د تطبیق وړ دی



$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د B_1 , B_2 او B_3 په درې ولایتونو کې په پارلماني ټاکنو کې د ګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند فیصدي برخه ورکړشوی ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او یا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي. ناڅاپي په لاندې ډول تعریفوو



✓: هغه رايي ورکوونکي چې جمهوري ګوند يې ټاکلی وي

B_i د ولایت رايي ورکوونکي

ولایت	د رایو ورکونکو فیصدي	جمهوري گوند ته رای ورکونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

1- B_i دوه په دوه یو دېل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د (S) نمونه یي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^3 B_i$ دی نو:

$B_i \cap V (i = 1, 2, 3)$ یو له بل سره مستقل صورت نیسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$$

د دواړو خواوو د احتمال لپاره لیکو.

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left\{\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 \\ &= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794 \\ P(V) &= 27.94\% \end{aligned}$$

تعریف

که چېرې د $B_1, B_2, \dots, B_n$ رای ورکونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \dots n$ پېښو عمومي حالت د (S) په نمونه یي فضا کې یوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادېږي او د (A) اختیاري ناڅاپي پېښی لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د B_i چې $i = 1 \dots n$ د (S) نمونه یي فضا د یوې پېښی لپاره چې $P(B_i) \neq 0$ د (A) ناڅاپي پېښی احتمال چې $P(A) \neq 0$ وي د $(Bayes)$ بایز فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائيز فارمول زيات استعمال لري لکه $n=2$ لپاره $B_1 = \bar{B}$, $B_2 = \bar{B}$ په پام کې ونيسو په حقيقت کې B_1 او B_2 د (S) د نمونه يي فضا پېښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

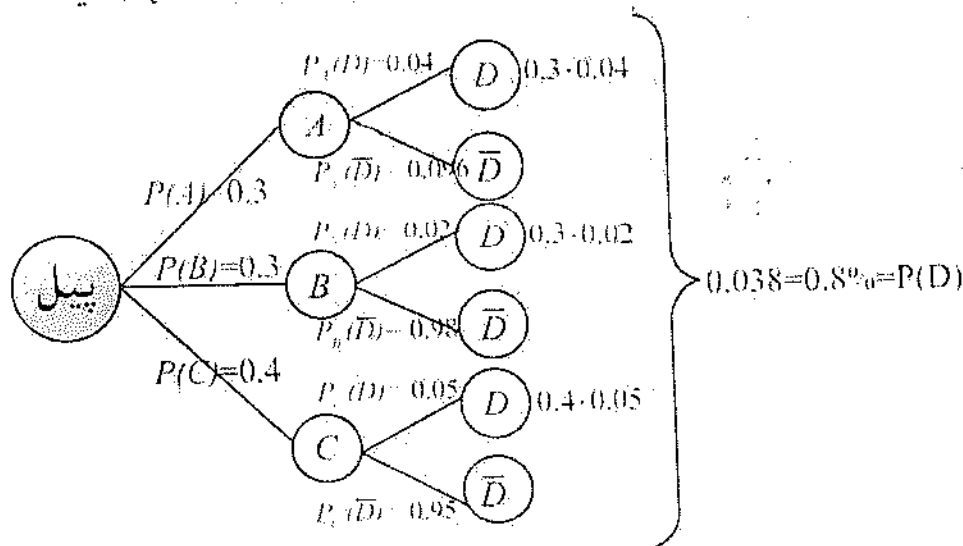
پورتنی فارمول د لپاره د بائيز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال په يوه فابريکه کې د A , B او C ذری ماشینونه په ترتيب سره 30% , 30% او 40% د برق گروپونه توليدوي که چترته په ماشینونو کې دگروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 2% , 4% او 5% وي او نوموړي گروپونه په گډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: ددی احتمال چه يو اخيستل شوی گروپ وړان دی

b: په کوم احتمال خراب شوی گروپ د C په ماشین پوری اړه لري.

c: یو نوی تولید شوی گروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشین پوری اړه ولري.



b جز حل

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري:

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه ډول ناڅاپي پېښو ته مستقلي پېښی وايي یعنې پېښی استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د A او B پېښی ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د یوه ښوونځي دده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ورکړئ:

الف: ټاکل شوی دده کوونکی یو هوښیار دده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی دده کوونکی توری سترګی لري.

حل: څرنګه چې $P_B(H) = P(H)$ اوسرېره پردې $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \dots, A_n$ ناڅاپي پېښی احتمالاً یو له بلې څخه مستقلي بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له بلې سره تړلی دي.

نتیجه:

1- $\bar{B} \cap A, \bar{B} \cap \bar{A}, A \cap \bar{B}, A \cap B$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو.

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1 - b)$	a
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = b(1 - a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - a)(1 - b)$	$1 - a$
	b	$1 - b$	1

2- د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یو د بل څخه مستقلې دي نولرو چې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

دویم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه ډک کړئ؟

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) = ?$	$(?)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = ?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$	$(?)$
	$(?)$	0.6	

حل: څرنگه چې $P(\bar{B}) = 0.6$ نو $P(B)$ داسې پیدا کوو

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.30$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

که پیدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځایونو کې ولیکو جدول تکمیلېږي.

شلم فصل

موهومي عددونه *Imaginary Numbers*

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدې کبله کله چه په دويمه درجه معادلو کې $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) ميلادي کال يو جرمني ساينسدان چه Friedrich Gauss نومېدلو ($-1 = i^2$) وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلو د حل لپاره لاره خلاصه شوه چه ($\Delta < 0$) وه.

موهومي عدد (*Imaginary Numbers*) يو عدد دی چه په روزمره ژوند کې په راکړه ورکړه کې نه استعمالېږي. مگر د علمي مسايلو د حل لپاره د زيات اهميت وړ دی لمړی حرف يې د ايوتا (*iota*) يوناني کلمې څخه اخيستل شوی دی.

مثال: $\sqrt{-36}$ جذر پيدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دويم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$

$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2 y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنگه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کيږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مگر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$\begin{array}{llll} 1: i = \sqrt{-1} & 2: i^2 = -1 & 3: i^3 = -i & 4: i^4 = 1 \\ 5: i^5 = i & 6: i^6 = -1 & & \end{array}$$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندې جدول کې خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه يې منفي وي د پورته جدول پواسطه حلېږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$$

$$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$$

لاندې موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

د اعدادو سټونه:

1- د طبعي اعدادو سټ *Set of Natural Numbers*

د (1) څخه تر لايتناهي (∞) پورې د اعدادو سټ ته د طبعي اعدادو سټ وايي په (IN) سره يې نښي.

$$IN = (1, 2, 3, 4, 5 \dots \infty)$$

2- د مکمل اعدادو سټ *Set of Whole Numbers*

د (0) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سټ ته د مکمل اعدادو سټ وايي په (W) سره يې نښي.

$$W = (0, 1, 2, 3, 4, \dots \infty)$$

3- د تام اعدادو سټ *Set of Integer Numbers*

د ($-\infty$) څخه تر ($+\infty$) پورې د اعدادو سټ ته د تام اعدادو سټ وايي او په (I) سره يې نښي.

$$I = (-\infty, \dots, -3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 \dots \infty)$$

4- د دناطق اعدادو سټ *Set Of Rational Numbers*

صحيح عدد، مختوم کسر، غير مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي او په (Q) سره يې نښي.

$$Q = \left(1, 2, 15, 109, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \dots\right)$$

5- د غیرناتق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناتق عدد بلل کیږي. او په ($\bar{Q}$) سره ښودل کیږي.

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47}, \frac{13}{49}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\right)$$

په حقيقي اعدادو د سیټ په نوم یادېږي. او په (IR) سره یې ښیي.

$$IR = (Q + \bar{Q}) = \left(-\infty, -3, +6, \sqrt{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{13}{49}, \dots, \infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*

هغه عددونه چه یوازې د (i) حرف پکې موجود وي او د حقيقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کیږي. لکه ($-i, 11i, \frac{2}{3}i, \sqrt{5i^3}$)

د موهومي عددونو څلورگوني عمليي

1- د موهومي عددونو جمع او تفریق:

هم علامه عددونه جمع کوو علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف علامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$$1: 15i - 31i = 16i$$

$$2: 14i - i = 13i$$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې، عدد په عدد کې ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ويشو او توانونه يو د بل څخه منفي کوو.
مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه Complex Numbers

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعی يا تفاضل څخه لاس ته راغلی وي لکه $(5 + 11i, 8 - 20i)$ او داسی نور. مختلط عدد په (z) سره نښي $z = 3 \pm 21i$ او داسی نور.

صفری مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخي يي صفر وي.

مثال: که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کيږي دغه عدد ته صفری مختلط عدد وايي.

مثال: لاندې $(i - 3, 4, 2i, 2i - 3)$ عددونه په معیاري شکل وليکي؟

مختلط عددونه	معیاري شکل $(z = a + bi)$
$i - 3$	$-3 + i$
4	$4 + 0i$
$2i$	$0 + 2i$
$2i - 3$	$-3 + 2i$

د مختلطو عددونو څلور گونی عملیې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بیا هم یو موهومي عدد دی.

$$\frac{17 + 45i}{28 - 106i}$$

$$45 - 61i$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کيږي.

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعې د عمليې خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعې معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقيقي عدد د حقيقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\frac{29 - 18i}{\pm 35 \pm 67i}$$

$$64 + 49i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونو ضرب

علامه په علامه کې عدد په عدد کې ضربوو او توانونه يې سره جمع کوو.

مثال: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي د ضرب حاصل يې پيدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$

$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1 \cdot z_2$ پيدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$

$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$

$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

د مختلط عدد مزدوج (Conjugate of Complex Number):

د يوه مختلط عدد مزدوج د بينوم د مزدوج په څېر دی. او په $\bar{z}$ سره يې نښي. مثلاً که (z) يو مختلط عدد وي نو مزدوج يې $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ يو مختلط عدد دې او مزدوج يې $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$

$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم، $Norm$ (ميزان، ماخذ، هنجار، نمونه) وايي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , 2xRel(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \quad 2yiIm(z)$$

د مختلط عدد ضربي معکوس:

فرضاً $a + bi$ يو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره يې د صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربووک

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\text{مثال: د } 2 - 3i \text{ ضربي معکوس پيدا کړئ؟}$$

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په يوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم عليه دواړه د مقسوم عليه په مزدوج کې ضربوو.

مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\begin{aligned}\frac{4+3i}{2+5i} &= \frac{4+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2} \\ &= \frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)} = \frac{8-14i+15}{4+25} \\ &= \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i\end{aligned}$$

د یوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخی دوه چند دی.

$$z + \bar{z} = 2x$$

6- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخی دوه چند دی.

$$z - \bar{z} = 2yi$$

7- د یوه مختلط عدد د مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}} = z$$

مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ او $z_1 \cdot z_2 = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ کیږي؟

حل:

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$

$$z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

ثابته شوه چه:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i)(-3 + 2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$$

$$= -12 - 7i + 10(-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i)(-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$$

$$= -12 + 7i + 10(-1)$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

په نتیجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

د دویمې درجې معادلې عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه

ډول معادلې د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري مګر په موهومي اعدادو کې حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$$

$$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240$$

$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$

$$\Delta = -256$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$

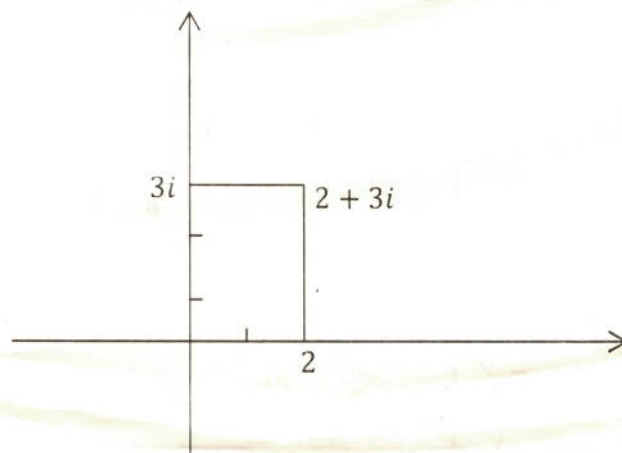
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$

$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

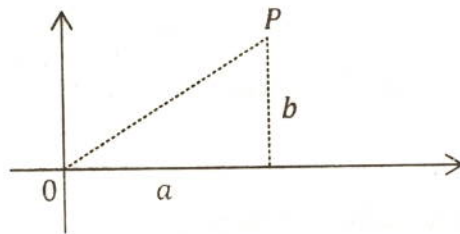
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

په مختلط عددونو کې حقيقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پيدا کيږي. په دې ترتيب کولای شو چه دگوس داعدادو په مستوي کې مطلوب نقاط پيدا کړو. د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي او د خطودترسيم په نتيجه کې مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال: د $(2 + 3i)$ نقطه پيدا کړئ



که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یې مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورو نو د مبداء څخه یې فاصله کړو نو نقطه د مبداء سره وصلو. مطلقه قیمت یې د مبداء څخه فاصله ده. چه د فیثاغورث د قضیې سره سم یې هم فاصله پيدا کيږي.



مثال: د (P) د نقطې وضعیه کمیت $(4 + 3i)$ دی مطلقه قیمت یې د مبدا څخه څو دی؟

$$4 + 3i = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یې د محورونو د مبدا څخه مساوي ده.

$$-5 + 12i$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

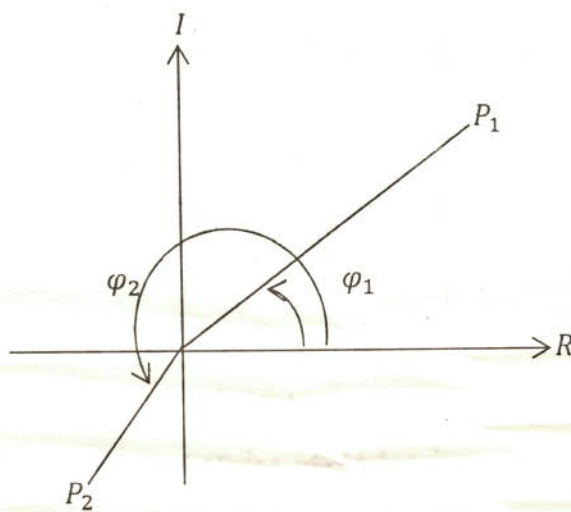
$$-5 - 12i$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

د (φ) هغه زاویه چه د $(\overline{OP})$ خط یې د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم یادېږي حرکت یې د ساعت د عقربې خلاف وي یعنی دا زاویه همېشه مثبت وي.



يوويشتم فصل

د رياضي منطق

د رياضي استدلال:

د صانع بيان د سمون لپاره چه کومی علامي او طريقي استعمالیږي د رياضي د استدلال په نوم یادېږي.

شهودي درک يا مشاهدات: هغه مفاهيم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل يي استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات يا شهودي درک ورته وايي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاويي مساوي وي. او داسی نور.

تمثيلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د يورياضيکي بيان د وضاحت لپاره مثالونه وويل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتايج لاس ته راوړل شي.

لکه په عاميانه ډول [مار خورلی د پري نه ډارېږي] دا يو قياسي استدلال دی.

استقرائي استدلال:

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کی د ټولو طبعي عددونو، ټولو جفتو عددونو يا ټولو طاقو عددونو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته استقراء يا استقرائي استدلال وايي.

د ټولو طاقو عددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پيدا کېږي.

د ټولو جفتو عددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پيدا کېږي.

د ټولو مسلسلو عددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پيدا کېږي.

د استقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د رياضي په استقراء کی ثبوت شوي دي.

لاندی جدول کی خالي ځايونه ډک کړئ

د متوالي عددونو شمېر	د متوالي طبيعي عددونو مکعبونه	د مکعبونو مجموعه	د مجموعې فارمول
1	1^3		1^2
2	$1^3 + 2^3$		
3	$1^3 + 2^3 + 3^3$	36	
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$		10^2
n	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$		$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

مثال: ثبوت کړئ چې $P(n) = 4^{2n} - 1$ په (5) باندې د وېش وړ دي؟

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو.

$$P(1) = 4^{2 \cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15$$

(15) په (5) باندې وېشل کېږي.

په (n) باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چې په (n + 1) باندې هم د وېش وړ دي.

ثبوت:

$$P(n) = 4^{2n} - 1 = 5r$$

$$4^2 \cdot (4^{2n} - 1) = 5r \cdot 4^2 \Rightarrow 4^{2n+2} - 4^2 = 5r \cdot 16$$

$$4^{2(n+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot 5r = 5(3 + 16r)$$

د مساوات ښی خوا په (5) وېشل کېږي. نو چپ طرف يې هم وېشل کېږي. نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1) = 4^{2(n+1)} - 1$$

ثابتته شوه چې که په راکړ شوي فارمول کې د (n) په عوض هر طبيعي عدد وضع شي په (5) وېشل کېږي.

استنتاجي استدلال

که د یوې عملیې نتیجه همېشه ثابتې وي او ښه په ډاډ سره یې په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وايي. لاندې جدول ته وگورئ

8	12	19	23
15	19	26	30
30	38	52	60
18	26	40	48
9	13	20	24
1	1	1	1

په پورته جدول کې د عدد سره (7) جمع شوي دي. د جمع حاصل یې دوه چند شوی دي. بیا بېرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل یې نیمایي شوی دي په دغه عددو کې هر عدد د اولني عدد څخه د (1) په اندازه زیات شوی دي. چه دغسې عمل ته استنتاجي استدلال وايي.

د حکم د نفی کولو استدلال:

د غیر ناطقو عددونو د جمع حاصل یو غیر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحیح دی. نو (x) او (y) دوه مجهول عددونه په نظر کې نیسو چه د جمع حاصل یې $(x + y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x = 1 + \sqrt{2}$ او $y = 1 - \sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x + y = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$$

گورو چه $(x + y = 2)$ یو ناطق عدد دي. غیر ناطق عدد نه دي. نو ثابتې شوه چه د دوه غیر ناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غیر ناطق عدد نه وي.

د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

د قضیې د عکس ثبوت ته غیر مستقیم ثبوت وايي.

قضیه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که n^2 جفت وي.

مطلوب: ثبوتوو چه (n) هم جفت دي.

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو لیکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطی څخه څرگنده شوه چه (n^2) طاق دی او دا د فرضیې خلاف ده نو دا چه (n) یو جفت عدد دی صحیح نه دی.

د ریاضي منطق او د بیان استنتاج:

بیان یوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بیان په (P) او د بیان صحت په (T) او غلطی یې په (F) وښیو او $(\sim P)$ د (P) د بیان نفی وي نو د صحت جدول یې په لاندی ډول جوړیږي.

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب:

1- $P \wedge Q$ کی $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.

2- $P \vee Q$ کی $(\vee)$ د (یا) معنی ورکوي.

3- $P \Rightarrow Q$ کی $(\Rightarrow)$ د (په نتیجه کې) معنی ورکوي.

4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي.

مثال: د تحت په جدول کی وښیاست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان په کوم وخت کی صحیح دی.

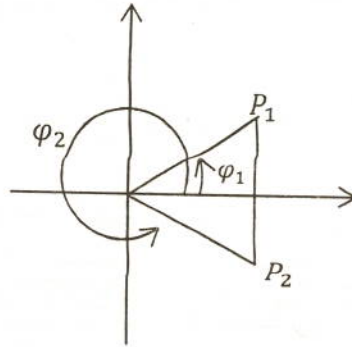
p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

تمت بالخیر

په 1394/4/23 نیټه چه د روژی د مبارکی میاشتی د اوه ویشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تلاشی چوک د حاجي زر خان په پلازه کی پای ته ورسېدلو.

سردار محمد (خوږیانی)

دوده مزدوجو مختلطو عددونو د ارگومینتینو د جمع حاصل مکمل دوران (360°) وي.



دمختلطو عددونو د دویم جذر پیدا کول:

دمختلط عدد دویم جذر د لاندی فارمول په واسطه پیدا کیږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

ثبوت:

$$(\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi})^2 = a + bi + 2\sqrt{a + bi} \cdot \sqrt{a - bi} + a - bi \dots\dots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2} + 2a$$

$$\sqrt{(\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi})^2} = \sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \dots\dots 2$$

$$\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi} = \sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \dots\dots 3$$

$$\sqrt{a + bi} - \sqrt{a - bi} = \sqrt{2(-\sqrt{a^2 + b^2} + a)} = i\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \dots\dots 4$$

دریمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a + bi}}{2} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}}{2} \dots\dots 5$$

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \dots\dots\dots 6$$

$$\sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \dots\dots\dots 7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i} = \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}} = 3+2i$$

دویم مثال:

$$\sqrt{-2i} = \sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}} = 1$$

د ځينو کاشفينو انځورونه



کارل فریدرېح



بېنارډ ريمان



جورج کانتور



اريتوستنس



ارشمیدیس



اسحاق نیوټن



پیرګ اندرویس



محمد بن موسی



وین ستنهاریو



کووشی



هرمت



فارما



لایبیز



وایرس ترس

چاپ شوي کتابونه

- * عمومي رياضي (نوی نصاب)
- * عمومي فزیک (نوی نصاب)
- * ابتدائيه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

تر چاپ لاندې کتابونه

- * د فزیک د تمریناتو حل (نوی نصاب)
- * د رياضي د تمریناتو حل (نوی نصاب)
- * د عمومي رياضي (فارسي ترجمه)
- * عمومي هندسه
- * د عمومي هندسې (فارسي ترجمه)
- * عمومي مثلثات
- * عمومي رياضي (فارسي ژباړه)
- * عمومي فزیک (فارسي ژباړه)

سپين غر تعليمي مرکز

مېرمن خېره زېږت تېلوان

پېښور، پاکستان

د وېب سايټ لپاره: www.spin-gher.com

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420

